

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952

О СТРУКТУРЕ ЯДРА ЗАДАЧИ ШВАРЦА
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
НА ПЛОСКОСТИ

© В. Г. Николаев

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

e-mail: vg14@inbox.ru

Поступила в редакцию 08.12.2023 г., после доработки 08.12.2023 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Исследована задача Шварца для J -аналитических функций в произвольном эллипсе. Матрица J предполагается двумерной с разными собственными числами, лежащими выше вещественной оси. Приведен пример непостоянного решения однородной задачи Шварца в виде вектор-полинома третьей степени. Рассмотрен численный параметр l матрицы J , выражающийся через её собственные векторы. Проведён анализ соотношения, на основе которого получен метод вычисления размерности и структуры ядра задачи Шварца в произвольном эллипсе. Получены достаточные условия тривиальности ядра, выраженные через параметры эллипса, собственные значения матрицы J и параметр l . Приведены примеры одномерного и тривиального ядер.

Ключевые слова: задача Шварца, ядро, матрица, собственные значения.

DOI: 10.31857/S0374064124050053, EDN: LBMJGE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование краевых задач для различных классов аналитических функций имеет давнюю историю [1, с. 264; 2, с. 140; 3, с. 125] и в последние годы развивалось в нескольких направлениях: как теоретически [4, с. 80; 5], так и в приложении к задачам общей теории краевых задач для (псевдо)дифференциальных уравнений [6–8].

Задача Римана–Гильберта [1, с. 264; 2, с. 140] о нахождении аналитической в области функции по заданному на границе значению её вещественной части относится к основным краевым задачам. Одним из возможных её обобщений является задача Шварца для аналитических по Дуглису функций, специальный случай которой рассматривается в настоящей работе. Отметим, что задача Шварца находит применение в теории эллиптических систем второго порядка на плоскости [9].

Пусть все собственные числа матрицы $J \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ лежат в верхней полуплоскости. Аналитической по Дуглису, или J -аналитической с матрицей J [4, с. 80; 5; 10] называется комплексная ℓ -вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, которая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \quad (1)$$

Примерами J -аналитических функций могут служить векторные полиномы следующего вида:

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^N (xE + Jy)^n c_n, \quad c_n \in \mathbb{C}^{\ell},$$

где E — единичная матрица.

В монографии [4] показано, что комплексная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1) является эллиптической. Рассмотрим для (1) следующую задачу Шварца [10–12].

Пусть конечная односвязная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ . Требуется найти J -аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = \psi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad (2)$$

где $\psi(\xi) \in C(\Gamma)$ — заданная вещественная функция.

Определение [10]. Ядром задачи Шварца в области D называется линейное пространство решений задачи Шварца с однородным краевым условием

$$\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

Как показано в [10], разрешимость задачи (2) в классах Гёльдера тесно связана со структурой ядра задачи Шварца. Настоящая статья посвящена вычислению размерности и структуры ядра в произвольном эллипсе для двумерных диагоналируемых матриц $J \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Очевидными решениями задачи (3) являются постоянные векторы $\phi = ic$, $c \in \mathbb{R}^{\ell}$, которые принято называть *тривиальными*, или *постоянными решениями*. Если ядро состоит только из вектор-констант, то его назовём *тривиальным*. Как известно [2], при $\ell = 1$ решения однородной задачи (3) только постоянные, но при $\ell \geq 2$ это не так. Приведём пример.

Пример 1. Пусть $\ell = 2$,

$$J = \begin{pmatrix} 10i & -49/3 \\ -27/7 & -6i \end{pmatrix}, \quad \phi_3(z) = \begin{pmatrix} -6x(x^2 + y^2 - 1) + (-20y^3 - 12x^2y + 18y)i \\ 54y(x^2 + y^2 - 1)/7 + (-24x^3/7 + 18x/7)i \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица J имеет разные собственные числа: $\lambda = 3i$, $\mu = i$. Вектор-полином третьей степени $\phi_3(z)$ — функция, J -аналитическая с данной матрицей J . Имеем $\operatorname{Re} \phi_3(z)|_{\Gamma} = 0$ на единичной окружности $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$. В п. 5 будет показано, что $\phi_3(z)$ — единственный нетривиальный элемент ядра задачи Шварца для функций, аналитических по Дуглису с данной матрицей J в единичном круге.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть вещественные параметры $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ — полуоси эллипса Γ , $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол между полуосью эллипса длиной r_1 и направлением оси Ox , измеряемый в положительном направлении обхода. Как известно, параметризацию $\omega(t)$ эллипса Γ с центром в начале координат можно записать в следующем виде:

$$\Gamma: \omega(t) = \begin{cases} x(t) = r_1 \cos \alpha \cos t - r_2 \sin \alpha \sin t, \\ y(t) = r_1 \sin \alpha \cos t + r_2 \cos \alpha \sin t, \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi). \quad (4)$$

Будем называть *эллипсом* как кривую Γ с параметризацией (4), так и область K , ограниченную кривой Γ , в зависимости от контекста. Также договоримся для краткости вместо термина “вектор-полином” в некоторых случаях писать “полином”. Будем называть *задачей Шварца для матрицы J* задачу Шварца для функций, J -аналитических с данной матрицей J . Под *ядром задачи Шварца в эллипсе Γ* будем понимать ядро задачи Шварца в области K с границей Γ .

