

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ТИПИЧНЫЕ ПРОВАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К РЕШЕНИЯМ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

© С. Н. Мелихов¹, Б. И. Сулейманов², А. М. Шавлуков³¹Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону¹Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ^{2,3}Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г. Уфаe-mail: ¹snmelihov@yandex.ru, ²bisul@mail.ru, ³aza3727@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.11.2023 г., после доработки 19.02.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Обоснованы формальные асимптотики, описывающие типичные провальные особенности сборки квазиклассических приближений к решениям двух вариантов интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера $-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} \pm 2|\Psi|^2\Psi$, где ε — малый параметр. При этом использованы идеология и факты математической теории катастроф, а также часть теоремы Ю.Ф. Коробейника, касающаяся аналитических при $h \rightarrow 0$ решений $G(h, u)$ линейного уравнения смешанного типа $hG''_{hh} = G''_{uu}$, которому эквивалентны образы годографа обоих вариантов систем уравнений таких квазиклассических приближений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение газовой динамики, уравнение мелкой воды, асимптотика, теория особенностей, теория катастроф, градиентная катастрофа, провальная особенность, сборка.

DOI: 10.31857/S0374064124050048, EDN: LBMSHZ

1. ВВЕДЕНИЕ. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Система квазиклассического приближения

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x + \alpha(h)h'_x = 0 \quad (1)$$

в применении к решениям нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) с малой дисперсией

$$-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} + K(|\Psi|^2)\Psi \quad (\alpha(h) = -2K'(h), \quad 0 < \varepsilon \ll 1) \quad (2)$$

находится следующим образом: подстановка в НУШ (2) анзаца $\Psi = h^{1/2} \exp\{i\varphi/\varepsilon\}$ даёт систему двух уравнений

$$h'_t + 2(h\varphi'_x)'_x = 0, \quad \varphi'_t + (\varphi'_x)^2 - K(h) = \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{h})''_{xx}}{\sqrt{h}},$$

откуда после дифференцирования второго уравнения по переменной x и замены $v = 2\varphi'_x$ получаем систему

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_h - 2K'(h)h'_x = 2\varepsilon^2 \left(\frac{(\sqrt{h})''_{xx}}{\sqrt{h}} \right)'_x. \quad (3)$$

Переходя в (3) к бездисперсионному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем систему квазиклассического приближения (1) с функцией $\alpha(h) = -2K'(h)$.

Замечание 1. При физически осмысленных значениях $h \geq 0$ система (1) является гиперболической при $\alpha(h) > 0$ и эллиптической при $\alpha(h) < 0$ с линией вырождения $h = 0$. Но с математической точки зрения можно и эллиптический случай рассматривать при $\alpha(h) > 0$, только считая при этом что h меняется в области $h \leq 0$. Именно так мы в этой статье и поступим, предполагая, что в малой окрестности точки $h = 0$ функция $\alpha(h)$ является аналитической и представляется в ней сходящимся рядом

$$\alpha(h) = 4 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h^j. \quad (4)$$

Как в эллиптическом, так и в гиперболическом случаях для решений системы (1) характерны разного рода точки сингулярностей, вблизи которых квазиклассические приближения к решениям (2) теряют пригодность — для правильного описания решений НУШ (2) в окрестностях точек сингулярностей нужно с помощью метода согласования [1] проводить отдельный анализ. Эти характерные сингулярности решений систем (1) анализировались, в частности, в [2–13], где, в отличие от множества других публикаций, посвящённых таким сингулярностям, существенно использован тот факт, что преобразование годографа, при котором переменные t и x рассматриваются как функции $t(h, v)$, $x(h, v)$ независимых переменных v и h , переводит систему (1) в линейную систему

$$x'_h = vt'_h - \alpha(h)t'_v, \quad x'_v = vt'_v - ht'_h. \quad (5)$$

В работах [5–13] для описания сингулярностей квазиклассических приближений (1) применяется подход, берущий своё начало от пионерской статьи А.Х. Рахимова [14], в которой анализировались типичные с точки зрения математической теории катастроф [15–20] сингулярности решений общей квазилинейной гиперболической 2×2 -системы

$$U'_t + A(U, t, x)U'_x = \Phi(U, t, x), \quad (6)$$

где $U = (u_1, u_2)$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — вектор-функции, $A(U, t, x)$ — 2×2 -матрица с двумя различными вещественными собственными значениями λ, μ (в предположении, что зависимость этих собственных значений от инвариантов Римана $r = r(U, t, x)$, $l = l(U, t, x)$ системы (6) удовлетворяет неравенству $\lambda'_r \lambda'_l \mu'_r \mu'_l \neq 0$). Суть данного подхода в применении к решениям системы (1) состоит в следующем.