Замечание 1. Сделаем замену переменных $x' = x + x_0$, $y' = y + y_0$. Несложно показать, что функция $\phi(x', y')$ будет аналитической по Дуглису с той же матрицей J , что и функция $\phi(x, y)$. Отсюда следует, что ядро задачи Шварца в эллипсе $x'(t) = x(t) + x_0$, $y'(t) = y(t) + y_0$ с центром в точке (x_0, y_0) совпадает с ядром задачи Шварца в эллипсе (4) с центром в нуле, поэтому всюду ниже будем рассматривать только эллипсы с центром в начале координат.

Пусть $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $\operatorname{Im} \mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$, $r_1, r_2 > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Обозначим

$$\begin{aligned} a &:= a(\alpha, \lambda, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos \alpha + ir_2 \sin \alpha + \lambda(r_1 \sin \alpha - ir_2 \cos \alpha)}{2}, \\ b &:= b(\alpha, \lambda, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos \alpha - ir_2 \sin \alpha + \lambda(r_1 \sin \alpha + ir_2 \cos \alpha)}{2}, \\ a_1 &:= a_1(\alpha, \mu, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos \alpha + ir_2 \sin \alpha + \mu(r_1 \sin \alpha - ir_2 \cos \alpha)}{2}, \\ b_1 &:= b_1(\alpha, \mu, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos \alpha - ir_2 \sin \alpha + \mu(r_1 \sin \alpha + ir_2 \cos \alpha)}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Лемма 1 [13]. Пусть в соотношениях (5) $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $\operatorname{Im} \mu > 0$. Тогда имеют место неравенства

$$\left| \frac{b}{a} \right| < 1, \quad \left| \frac{b_1}{a_1} \right| < 1. \quad (6)$$

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — собственные векторы 2×2 -матрицы J с диагональной жордановой формой $J_1 = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$, где $\lambda \neq \mu$. Таким образом, столбцы матрицы $Q = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\det Q \neq 0$, образуют жорданов базис матрицы J . Следуя [11], определим вещественный параметр $l = l(J)$ как функцию векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$:

$$l := l(J) = \left| \frac{\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right|, \quad l \in \mathbb{R}, \quad l \geq 0. \quad (7)$$

Справедлива следующая лемма, в силу которой параметр $l(J)$ определён корректно.

Лемма 2. Число $l(J)$ (7) не зависит от выбора жорданова базиса матрицы J . Кроме того, это число инвариантно относительно вещественных преобразований, т.е. оно совпадает для матриц J и BJB^{-1} , где $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Доказательство. Собственные векторы матрицы J определены с точностью до комплексного множителя, поэтому пусть столбцы матрицы $Q^* = (a\mathbf{x}, b\mathbf{y})$, где числа $a, b \neq 0$, образуют другой жорданов базис матрицы J . Обозначим через l^* параметр (7), вычисляемый по жорданову базису Q^* :

$$l^* = \left| \frac{\det(a\mathbf{x}, \bar{b}\mathbf{y})}{\det(a\mathbf{x}, b\mathbf{y})} \right| = \left| \frac{a\bar{b} \det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{ab \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right| = \left| \frac{a\bar{b}}{ab} \right| \left| \frac{\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right| = l,$$

что доказывает независимость $l(J)$ от жорданова базиса.

Докажем инвариантность $l(J)$ относительно вещественных преобразований. Так как векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — собственные для матрицы J , то $J\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $J\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$. Эти два равенства запишем в следующем эквивалентном виде: $BJB^{-1}B\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$, $BJB^{-1}B\mathbf{y} = \mu B\mathbf{y}$. Таким образом, $Q^* = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') = (B\mathbf{x}, B\mathbf{y})$ — жорданов базис матрицы $J^* = BJB^{-1}$. Эта матрица подобна матрице J и поэтому имеет те же собственные числа λ , μ . Обозначим, как и выше, через l^* параметр (7), вычисляемый по жорданову базису матрицы Q^* матрицы J^* . Тогда

$$l^*(J^*) = \left| \frac{\det(B\mathbf{x}, \bar{B}\mathbf{y})}{\det(B\mathbf{x}, B\mathbf{y})} \right| = \left| \frac{\det(B\mathbf{x}, \bar{B}\mathbf{y})}{\det(B\mathbf{x}, B\mathbf{y})} \right| = \left| \frac{\det[B \cdot (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})]}{\det[B \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y})]} \right| = \left| \frac{\det B \cdot \det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det B \cdot \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right| = l(J).$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В работе [11] показано, что параметр $l(J)$ (7) выражается через коэффициенты матрицы J и её собственные числа λ, μ следующим образом:

$$l(J) = \frac{|2i \operatorname{Im}(a_{11}\bar{a}_{21}) + \bar{\mu}a_{21} - \lambda\bar{a}_{21}|}{|(\mu - \lambda)a_{21}|}, \quad a_{21} \neq 0, \quad \lambda \neq \mu;$$

$$l(J) = \frac{|2i \operatorname{Im}(a_{22}\bar{a}_{12}) + \bar{\mu}a_{12} - \lambda\bar{a}_{12}|}{|(\mu - \lambda)a_{12}|}, \quad a_{12} \neq 0, \quad \lambda \neq \mu.$$

Ниже будет использована следующая

Теорема 1 [11, 13]. Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ имеет разные собственные числа λ, μ , где $\operatorname{Im} \lambda > 0, \operatorname{Im} \mu > 0$; числа a, b, a_1, b_1 для эллипса Γ (4) найдены по формулам (5); параметр $l = l(J)$ определён по формуле (7). Пусть также выполнены следующие соотношения:

$$\Delta_n := \Delta_n(l) = l^2 \left| \frac{b^n}{a^n} - \frac{\bar{b}_1^n}{\bar{a}_1^n} \right|^2 - \left| 1 - \frac{b^n}{a^n} \frac{\bar{b}_1^n}{\bar{a}_1^n} \right|^2 \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Тогда в эллипсе K с границей Γ ядро задачи Шварца в классе J -аналитических функций $\phi(z) \in H^\sigma(\bar{K})$, $0 < \sigma < 1$, тривиально.

В [11] показано, что если $l \in [0, 1]$, то все соотношения (8) выполняются при любых значениях (5), т.е. ядро задачи Шварца тривиально, причём в произвольном эллипсе. Однако более сложный случай $l > 1$ ранее рассмотрен не был, его и исследуем ниже.

Приведём ещё два утверждения, которые будут использованы.

Теорема 2 [12]. Пусть все собственные числа диагонализируемой матрицы J лежат в верхней полуплоскости. Тогда ядро задачи Шварца в произвольном эллипсе Γ конечномерно и состоит только из вектор-полиномов.

Теорема 3 [11, 13]. Пусть согласно (7) $l_0 = l(J)$. Тогда существование в эллипсе K с границей Γ решения однородной задачи Шварца (3) в виде J -аналитического вектор-полинома $\phi_n(z)$ степени n равносильно условию $\Delta_n(l_0) = 0$. При этом вектор-полином $\phi_n(z)$ является единственным с точностью до вещественного множителя.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СООТНОШЕНИЯ (8) И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

Выразим с учётом (8) формально параметр l из уравнения $\Delta_n(l) = 0$:

$$l = l_{n,\beta} = \frac{\left| 1 - \frac{b^n}{a^n} \frac{\bar{b}_1^n}{\bar{a}_1^n} \right|}{\left| \frac{b^n}{a^n} - \frac{\bar{b}_1^n}{\bar{a}_1^n} \right|}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Параметр β будет определён ниже в (12). С учётом неравенств (6) обозначим

$$\xi := \frac{b}{a} = |\xi|e^{it_1}, \quad \zeta := \frac{b_1}{a_1} = |\zeta|e^{it_2}, \quad 0 \leq |\xi| < 1, \quad 0 \leq |\zeta| < 1. \quad (10)$$

Преобразуем (9), используя обозначения (10):

$$l_{n,\beta} = \frac{|1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in(t_1 - t_2)}|}{||\xi|^n e^{int_1} - |\zeta|^n e^{int_2}||} = \frac{|1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in(t_1 - t_2)}|}{|e^{int_1}| ||\xi|^n - |\zeta|^n e^{in(t_2 - t_1)}||} = \frac{|1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in\beta}|}{||\xi|^n - |\zeta|^n e^{-in\beta}|}, \quad (11)$$

$$\beta = t_1 - t_2 = \arg \xi - \arg \zeta = \arg \left(\frac{b}{a} \right) - \arg \left(\frac{b_1}{a_1} \right). \quad (12)$$

Далее преобразуем равенство (11) к более удобному для изучения виду, используя известную из курса элементарной математики теорему.

Теорема 4. Пусть x, y — длины двух сторон треугольника ABC и $\alpha \in (0, \pi]$ — угол между этими сторонами. Тогда длина третьей стороны z треугольника ABC вычисляется по формуле $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}$. Данное утверждение справедливо и в предельном случае $\alpha = \pi$.

Рассмотрим числитель последней дроби в (11). Пусть сторона x треугольника ABC имеет длину $x = 1$ и лежит на оси Ox . Пусть сторона y имеет длину $y = |\xi|^n |\zeta|^n$ и образует со стороной x угол $n\beta$. Тогда модуль вектора (комплексного числа) $\chi = 1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in\beta}$ равен длине третьей стороны z треугольника ABC . Аналогично для знаменателя. Поэтому с учётом теоремы 4 можем записать (11) в следующем виде:

$$l_{n,\beta}^2 = l_{n,\beta}^2(\xi, \zeta) := \frac{|1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in\beta}|^2}{| |\xi|^n - |\zeta|^n e^{-in\beta} |^2} = \frac{1 + |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos(n\beta)}{|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos(n\beta)}. \quad (13)$$

Изучение ядра задачи Шварца в пп. 4 и 5 основано на анализе выражения (13), а в некоторых случаях — выражения (8).