Решения линейной системы (5) посредством соотношений

$$t = B'_v, \quad x = -B - hB'_h + vB'_v \quad (7)$$

могут быть выражены [3] через решения $B(h, v)$ скалярного уравнения

$$hB''_{hh} + 2B'_h = \alpha(h)B''_{vv}, \quad (8)$$

которое является гиперболическим при $h > 0$ и эллиптическим при $h < 0$. Поэтому обращение при конечных значениях $h = h_*$, $v = v_*$ и $t = t_*$, $x = x_*$ в нуль якобиана

$$J = x'_h t'_v - t'_h x'_v = h(t'_h)^2 - \alpha(h)(t'_v)^2 = h(B''_{hv})^2 - \alpha(h)(B''_{vv})^2 \quad (9)$$

отображений $(h, v) \rightarrow (t, x)$, определяемых через локально гладкие решения уравнения (8) формулами (7), сопровождается градиентной катастрофой — обращением в бесконечность производных $h'_x(t_*, x_*)$, $v'_x(t_*, x_*)$ и $h'_t(t_*, x_*)$, $v'_t(t_*, x_*)$ решений уравнений квазиклассического приближения (1). Согласно идеологии теории катастроф [18] для описания подобных

сингулярностей общего положения можно и нужно использовать лишь разложения в ряды Тейлора гладких в точках (h_*, v_*) решений $B(h, v)$ уравнения (8):

$$B = b_{00} + \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij}(h-h_*)^i(v-v_*)^j,$$

на коэффициенты b_{ij} которых помимо связей, диктуемых конкретным видом этого дифференциального уравнения, накладывается не более двух ограничений (по той причине, что катастрофы, отвечающие особенностям гладкого отображения (7), зависят лишь от двух так называемых [18] *управляющих* параметров — в данном случае от параметров t и x).

Оказалось, что с точки зрения описанного выше подхода в гиперболическом случае для множества решений (1) типичны ровно три особенности, связанные с обращением в нуль якобиана (9) (для более широкого множества решений квазилинейной гиперболической системы (6) аналогичный вывод был сделан А.Х. Рахимовым ещё в [14]). В области же эллиптичности решений (1) типична лишь одна такая особенность, описанная в [8]. При $h_* > 0$ все эти четыре особенности наследуются из типичных особенностей решений линеаризаций

$$h'_t + h_*v'_x + v_*h'_x = 0, \quad v'_t + v_*v'_x \pm 4h'_x = 0 \quad (10)$$

систем (1): при нулевых значениях управляющих параметров ростки отображений, описывающих данные типичные особенности решений системы (1), совпадают [13] с ростками отображений, отвечающих всем типичным особенностям решений линейных уравнений $u''_{TT} \mp u''_{XX} = 0$, которым эквивалентны линеаризации (10) — это ростки в нуле функций $A_\mu: w^{\mu+1}$ ($\mu = 2, 3$) и $D_4^\pm: w^2z \pm z^3$.

Но в работах [5, 12] было показано, что типичные с точки зрения теории особенностей дифференцируемых отображений градиентные катастрофы с решениями (1) происходят и в точках (h_*, v_*) с компонентой $h_* = 0$. Эти провальные сингулярности, связанные с особенностью типа сборки, из решений линейных уравнений не наследуются. В данной статье, посвящённой таким сингулярностям, получены следующие новые результаты.

1. В случае $\alpha(h) \equiv 4$ уравнения (1) принимают вид системы

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x + 4h'_x = 0, \quad (11)$$

которая в области $h \geq 0$ совпадает с уравнениями мелкой воды (точнее, сводится к ним простыми растяжениями). Эта система при неотрицательных (неположительных) значениях h описанным выше образом задаёт квазиклассические приближения к интегрируемому (методом обратной задачи рассеяния) дефокусирующему НУШ $-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} - 2|\Psi|^2\Psi$ (фокусирующему НУШ $-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi$). Именно для системы (11) в данной статье будет строго обосновано существование её решений с типичными в смысле математической теории катастроф провальными асимптотиками, которые ранее на эвристическом уровне строгости для более общих систем (1) были рассмотрены в работах [5, 12].

2. В п. 2 описаны полные формальные провальные асимптотики решений этих более общих систем, при этом факты и построения излагаются методологически последовательнее и чётче, чем в [5, 12], к тому же устранён ряд мелких, но досадных опечаток в текстах [5, 12]. Эти асимптотики в данной статье обоснованы лишь для случая системы (11).

3. Помимо фактов математической теории катастроф соответствующее обоснование существенным образом опирается на частный случай теоремы Ю.Ф. Коробейника [21, § 1]. Подробное доказательство этой теоремы, возможно, нигде не было опубликовано, но авторам доказательство справедливости утверждения, актуального для данной статьи, этого частного случая теоремы Ю.Ф. Коробейника удалось получить независимо (см. п. 3).

2. ФОРМАЛЬНЫЕ ПРОВАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ

Для описания типичных с точки зрения теории катастроф формальных провальных асимптотик решений систем (1) будем использовать гладкие в окрестностях точек $(h=0, v=v_*)$ решения линейного уравнения (8), разлагающиеся в этих точках в ряды Тейлора:

$$B(h, v) = b_{00} + \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} h^i (v - v_*)^j. \quad (12)$$

Все коэффициенты данного ряда однозначно выражаются через коэффициенты b_{0j} разложения в ряд Тейлора в точке $v = v_*$ функции

$$B_0(v) = B(0, v) = b_{00} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{0j} (v - v_*)^j. \quad (13)$$

Действительно, все коэффициенты ряда $B = \sum_{j=0}^{\infty} h^j B_j(v)$ решения уравнения (8) через его главный член $B_0(v)$ рекуррентно находятся по формулам

$$B_1(v) = 2(B_0)''(v), \quad B_2(v) = \frac{2(B_1)''(v)}{3} + \frac{\alpha_1(B_0)''}{6},$$

$$B_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left(4(B_k)''_{vv} + \sum_{l=1}^k \alpha_l (B_{k-l})''(v) \right),$$

из которых следуют соотношения

$$b_{10} = 4b_{02}, \quad b_{11} = 12b_{03}, \quad b_{12} = 24b_{04}, \quad b_{13} = 40b_{05}, \quad b_{14} = 60b_{05},$$

$$b_{20} = 32b_{04} + \frac{\alpha_1 b_{02}}{3}, \quad b_{21} = 160b_{05} + \alpha_1 b_{03}, \quad b_{22} = 480b_{06} + 2\alpha_1 b_{04},$$

$$b_{ij} = b_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m(i,j)}, b_{01}, b_{01}, \dots, b_{0n(i,j)}) \quad (j > 0). \quad (14)$$

Считая, что точкам $(0, v_*)$ соответствуют точки (t_*, x_*) , из соотношений (7) находим

$$b_{01} = t_*, \quad b_{00} = t_* v_* - x_*. \quad (15)$$

Обращение якобиана (9) в нуль в точке $(0, v_*)$ для отображений (7), определяемых гладким в этой точке решением уравнения (8), означает равенство нулю коэффициента b_{02} соответствующего ряда Тейлора (12):

$$b_{02} = 0. \quad (16)$$

Замечание 2. На прямой $h=0$ переменные t и x , определяемые отображением (7), зависят лишь от одного параметра v . Поэтому при описании сингулярности общего положения, соответствующей обращению якобиана (9) в нуль при $h=0$, никаких других ограничений в виде равенств на коэффициенты ряда (12), помимо тех, что следуют из результата подстановки этого ряда в уравнение (8), с точки зрения идеологии теории особенностей гладких отображений накладывать недопустимо. Именно по этой причине далее считаем, что выполнено равенство (16) (за счёт возможности вариации аргумента v функций $t(0, v)$ и $x(0, v)$, являющихся управляющими параметрами соответствующей катастрофы), а коэффициент $b_{11} = 12b_{03}$ в разложениях ряда Тейлора (12) отличен от нуля.

При таких ограничениях на разложения в ряд Тейлора из вида отображений (7) и равенств (14), (15) следует, что гладкие функции

$$\tau(h, v) = t - t_*, \quad \xi(h, v) = x - x_* - v_*(t - t_*) \quad (17)$$

обладают следующими разложениями в ряды Тейлора при $h \rightarrow 0$ и $v \rightarrow v_*$:

$$\tau = b_{11} \left(h + \frac{V^2}{4} \right) + b_{21} h^2 + 2b_{12} hV + \sum_{i+j>2} (j+1)b_{i(j+1)} h^i V^j, \quad (18)$$

$$\xi = V\tau - 3b_{20}h^2 - 2b_{11}hV - 4b_{30}h^3 - 3b_{21}h^2V - 2b_{12}hV^2 - \frac{b_{11}V^3}{12} + \sum_{i+j>3} a_{ij}h^i V^j. \quad (19)$$

Здесь

$$V = v - v_*, \quad (20)$$

а a_{ij} — постоянные, однозначно определяемые по коэффициентам α_k, b_{0k} разложений в ряд Тейлора (4) и (13). Так как коэффициент b_{11} отличен от нуля, то из вида разложения (18) по теореме о неявной функции следует, что в окрестности точки $(\tau = 0, V = 0)$ переменная h определена как гладкая функция независимых переменных τ и V , которая в этой точке разлагается в двойной ряд Тейлора

$$h(\tau, V) = \left(\frac{\tau}{b_{11}} + \sum_{k>2} h_{0k} \tau^k \right) + V \sum_{k>0} h_{1k} \tau^k + V^2 \left(-\frac{1}{4} + \sum_{k>0} h_{2k} \tau^k \right) + \sum_{m>2, k \geq 0} h_{mk} V^m \tau^k \quad (21)$$

с постоянными коэффициентами h_{mk} , однозначно определяемыми по коэффициентам b_{ij} . Подстановка в разложение (19) вместо h правой части данного двойного ряда задаёт разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \xi(\tau, V) = & \left(\xi_{02} \tau^2 + \sum_{j>3} \xi_{0j} \tau^j \right) + V \left(-\tau + \xi_{12} \tau^2 + \sum_{j>3} \xi_{1j} \tau^j \right) + \\ & + V^2 \sum_{j>0} \xi_{2j} \tau^j + V^3 \left(\frac{5b_{11}}{12} + \sum_{j>0} \xi_{3j} \tau^j \right) + \sum_{k>3, j \geq 0} \xi_{kj} V^k \tau^j \end{aligned} \quad (22)$$

гладкой в окрестности точки $(\tau = 0, V = 0)$ функции ξ независимых переменных τ и V . Коэффициенты ξ_{ij} этого ряда также однозначно вычисляются через коэффициенты α_k, b_{0k} рядов (4) и (13).

Функция $\xi(0, V)$ посредством диффеоморфной в окрестности точки $W = 0$ функции $V = V(W)$, которая при $W \rightarrow 0$ разлагается в ряд Тейлора (его коэффициенты v_j однозначно находятся через коэффициенты h_{j0} разложения (22))

$$V = V(W) = \left(\frac{12}{5b_{11}} \right)^{1/3} W + \sum_{j=2}^{\infty} v_j W^j \quad (23)$$

[16, гл. 4, теорема 4.4], переводится в одночлен

$$W^3 = \xi(0, W) = \xi(0, V(W)).$$

Функцию же $\xi(\tau, W)$ этот диффеоморфизм сводит к бесконечно дифференцируемой в окрестности точки $(\tau=0, W=0)$ функции $\xi(\tau, W)=\xi(\tau, V(W))$, которая, как это следует из вида ряда (22), при $\tau^2+W^2 \rightarrow 0$ разлагается в следующий двойной ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \xi(\tau, W) = & \left(\xi_{02}\tau^2 + \sum_{j>3} \xi_{0j}\tau^j \right) + W \left(-\left(\frac{12}{5b_{11}} \right)^{1/3} \tau + r_{12}\tau^2 + \sum_{j>3} r_{1j}\tau^j \right) + \\ & + W^2 \left(\sum_{j>0} r_{2j}\tau^j \right) + W^3 \left(1 + \sum_{j>0} r_{3j}\tau^j \right) + \sum_{k>3, j>0} r_{kj} W^k \tau^j. \end{aligned} \quad (24)$$

Постоянные коэффициенты r_{ij} данного ряда также однозначно выражаются через коэффициенты α_k и b_{0k} разложений (4) и (13).