Замечание 2. В пп. 3 и 4 рассмотрен случай $\xi, \zeta \neq 0$, $|\xi| > |\zeta|$, который является наиболее общим, поэтому в силу (9) и (11) знаменатель в (13) не равен нулю.

Изучим соотношение (13). Введём следующую вспомогательную функцию, которая отличается от (13) формальной заменой постоянной величины $n\beta$ на переменную t :

$$l_{n,t}^2 = \frac{1 + |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t}{|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t}. \quad (14)$$

Вычислим частную производную функции (14) по t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{n,t}^2}{\partial t} &= \frac{2|\xi|^n |\zeta|^n \sin t (|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t)}{(|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t)^2} - \frac{2(1 + |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t) |\xi|^n |\zeta|^n \sin t}{(|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos nt)^2} = \\ &= \frac{2|\xi|^n |\zeta|^n (|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 1 - |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n}) \sin t}{(|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим выражение в круглых скобках в числителе последней дроби в (15):

$$|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 1 - |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n} = (1 - |\zeta|^{2n})(|\xi|^{2n} - 1) < 0, \quad |\xi|, |\zeta| \in (0, 1). \quad (16)$$

В силу (16) знак частной производной (15) противоположен знаку $\sin t$, т.е.

$$\frac{\partial l_{n,t}^2}{\partial t} < 0, \quad t \in (0, \pi); \quad \frac{\partial l_{n,t}^2}{\partial t} > 0, \quad t \in (\pi, 2\pi). \quad (17)$$

Пусть $|\xi| > |\zeta|$. Тогда ввиду (15) и (17) при фиксированных значениях ξ, ζ, n имеем

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} l_{n,t} = l_{n,t}|_{t=\pi} = \frac{1 + |\xi|^n |\zeta|^n}{|\xi|^n + |\zeta|^n}, \quad \max_{t \in [0, 2\pi]} l_{n,t} = l_{n,t}|_{t=0} = \frac{1 - |\xi|^n |\zeta|^n}{|\xi|^n - |\zeta|^n}. \quad (18)$$

Формулы (18) будут использованы в п. 4. Докажем также следующее вспомогательное утверждение (не вытекающее из (18)).

Лемма 3. Пусть вещественные числа $\xi, \zeta \in (0, 1)$, причём $\xi > \zeta$. Пусть также для некоторого $m > 0$ справедливо соотношение

$$\xi(1 - \xi^m) > \zeta(1 + \zeta^m). \quad (19)$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{1 + \xi^{n+m+x} \zeta^{n+m+x}}{\xi^{n+m+x} + \zeta^{n+m+x}} > \frac{1 - \xi^n \zeta^n}{\xi^n - \zeta^n}. \quad (20)$$

Доказательство. Числитель преобразованного неравенства (20) имеет вид

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^{n+m+x} \zeta^{n+m+x})(\xi^n - \zeta^n) - (1 - \xi^n \zeta^n)(\xi^{n+m+x} + \zeta^{n+m+x}) = \\ & = \xi^n - \zeta^n + \xi^{2n+m+x} \zeta^{n+m+x} - \xi^{n+m+x} \zeta^{2n+m+x} - \xi^{n+m+x} + \xi^{2n+m+x} \zeta^n - \zeta^{n+m+x} + \xi^n \zeta^{2n+m+x} = \\ & = \xi^n(1 - \xi^{m+x}) + \xi^n \zeta^{2n+m+x}(1 - \xi^{m+x}) + \zeta^n \xi^{2n+m+x}(1 + \zeta^{m+x}) - \zeta^n(1 + \zeta^{m+x}) > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как $\xi, \zeta \in (0, 1)$, то в силу (19) для выполнения (21), т.е. для выполнения (20), достаточно условия

$$\xi^n(1 - \xi^{m+x}) - \zeta^n(1 + \zeta^{m+x}) > 0. \quad (22)$$

Так как $\xi > \zeta$, то для выполнения (22), в свою очередь, достаточно условия

$$\xi(1 - \xi^{m+x}) - \zeta(1 + \zeta^{m+x}) > 0. \quad (23)$$

Обозначив через $g(x)$ левую часть (23), при $\xi, \zeta \in (0, 1)$ имеем

$$\frac{dg}{dx} = -\xi^{m+1+x} \ln \xi - \zeta^{m+1+x} \ln \zeta > 0, \quad \ln \xi < 0, \quad \ln \zeta < 0. \quad (24)$$

Согласно (24) функция $g(x)$ возрастает при $x > 0$. Поэтому если неравенство (23) верно при $x = 0$, то оно верно и для всех $x > 0$. Но (23) при $x = 0$ — это неравенство (19). Следовательно, (19) — достаточное условие для выполнения (22), т.е. и для выполнения (20). Лемма доказана.