Равенство $W^3 = \xi(0, W)$ означает, что функция $\xi(\tau, W)$ есть деформация с параметром τ ростка одночлена W^3 [20, с. 94]. Этот одночлен обладает [20, § 13, пример 13.6] также так называемой *R-миниверсальной* деформацией, являющейся ростком в нуле кубического многочлена $W^3 + \lambda_1 W + \lambda_2$, поэтому, в частности, существуют [20, с. 95, 100, 102] такие гладкие отображения $U(\tau, W)$, $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, что $U(0, W) = W$, $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(0) = 0$ и

$$\xi(\tau, W) = U^3(\tau, W) + \lambda_1(\tau)U(\tau, W) + \lambda_2(\tau) \quad (25)$$

в достаточно малой окрестности точки $(\tau=0, W=0)$.

Непосредственной подстановкой в левую часть последнего равенства разложения (24), а в его правую часть разложений в ряд Тейлора

$$\lambda_k(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jk} \tau^j \quad (k=1, 2), \quad U(\tau, W) = \sum_{j>0} U_{j0} \tau^j + W \left(1 + \sum_{j>0} U_{j1} \tau^j \right) + \sum_{i>1, j>0} U_{ji} W^i \tau^j \quad (26)$$

однозначно находятся коэффициенты λ_{j1} , λ_{j2} и U_{ji} : из равенства коэффициентов при τ^1 получающихся левой и правой частей находятся постоянные U_{1k} и $\lambda_{12}=0$, $\lambda_{11}=(-12/(5b_{11}))^{1/3}$, так что при $\tau \rightarrow 0$

$$\lambda_1(\tau) = \left(-\frac{12}{5b_{11}} \right)^{1/3} \tau + \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_{j1} \tau^j, \quad \lambda_2(\tau) = \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_{j2} \tau^j, \quad (27)$$

а из равенства их коэффициентов при τ^m с $m>1$ — постоянные λ_{m1} , λ_{m2} и U_{mk} .

Согласно виду ряда (26) при достаточно малых значениях $\lambda_2(\tau) - \xi$ и $\lambda_1(\tau)$ переменная W является гладкой функцией параметра τ и решения U кубического уравнения сборки (25), которая при $\tau \rightarrow 0$ и $U \rightarrow 0$ обладает разложением в ряд Тейлора

$$W(\tau, U) = \sum_{j>0} W_{j0} \tau^j + U \left(1 + \sum_{j>0} W_{j1} \tau^j \right) + \sum_{i>1, j>0} W_{ji} U^i \tau^j, \quad (28)$$

где коэффициенты W_{ji} однозначно выписываются через коэффициенты α_k и b_{0k} разложений (4), (12).

Таким образом, можем утверждать, что доказана

Теорема 1. Допустим, что $\alpha(h)$ — локально аналитическая функция, представляемая сходящимся рядом (4). И пусть $B(h, v)$ — гладкое в достаточно малой окрестности точки $(h=0, v=v_*)$ решение линейного дифференциального уравнения (8), у которого в разложении в ряд Тейлора (12) $b_{02}=0$, $b_{11}=12b_{03} \neq 0$, а t_* и x_* — значения гладких отображений (7) при

$h=0$ и $v=v_*$. Тогда данные отображения (7) задают сингулярные в точке (t_*, x_*) решения системы (1). После перехода к независимым переменным (17), сдвига (20) и локального диффеоморфизма $V=f(W)$ с разложением в ряд Тейлора (23) компоненты v этих сингулярных решений при $t \rightarrow t_*$ и $x \rightarrow x_*$ задаются любым из трёх корней $U(\tau, \xi)$ кубического уравнения сборки (25) посредством двух гладких функций $\lambda_1(\tau)$ и $\lambda_2(\tau)$ с разложениями в ряд Тейлора (27) и гладкой в точке $(\tau=0, U=0)$ функции $W=W(\tau, U)$, разлагающейся в двойной ряд Тейлора (28). Компоненты h данных сингулярных решений системы (1) при этом определяются первым из отображений (7) как гладкие в точке $(\tau=0, V=0)$ функции, разлагающиеся в двойной ряд Тейлора (21).

Таким образом, асимптотики решений (1), соответствующие типичной провальной особенности сборки гладких отображений (7), описаны со сверхстепенной точностью.

Замечание 3. Решение U канонического уравнения катастрофы сборки (25) для всех значений $\lambda_2 - \xi$ единственно и гладко по обоим управляющим параметрам $\lambda_1, \lambda_2 - \xi$ лишь при положительных λ_1 . Однако для неположительных значений λ_1 однозначность и гладкость имеет место лишь вне промежутка

$$|\lambda_2 - \xi| < \left(\frac{-4(\lambda_1)^3}{27} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

На ξ, τ -плоскости границы этого интервала представляют собой две кривые $\xi_{\pm, c}(\tau)$, которые изначально исходят из точки $(\xi=0, \tau=0)$ в полуплоскость $\tau b_{11} < 0$ и при $\tau \rightarrow 0$ в главном порядке задаются формулами

$$\xi_{\pm, c}(\tau) = \pm \frac{4}{3} \left| \frac{\tau^3}{5b_{11}} \right|^{1/2} (1 + o(1)). \quad (30)$$

Во всех внутренних точках промежутка (29) кубическое уравнение (25) имеет три различных корня. Как следует из разложений (21) и (22), две кривые $\xi_{\pm, z}(\tau)$ обращения в нуль компоненты h сингулярных решений системы (1), описываемых в теореме 1, при малых τ также расположены в полуплоскости $\tau b_{11} < 0$ и при $\tau \rightarrow 0$ обладают асимптотиками

$$\xi_{\pm, z}(\tau) = \pm \frac{4}{3} \left| \frac{\tau^3}{b_{11}} \right|^{1/2} (1 + o(1)). \quad (31)$$

Сравнение асимптотик (30) и (31) показывает, что по крайней мере при малых τ данные кривые провала $\xi_{\pm, z}(\tau)$ лежат в области единственности решения уравнения сборки (25). Нужно иметь в виду, что по разные стороны от этих кривых провала решения системы (1), описанные в теореме 1, в применении к задаче описания квазиклассических приближений к решениям НУШ (2) могут иметь смысл лишь для одного из двух вариантов — эллиптического или гиперболического — данной системы. Отметим, что решения уравнения движения одномерного изоэнтропического газа с произвольным давлением, совпадающие с гиперболическим вариантом системы (1), частным случаем которых являются уравнения мелкой воды (11), физически осмыслены лишь при неотрицательных значениях плотности h (для уравнений мелкой воды (11) — отклонения уровня жидкости от дна). Но во всяком случае методическим достоинством данной статьи её авторы как раз считают “абстрагирование от физического смысла” при обосновании формальных асимптотик решений системы (11) сразу же для эллиптического и гиперболического вариантов. Первоначальные же наши попытки проведения такого обоснования отдельно для каждой из областей $h \geq 0$ и $h \leq 0$ вызвали значительные затруднения.

Замечание 4. Доказанная теорема 1 носит несколько условный характер, поскольку априори неочевидна даже непустота множества гладких в точке $(h=0, v=v_*)$ решений уравнения (8), имеющих разложения в ряд Тейлора (12) с коэффициентами $b_{02}=0$, $b_{11}=12b_{03}\neq 0$. Но для частного случая $\alpha(h)\equiv 4$ можно доказать, что этому множеству принадлежат все локально аналитические в точке $(h=0, v=v_*)$ решения $B(h, v)$, определяемые любыми функциями $B(0, v)$ со сходящимися при достаточно малых значениях V рядами Тейлора

$$B(0, v) = v_* t_* - x_* + t_* V + b_{03} V^3 + \sum_{j=4}^{\infty} b_{0j} V^j, \quad b_{03} \neq 0.$$

Это возможно из-за сводимости заменой $B(h, v) = C(h, v)/h$ уравнения (8) к уравнению

$$hC''_{hh} = \alpha(h)C''_{vv}, \quad (32)$$

для которого согласно теореме, сформулированной Ю.Ф. Коробейником [21], при $\alpha(h)\equiv 4$ из аналитичности в точке $u = u_* = v_*/2$ функции $g_1(u)$, однозначно определяющей формальное решение (32) в виде ряда

$$C(h, v) = G(h, u) = g_1(u)h + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(u)h^k, \quad u = \frac{v}{2}, \quad (33)$$

следует, что данный ряд является аналитической функцией переменных h и u в некотором бикруге

$$D(R_1, R) := \{h, u \in \mathbb{C}: |h| < R_1, |u - u_*| < R\}. \quad (34)$$

Замечание 5. Теорема в работе [21] касается решений более широкого класса уравнений вида $\partial^k G / \partial u^k = h^m \partial^n G / \partial h^n$ с $n > m$. Нам нигде не удалось найти опубликованное доказательство этой теоремы. Но для случая $k=n=2$ и $m=1$, т.е. для решений уравнения

$$hG''_{hh} = G''_{uu}, \quad (35)$$

её доказательство нами было получено независимо.

3. ТЕОРЕМА КОРОБЕЙНИКА

Отметим, что коэффициенты $g_{k+1}(u)$ при $k \geq 1$ формального решения в виде ряда (33) уравнения (35) выражаются через производные $g_1^{(2k)}(u)$ порядка $2k$ коэффициента $g_1(u)$ в некоторой окрестности точки $u = u_*$ равенствами $g_{k+1}(u) = g_1^{(2k)}(u)/(k!(k+1)!)$. Поэтому в дальнейшем речь пойдёт о формальном решении уравнения (35) в виде ряда

$$G(h, u) = g_1(u)h + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} g_1^{(2k)}(u) h^{k+1}. \quad (36)$$

Приведём точную формулировку интересующей нас части теоремы Ю.Ф. Коробейника.

Теорема 2 (Ю.Ф. Коробейник, 1961 г.). Пусть R, R_1 — произвольные вещественные положительные числа, u_* — произвольное комплексное число, $G(h, u)$ — формальное решение в виде ряда (36) уравнения (35), где функция $g_1(u) = g_1(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u)$ бесконечно дифференцируема в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R\}$ как функция двух вещественных переменных $\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u$. Для того чтобы функция $G(h, u)$ была аналитической в бикруге (34) и ряд (36) сходил по h в круге $\{h \in \mathbb{C}: |h| < R_1\}$ при любом u из круга $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R\}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $g_1(u)$ была аналитической в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$.