4. РАЗМЕРНОСТЬ И СТРУКТУРА ЯДРА. ПРИМЕРЫ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Построения, выполненные в пп. 2 и 3, используем для изучения структуры ядра задачи Шварца в эллипсе Γ . Пусть для данной матрицы J вычислен параметр $l_0 = l(J)$ согласно (7). Рассмотрим функцию $l_{n,\beta}$ (13). Согласно (5), (10) и (12) данному эллипсу однозначно соответствуют некоторые параметры ξ, ζ, β . Пусть число n_1 таково, что выполнены следующие соотношения:

$$l_{n_1,\beta} \geq l_0, \quad l_{k,\beta} \neq l_0, \quad k < n_1. \quad (25)$$

Замечание 3. В (25) возможен случай, когда $l_{k,\beta} > l_0$ при $k < n_1$. Таким образом, число n_1 определено неоднозначно. Однако здесь принципиально именно условие $l_{k,\beta} \neq l_0$ при $k < n_1$. Кроме того, число n_1 , удовлетворяющее (25), существует. Действительно, в силу (13) при фиксированных значениях ξ, ζ, β имеем $l_{n,\beta} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Пусть, как и ранее, матрица J имеет разные собственные числа λ, μ , лежащие выше вещественной оси. С учётом обозначения (25) докажем следующее утверждение.

Теорема 5 (верхняя оценка размерности ядра). Пусть числа $\xi, \zeta \neq 0$, где $|\xi| > |\zeta|$, определены формулами (10), (5). Тогда размерность ядра задачи Шварца для данной матрицы J в эллипсе Γ (4) не превосходит минимального значения $m \in \mathbb{N}$, при котором выполняется неравенство

$$|\xi|(1 - |\xi|^m) > |\zeta|(1 + |\zeta|^m). \quad (26)$$

Замечание 4. Неравенство (26) будет выполняться при достаточно больших значениях m , так как $|\xi| > |\zeta|$, где $|\xi|, |\zeta| \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 5. Пусть m — некоторое число, при котором справедливо неравенство (26). Пусть число n_1 удовлетворяет (25) и пусть $x > 0$. Выпишем следующую цепочку соотношений, бинарные операции между которыми занумеруем по порядку:

$$\begin{aligned} l_{n_1+m+x, \beta} &\stackrel{[1]}{=} l_{n, t}|_{t=(n_1+m+x)\beta} \stackrel{[2]}{\geq} \min_{t \in [0, 2\pi]} l_{n_1+m+x, t} \stackrel{[3]}{=} \frac{1 + |\xi|^{n_1+m+x} |\zeta|^{n_1+m+x}}{|\xi|^{n_1+m+x} + |\zeta|^{n_1+m+x}} \stackrel{[4]}{>} \\ &\stackrel{[4]}{>} \frac{1 - |\xi|^{n_1} |\zeta|^{n_1}}{|\xi|^{n_1} - |\zeta|^{n_1}} \stackrel{[5]}{=} l_{n_1, t}|_{t=0} \stackrel{[6]}{=} \max_{t \in [0, 2\pi]} l_{n_1, t} \stackrel{[7]}{\geq} l_{n_1, t}|_{t=n\beta} \stackrel{[8]}{=} l_{n_1, \beta} \stackrel{[9]}{\geq} l_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Равенства [1] и [8] в (27) вытекают из (13) и (14). Неравенства [2] и [7] следуют из 2π -периодичности функции (14). Равенство [3] доказано в (18). Согласно (10) и условию теоремы имеем $|\xi|, |\zeta| \in (0, 1)$, поэтому строгое неравенство [4] справедливо ввиду леммы 3, неравенств (26) и (20). Равенство [5] вытекает из (14), [6] доказано в (18). Неравенство [9] записано согласно (25). Тем самым в (27) доказано соотношение

$$l_{n_1+m+x, \beta} > l_0, \quad x > 0. \quad (28)$$

Пусть согласно (7) число $l(J) = l_0$. В силу определения (9) равенства $l_{n, \beta} = l_0$ и $\Delta_n(l_0) = 0$ равносильны. Поэтому с учётом теоремы 3 наличие в ядре (единственного) вектор-полинома степени n равносильно условию $l_{n, \beta} = l_0$. Но из (28) в силу произвольности $x > 0$ и из (25) следует, что равенство $l_{n_1+k, \beta} = l_0$ возможно только для значений $k = \overline{0, m-1}$. Количество таких значений не превосходит m , поэтому ввиду теорем 2 и 3 размерность ядра задачи Шварца в данном эллипсе Γ также не превосходит m . В наших рассуждениях число m , для которого справедливо неравенство (26), было выбрано произвольно, поэтому, не умаляя общности, его можно считать минимальным. Теорема доказана.

Критерий (26) не требует вычисления значения n_1 в (25), что делает его удобным для оценки размерности ядра сверху. Однако если число n_1 в (25) известно, то неравенство (26) можно заменить на более слабое неравенство, что упростит нахождение m . Здесь имеет место следующее утверждение, при доказательстве которого используются схемы доказательств леммы 3 и теоремы 5.