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$, $r \in (0, \infty)$. Для произвольных $r_0 \in [0, r)$ и $\varepsilon \in (0, r - r_0)$ существует такая положительная постоянная $C(\varepsilon)$, что при всех натуральных n в круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq r_0\}$ справедлива оценка

$$|f^{(n)}(z)| \leq C(\varepsilon) \frac{n!(r - \varepsilon)}{(r - r_0 - \varepsilon)^{n+1}}.$$

Доказательство. Вследствие интегральной формулы Коши для любого $z \in \mathbb{C}$, лежащего в круге $|z| \leq r_0$, при всех натуральных n выполняется равенство

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|t|=r-\varepsilon} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt.$$

Отсюда следует, что

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi(r - \varepsilon) \max_{|t|=r-\varepsilon} \frac{|f(t)|}{|t-z|^{n+1}} \leq C(\varepsilon) \frac{n!(r - \varepsilon)}{(r - r_0 - \varepsilon)^{n+1}},$$

где $C(\varepsilon) = \max_{|t|=r-\varepsilon} |f(t)|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Предположим, что функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$. Покажем, что для любого $\delta \in (0, R)$ ряд в правой части (36) сходится равномерно на бикруге

$$E(\delta) = \{h, u \in \mathbb{C}: |h| \leq R_1, |u - u_*| \leq R - \delta\}. \quad (37)$$

Рассмотрим величины

$$\beta_k = \sup \left\{ \frac{|h|^{k+1}}{k!(k+1)!} |g_1^{(2k)}(u)|, |h| \leq R_1, |u - u_*| \leq R - \delta \right\}.$$

В силу доказанной леммы, если в ней положить $f(z) = g_1(z + u_*)$, $z = u - u_*$, $r = R + 2\sqrt{R_1}$, $r_0 = R - \delta$, для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ существует такая положительная постоянная $C(\varepsilon)$, что при всех натуральных k на круге $|u - u_*| \leq R - \delta$ имеет место оценка

$$|g_1^{(2k)}(u)| \leq \frac{C(\varepsilon)(2k)!(R + 2\sqrt{R_1} - \varepsilon)}{(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^{2k+1}}.$$

Значит,

$$\beta_k \leq (R_1)^{k+1} \frac{C(\varepsilon)(2k)!(R + 2\sqrt{R_1} - \varepsilon)}{k!(k+1)!(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^{2k+1}} =: \alpha_k.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится. Действительно, для любого $k \geq 1$

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{R_1(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+2)(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^2}$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{R_1}{(\sqrt{R_1} + (\delta - \varepsilon)/2)^2} < 1.$$

Таким образом, ряд (36) равномерно сходится на множестве $E(\delta)$ (см. (37)) для любого $\delta \in (0, R)$. Поэтому в бикруге (34) функция $G(h, u)$ действительно аналитична.

Необходимость. Предположим, что функция $G(h, u)$ аналитична в бикруге (34) и ряд (36) сходится по h в круге $\{h \in \mathbb{C}: |h| < R_1\}$ для любого u , удовлетворяющего неравенству $|u - u_*| < R$. Поскольку $g_1(u) = \partial G(0, u)/\partial h$, $|u - u_*| < R$, то функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R\}$. Покажем, что её можно аналитически продолжить в круг $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$ с помощью степенного ряда

$$g_1(u) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_1^{(j)}(u)}{j!} h^j. \quad (38)$$

Вследствие представления (36) для любого $u \in \mathbb{C}$ такого, что $|u - u_*| < R$, при каждом натуральном k справедливо равенство

$$g_1^{(2k)}(u) = k! \frac{\partial^{k+1} G}{\partial h^{k+1}}(0, u).$$

Зафиксируем числа $t \in (0, R)$, $t_1 \in (t, R)$ и числа $r_0 \in (0, 2\sqrt{R_1})$, $\rho \in (r_0, 2\sqrt{R_1})$. Из равенств

$$\frac{\partial^{k+1} G}{\partial h^{k+1}}(0, u) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{|h|=\rho^2/4} \frac{G(h, u)}{h^{k+2}} dh$$

следует, что для любого $u \in \mathbb{C}$, для которого $|u - u_*| \leq t_1$, при всяком натуральном $k \geq 1$

$$|g_1^{(2k)}(u)| \leq \frac{k!(k+1)!M(\rho, t_1)}{(\rho^2/4)^{k+1}} = \frac{4^{k+1}k!(k+1)!}{\rho^{2k+2}}M(\rho, t_1), \quad (39)$$

где

$$M(\rho, t_1) := \max\{|G(h, u)|, |h| \leq \rho^2/4, |u - u_*| \leq t_1\}.$$

Функция $g^{(2k+1)}(u)$ является производной $g^{(2k)}(u)$, поэтому, используя формулу Коши

$$g^{(2k+1)}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|v-u_*|=t_1} \frac{g^{(2k)}(v)}{(v-u)^2} dv,$$

получаем, что для любого натурального $k \geq 1$ и всякого $u \in \mathbb{C}$ такого, что $|u - u_*| \leq t$, выполняется неравенство

$$|g_1^{(2k+1)}(u)| \leq \frac{t_1 4^{k+1}k!(k+1)!M(\rho, t_1)}{(t_1 - t)^2 \rho^{2k+2}}. \quad (40)$$