Теорема 6 (альтернативная оценка размерности ядра и его структура). Пусть числа $\xi, \zeta \neq 0$, где $|\xi| > |\zeta|$, определены формулами (10), (5) и пусть известно число n_1 , удовлетворяющее (25). Тогда

1) размерность ядра задачи Шварца не превосходит минимального значения $m \in \mathbb{N}$, при котором выполняется более слабое, чем (26), неравенство

$$|\xi|^{n_1} (1 - |\xi|^m) > |\zeta|^{n_1} (1 + |\zeta|^m); \quad (29)$$

2) в ядро могут входить только полиномы степеней $n_1 + k$, где $k = \overline{0, m-1}$.

Доказательство. Пусть m — некоторое число, при котором справедливо неравенство (29). Здесь выполнены условия теоремы 5, поэтому используем схему её доказательства. Заметим, что при доказательстве соотношений (27) применяется неравенство (20), которое вытекает из (22). Обозначим через $h(x)$ левую часть (22). Тогда имеем

$$\frac{dh}{dx} = -\xi^{m+n+x} \ln \xi - \zeta^{m+n+x} \ln \zeta > 0, \quad \ln \xi < 0, \quad \ln \zeta < 0.$$

Таким образом, если неравенство (22) верно при $x = 0$, то оно верно и для всех $x > 0$. Но (22) при $x = 0$ совпадает с (29) с точностью до обозначения $n = n_1$, т.е. из (29) вытекает

(22) для всех $x > 0$, а значит, и (20) для произвольного $x > 0$. Таким образом, из (29) по схеме доказательства теоремы 5 следует справедливость п. 1). Поскольку число m , удовлетворяющее (29), выбрано произвольно, то его можно взять минимальным.

Как было отмечено в завершении доказательства теоремы 5, равенство $l_{n_1+k, \beta} = l_0$ возможно только для значений $k = \overline{0, m-1}$. Кроме того, в силу (9) равносильны условия $l_{n, \beta} = l_0$ и $\Delta_n(l_0) = 0$, поэтому с учётом теоремы 3 полиномы ядра могут иметь только степени $n_1 + k$, $k = \overline{0, m-1}$, что доказывает п. 2). Теорема доказана.

Замечание 5. Из п. 2) теоремы 6 вовсе не следует, что ядро имеет размерность, равную именно m . Для вычисления его структуры нужно найти значения $l_{n_1+k, \beta}$ для всех $k = \overline{0, m-1}$, где m удовлетворяет (29). Если окажется, что все $l_{n_1+k, \beta} \neq l_0$, то ядро тривиально. Если же $l_{n_1+r, \beta} = l_0$, то ядро содержит, в частности, один вектор-полином степени $n_1 + r$.

Пусть $l(J) = l_0$. Очевидным следствием из теоремы 6 является следующее утверждение.

Лемма 4 (достаточные условия одномерности и тривиальности ядра). Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда если в (25) $l_{n_1, \beta} = l_0$ и в (29) $m = 1$, то ядро одномерно. Если же в (25) $l_{n_1, \beta} > l_0$ и в (29) $m = 1$, то ядро тривиально.

Доказательство. Равенство $l_{n_1, \beta} = l_0$ ввиду (9) означает, что $\Delta_{n_1}(l_0) = 0$. Отсюда согласно теореме 3 ядро содержит один вектор-полином $\phi_{n_1}(z)$ степени n_1 , который в силу теоремы 2 и п. 2) теоремы 6 при $m = 1$ является единственным элементом ядра.

Строгое неравенство $l_{n_1, \beta} > l_0$ означает согласно (25), что $l_{k, \beta} \neq l_0$ при $k \leq n_1$. Отсюда следует, что $\Delta_k(l_0) \neq 0$ при $k \leq n_1$. Поэтому в силу теоремы 3 в ядро могут входить только полиномы степени больше n_1 . Но согласно теореме 6 при $m = 1$ в ядро входят полиномы степени не выше $n_1 + (m - 1) = n_1$. Противоречие доказывает тривиальность ядра. Лемма доказана.

Для упрощения вычисления ядра задачи Шварца в конкретных случаях используем приведённые ниже леммы.

Лемма 5 [14]. Обозначим $J = A + Bi$, где A, B — вещественные матрицы. Утверждается, что ядро задачи Шварца содержит вектор-полином $\phi_1(z)$ первой степени тогда и только тогда, когда $\det B = 0$. В этом случае $\operatorname{Re} \phi_1(z) \equiv 0$.

Лемма 5 означает, что если $\det B \neq 0$, то $l_{1, \beta} \neq l_0$. Действительно, в противном случае в силу определения (9) функции $l_{n, \beta}$ имеем $\Delta_1(l_0) = 0$. Отсюда, согласно теореме 3, однородная задача Шварца имеет решение в виде вектор-полинома первой степени, что противоречит утверждению леммы 5.

Тем самым доказана

Лемма 6. Пусть $J = A + Bi$, где $\det B \neq 0$. Тогда в (25) и, соответственно, в (29) число $n_1 \geq 2$.

В качестве иллюстрации к леммам 4–6 приведём два примера.

Пример 2. Пусть

$$\phi_2(z) = \begin{pmatrix} -3(x^2 + 2y^2)i \\ x^2 + 8y^2 - 4 - 4xyi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 2 & 4i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Матрица J в (30) имеет разные собственные числа $\lambda = i$, $\mu = 2i$, при этом $\operatorname{Re} \phi_2(z)|_{\Gamma_1} = 0$ на эллипсе $\Gamma_1: x^2 + 8y^2 = 4$. Записав эллипс Γ_1 в каноническом виде, согласно (4) имеем $r_1 = 2$, $r_2 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha = 0$. Найдём числа ξ , ζ , β по формулам (5), (10) и (12) при $\lambda = i$, $\mu = 2i$:

$$\xi = \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, \quad \xi > \zeta, \quad \beta = \arg \xi - \arg \zeta = 0. \quad (31)$$

Собственные векторы матрицы J (30) имеют вид $\mathbf{x}_i = (3, 2i)$, $\mathbf{y}_{2i} = (1, i)$ для собственных чисел $\lambda = i$, $\mu = 2i$ соответственно. По формуле (7) число $l(J) = l_0 = 5$.

Непосредственная подстановка в (13) чисел ξ, ζ, β (31) при $n=2$ даёт то же значение $l_{2,0}=5$. Кроме того, $\det B = -4 \neq 0$. Поэтому в силу (25) и леммы 6 можно взять число $n_1=2$ (это число согласно замечанию 3 определено неоднозначно).

Как показывают вычисления (их не приводим), неравенство (29) выполнено для чисел ξ, ζ (31) при $n_1=2, m=1$. Отсюда, согласно лемме 4, следует, что ядро задачи Шварца для матрицы J (30) в эллипсе Γ_1 содержит только один нетривиальный элемент $\phi_2(z)$, определённый в (30).

Пример 3. Пусть $\phi_2(z), J, B$ определены в (30), эллипс Γ_2 задан уравнением

$$\Gamma_2: x^2/9 + y^2/4 = 1. \quad (32)$$

Здесь $r_1=3, r_2=2, \alpha=0$.

Согласно (5), (10) и (12) при $\lambda=i, \mu=2i$ имеем

$$\xi=1/5, \quad \zeta=-1/7, \quad |\xi| > |\zeta|, \quad \beta = \arg \xi - \arg \zeta = 0 - \pi = -\pi. \quad (33)$$

Как и в примере 2, здесь $l(J)=l_0=5$. Подстановка чисел ξ, ζ, β из (33) в (13) при $n=2$ даёт неравенство

$$l_{2,\beta} = l_{2,0} = 51 > 5 = l_0.$$

Поскольку $\det B \neq 0$, то согласно (25) и лемме 6 можно положить $n_1=2$.

В свою очередь, подстановка чисел ξ, ζ (33) в неравенство (29) при $n_1=2, m=1$ даёт верное неравенство

$$\frac{8}{250} > \frac{8}{343}.$$

Таким образом, согласно лемме 4 ядро задачи Шварца для матрицы J (30) в эллипсе Γ_2 (32) тривиально.

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

В п. 4 были существенно использованы условия $\xi, \zeta \neq 0, |\xi| > |\zeta|$. Они выполняются почти для всех матриц и эллипсов. Однако есть исключения. Рассмотрим два случая, которые не подходят под эти условия.

1. Пусть $\xi=0, \zeta \neq 0$. Тогда согласно (8) и (10) имеем $\Delta_n(l) = l^2|\zeta|^{2n} - 1$. Так как данная функция строго убывающая по n при фиксированном $|\zeta| \in (0, 1)$, то равенство

$$\Delta_n(l_0) = l_0^2|\zeta|^{2n} - 1 = 0 \quad (34)$$

может иметь место только при одном значении n . Напомним, что параметры ξ, ζ находим по эллипсу Γ и собственным числам матрицы J . Пусть матрица J такова, что $l(J) = l_0 = |\zeta|^{-n}$. Тогда согласно (34) $\Delta_n(l_0) = 0$. В этом случае с учётом теорем 2 и 3 ядро задачи Шварца в эллипсе Γ состоит из одного вектор-полинома степени n . Если же $l_0 \neq |\zeta|^{-n}, n \in \mathbb{N}$, что несложно доказать, то в силу тех же двух теорем ядро тривиально.

В примере 1 число $\xi=0, \zeta=1/2, l_0=l(J)=8$. Для $n=3$ имеем

$$l_0 = 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = |\zeta|^{-n}.$$

Таким образом, в примере 1 вектор-полином третьей степени $\phi_3(z)$ является единственным нетривиальным элементом ядра.

2. Пусть $\xi=\zeta$. Тогда согласно (8) и (10) имеем $\Delta_n(l) \equiv -|1 - |\xi|^{2n}|^2 \neq 0, n \in \mathbb{N}$, так как $|\xi| \in [0, 1)$. Поэтому в силу теорем 2 и 3 ядро тривиально.