Вследствие неравенства (39) для любого натурального $k \geq 1$

$$\sup \left\{ \frac{|g^{(2k)}(u)|}{(2k)!} |h|^{2k}, |u - u_*| \leq t_1, |h| \leq r_0 \right\} \leq M(\rho, t_1) \frac{4^{k+1}k!(k+1)!}{(2k)! \rho^{2k+2}} (r_0)^{2k}.$$

Отсюда следует (см. доказательство достаточности), что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} h^{2k} g^{(2k)}(u)/(2k)!$ для любого $t_1 \in (0, R)$ и каждого $u \in \mathbb{C}$ из круга $|u - u_*| \leq t_1$ сходится равномерно на круге $\{h \in \mathbb{C}: |h| \leq r_0\}$, значит, он сходится для любых $u, h \in \mathbb{C}$ таких, что $|u - u_*| < R$, $|h| < 2\sqrt{R_1}$.

Аналогично с помощью (40) показывается, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} h^{2k+1} g^{(2k+1)}(u)/(2k+1)!$ также сходится для всех $u, h \in \mathbb{C}$ таких, что $|u - u_*| < R$, $|h| < 2\sqrt{R_1}$. Таким образом, для всех $u, h \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенствам $|u - u_*| < R$, $|h| < 2\sqrt{R_1}$, ряд (38) сходится, при этом его сумма для каждого $u \in \mathbb{C}$ из круга $|u - u_*| < R$ аналитически продолжает функцию $g_1(w)$

в круг $\{w \in \mathbb{C}: |w - u| < 2\sqrt{R_1}\}$. Поэтому $g_1(u)$ аналитически продолжима в больший круг $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$. Теорема доказана.

Если зафиксировать сумму $R + 2\sqrt{R_1}$, а положительные числа R и R_1 менять, то можно получить более широкую область, в каждой точке которой ряд Тейлора $G(h, u)$ вида (36) сходится (к $G(h, u)$) и функция $G(h, u)$ аналитическая. Эта область является объединением бикругов (34) с центром в точке $(h=0, u=u_*)$ (см. теорему 2).

Зафиксируем положительное число R_0 . Определим область

$$P(R_0) = \{h, u \in \mathbb{C}: |u - u_*| + 2\sqrt{|h|} < R_0\}.$$

Очевидно, что

$$P(R_0) = \bigcup_{R, R_1 > 0, R + 2\sqrt{R_1} = R_0} D(R_1, R).$$

Предположим, что функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R_0\}$. Пусть функция $G(h, u)$ задаётся рядом (36). Возьмём точку (h, u) в $P(R_0)$. Найдутся числа $R, R_1 > 0$, для которых $R + 2\sqrt{R_1} = R_0$ и (h, u) принадлежит бикругу $D(R_1, R)$. По теореме 2 ряд в правой части формулы (36) сходится в каждой точке $D(R_1, R)$, функция $G(h, u)$ аналитична в $D(R_1, R)$ и является решением уравнения (35). Таким образом, справедливо

Следствие. Пусть функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R_0\}$, где R_0 — положительное число. Тогда ряд в правой части (36) сходится в каждой точке из $P(R_0)$ к функции $G(h, u)$, являющейся решением уравнения (35), аналитическим в области $P(R_0)$.

Замечание 6. А.И. Янушаускасом в [22; 23, гл. 6, § 5] описывались аналитические решения ряда эллиптических и вырождающихся уравнений с частными производными. Эти решения для некоторых рассмотренных уравнений построены в виде рядов по одной из независимых переменных, сходимость которых обосновывается с помощью метода мажорант. В частности, изучена структура решений уравнения

$$s(v_k)''_{ss} + (k+1)(v_k)'_s + (v_k)''_{zz} = 0 \quad (41)$$

(уравнение (16) в [22] для случая оператора $L = \partial^2/\partial z^2$), при $k=1$ сводящегося к исследуемому нами уравнению (35). Но для уравнения (41) в монографии [22] нет обоснования сходимости соответствующих рядов, не описана область, в которой рассматриваемые ряды сходятся, не указана её зависимость от определяющей функции $v_0^{(k)}(z)$. Доказанные нами теорема 2 и её следствие позволяют проследить связь областей специального вида, в которых решение $G(h, u)$ уравнения (35) и коэффициент $g_1(u)$ аналитичны. Непосредственно же из формулировок в работах [22; 23, гл. 4, § 5] не видно, например, как обосновать утверждение, сделанное нами в замечании 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы предполагают, что в случае локальной аналитичности в точке $u = 2v_*$ функции $g_1(u)$ все формальные асимптотические решения вида (33) уравнения (32) с произвольным коэффициентом $\alpha(h)$, представимым сходящимся рядом (4), в некотором бикруге (34) по-прежнему будут рядами аналитических функций переменных h и u .