Случай $\xi \neq \zeta, |\xi|=|\zeta|$ является весьма частным. Однако его рассмотрение требует довольно сложного анализа выражения (13), что выходит за рамки данной статьи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М. : Наука, 1977. — 641 с.
2. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — М. : Наука, 1968. — 513 с.
3. Бицадзе, А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1966. — 202 с.
4. Солдатов, А.П. Функции, аналитические по Дуглису / А.П. Солдатов. — Белгород : Изд-во БелГУ, 2016. — 88 с.
5. Солдатов, А.П. Гипераналитические функции и их приложения / А.П. Солдатов // Совр. математика и ее приложения. — 2004. — Т. 15. — С. 142–99.
6. Vasilyev, V.B. General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations / V.B. Vasilyev // Adv. Differ. Equat. — 2013. — V. 289. — P. 1–7.
7. Vasilyev, V.B. Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries / V.B. Vasilyev // Differ. and Difference Equat. Appl. — 2013. — V. 47. — P. 625–637.
8. Vasilyev, V.B. On some transmission problems in a plane corner / V.B. Vasilyev // Tatra Mt. Math. Publ. — 2015. — V. 63. — P. 291–301.
9. Soldatov, A.P. On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane / A.P. Soldatov // More Progresses in Analysis. Proc. of the 5th Int. ISAAC Congress. 25–30 July 2009. — Catania, Italy, 2009. — V. 2. — P. 1171–1184.
10. Солдатов, А.П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису / А.П. Солдатов // Совр. математика и ее приложения. — 2010. — Т. 67. — С. 99–102.
11. Nikolaev, V. On a certain functional equation and its application to the Schwarz problem / V. Nikolaev, V. Vasilyev // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 12. — Art. 2789.
12. Nikolaev, V.G. Solutions to the Schwarz problem with diagonalizable matrices in ellipse / V.G. Nikolaev // J. Math. Sci. — 2020. — V. 244, № 4. — P. 655–670.
13. Nikolaev, V.G. A class of orthogonal polynomials on the boundary of an ellipse / V.G. Nikolaev // J. Math. Sci. — 2019. — V. 239, № 3. — P. 363–380.
14. Николаев В.Г. Об одном преобразовании задачи Шварца / В.Г. Николаев // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Сер. естественная. — 2012. — Т. 6, № 97. — С. 27–34.

ABOUT THE CORE STRUCTURE OF THE SCHWARTZ PROBLEM FOR FIRST-ORDER ELLIPTIC SYSTEMS ON A PLANE

V. G. Nikolaev

*Novgorod State University, Russia
e-mail: vg14@inbox.ru*

The Schwarz problem for J -analytic functions in an arbitrary ellipse is considered. The matrix J is assumed to be two-dimensional, with different eigenvalues lying above the real axis. An example of a nonconstant solution of the homogeneous Schwarz problem in the form of a vector-polynomial of degree three is given. The numerical parameter l of the matrix J , which is expressed through its eigenvectors, is introduced. After that, one relation derived earlier by the author is analyzed. Based on this analysis, a method for computing the dimension and structure of the kernel of the Schwarz problem in an arbitrary ellipse is obtained. Sufficient conditions for the triviality of the kernel expressed through the ellipse parameters, the eigenvalues of the matrix J and the parameter l are obtained. Examples of one-dimensional and trivial kernels are given.

Keywords: Schwarz problem, kernel, matrix, eigenvalues.

REFERENCES

1. Gahov, F.D., *Kraevie zadachi* (Boundary Value Problems), Moscow: Nauka, 1977.
2. Mushelishvili, N.I., *Singulyarnie integral'nie uravneniya* (Singular Integral Equations), Moscow: Nauka, 1968.
3. Bitsadze, A.V., *Kraevie zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka* (Boundary Value Problems for Elliptic Equations of the Second Order), Moscow: Nauka, 1968.
4. Soldatov, A.P., *Funkziy, analyticheskie po Duglisy* (Douglis Analytic Functions), Belgorod: BSU Press, 2016.
5. Soldatov, A.P., Hyperanalytic functions and their applications, *Modern Math. Appl.*, 2004, vol. 15, pp. 142–199.
6. Vasilyev, V.B., General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations, *Adv. Differ. Equat.*, 2013, vol. 289. pp. 1–7.
7. Vasilyev, V.B., Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries, *Differ. and Difference Equat. Appl.*, 2013, vol. 47. pp. 625–637.
8. Vasilyev, V.B., On some transmission problems in a plane corner, *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2015, vol. 63. pp. 291–301.
9. Soldatov, A.P., On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane, in *More Progresses in Analysis. Proc. of the 5th Int. ISAAC Congress*, Catania, Italy, 25–30 July, 2009, vol. 2, pp. 1171–1184.
10. Soldatov, A.P., The Schwartz problem for Douglis analytic functions, *Modern Math. Appl.*, 2010, vol. 67, pp. 99–102.
11. Nikolaev, V. and Vasilyev, V., On a certain functional equation and its application to the Schwarz problem, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 12, art. 2789.
12. Nikolaev, V.G., Solutions to the Schwarz problem with diagonalizable matrices in ellipse, *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 244, no. 4, pp. 655–670.
13. Nikolaev, V.G., A class of orthogonal polynomials on the boundary of an ellipse, *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 239, no. 3, pp. 363–380.
14. Nikolaev, V.G., On one transformation of the Schwarz problem, *Bull. Samara State Univ.*, 2012, vol. 6, no. 97, pp. 27–34.