Подобно тому как доказанное утверждение теоремы 2 сняло вопрос об условности теоремы 1 для частного случая $\alpha(h) \equiv 4$ (см. замечание 4), строгое доказательство справедливости этого предположения устранило бы условный характер теоремы 1 и для общего случая произвольной аналитической в окрестности точки $h=0$ функции $\alpha(h)$, принимающей при $h=0$ значение 4. В самом деле, при справедливости этого предположения множеству гладких в

точке $(h=0, v=v_*)$ решений уравнения (8), имеющих разложения в ряд Тейлора (12) с коэффициентами $b_{02}=0$, $b_{11}=12b_{03}\neq 0$, будут, по крайней мере, принадлежать все его решения $B(h, v)$, определяемые любыми функциями $B(0, v)$ со сходящимися при малых значениях $v-v_*$ рядами Тейлора вида

$$B(0, v) = v_* t_* - x_* + t_* + b_{03}(v - v_*)^3 + \sum_{j=4}^{\infty} b_{0j}(v - v_*)^j, \quad b_{03} \neq 0.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Результаты А.М. Шавлукова получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00006).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А.М. Ильин. — М. : Наука, 1989. — 336 с.
2. Гуревич, А.В. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере / А.В. Гуревич, А.Б. Шварцбург. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
3. Шварцбург, А.Б. Геометрическая оптика в нелинейной теории волн / А.Б. Шварцбург. — М. : Наука, 1976. — 119 с.
4. Жданов, С.Л. Квазигазовые неустойчивые среды / С.Л. Жданов, А.Б. Трубников. — М. : Наука, 1991. — 174 с.
5. Кудашев, В.Р. Особенности некоторых типичных процессов самопроизвольного падения интенсивности в неустойчивых средах / В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов // Письма в журн. эксп. и теор. физики. — 1995. — Т. 65, № 4. — С. 358–363.
6. Кудашев, В.Р. Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн / В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов // Прикл. математика и механика. — 2001. — Т. 3, № 3. — С. 456–466.
7. Гарифуллин, Р.Н. От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам / Р.Н. Гарифуллин, Б.И. Сулейманов // Журн. эксп. и теор. физики. — 2010. — Т. 137, № 1. — С. 149–164.
8. Dubrovin, B. On universality of critical behaviour in the critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the tritonque to the Painlevé-I equation / B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein // J. Nonlinear Sci. — 2009. — V. 19, № 1. — P. 57–94.
9. Konopelchenko, B.G. Quasi-classical approximation in vortex filament dynamics. Integrable systems, gradient catastrophe, and flutter / B.G. Konopelchenko, G. Ortenzi // Stud. Appl. Math. — 2013. — V. 130, № 2. — P. 167–199.
10. Konopelchenko, B.G. Jordan form, parabolicity and other features of change of type transition for hydrodynamic type systems / B.G. Konopelchenko, G. Ortenzi // J. Phys. A. — 2017. — V. 50, № 21. — Art. 215205.
11. Богаевский, И.А. Особенности многозначных решений квазилинейных гиперболических систем / И.А. Богаевский, Д.В. Туницкий // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2020. — Т. 308. — С. 76–87.
12. Сулейманов, Б.И. Типичная провальная особенность сборки решений уравнений движения одномерного изэнтропического газа / Б.И. Сулейманов, А.М. Шавлуков // Изв. РАН. Сер. физ. — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 664–666.
13. Сулейманов, Б.И. О наследовании решениями уравнений движения изэнтропического газа типичных особенностей решений линейного волнового уравнения / Б.И. Сулейманов, А.М. Шавлуков // Мат. заметки. — 2022. — Т. 112, № 4. — С. 625–640.

14. Рахимов, А.Х. Особенности римановых инвариантов / А.Х. Рахимов // Функц. анализ и его приложения. — 1993. — Т. 27, № 1. — С. 46–59.
15. Брёкер, Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Брёкер, Л. Ландер ; пер. с англ. А.Г. Кушнirenко. — М. : Мир, 1977. — 208 с.
16. Постон, Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт ; пер. с англ. А.В. Чернавского. — М. : Мир, 1980. — 617 с.
17. Арнольд, В.И. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. — М. : Наука, 1982. — 304 с.
18. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1 / Р. Гилмор ; пер. с англ. под ред. Ю.П. Гупало, А.А. Пионтковского. — М. : Мир, 1984. — 349 с.
19. Алексеев, Ю.К. Введение в теорию катастроф / Ю.К. Алексеев, В.П. Сухоруков; — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2000. — 182 с.
20. Седых, В.Д. Математические методы теории катастроф / В.Д. Седых. — М. : МЦНМО, 2021. — 224 с.
21. Коробейник, Ю.Ф. Об аналитических решениях одного класса уравнений в частных производных / Ю.Ф. Коробейник // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 6. — С. 1248–1251.
22. Янушаускас, А.И. Структурные свойства решений некоторых аналитических уравнений с частными производными / А.И. Янушаускас // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 1. — С. 182–194.
23. Янушаускас, А.И. Аналитические и гармонические функции многих переменных / А.И. Янушаускас. — Новосибирск : Наука, 1981. — 183 с.

TYPICAL DROPPING ASYMPTOTICS OF QUASICLASSICAL APPROXIMATIONS TO SOLUTIONS OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

S. N. Melikhov¹, B. I. Suleimanov², A. M. Shavlukov³

¹*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

¹*Southern Mathematical Institute of VSC of RAS, Vladikavkaz, Russia*

^{2,3}*Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision
of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Russia*

e-mail: ¹snmelihov@yandex.ru, ²bisul@mail.ru, ³aza3727@yandex.ru

Formal asymptotics are substantiated that describe typical dropping cusp singularity of quasiclassical approximations to solutions of two cases of the integrable nonlinear Schrödinger equation $-i\varepsilon\Psi_t' = \varepsilon^2\Psi_{xx}'' \pm 2|\Psi|^2\Psi$, where ε is a small parameter. The substantiation uses the ideology and facts of the mathematical catastrophe theory and the part of the theorem of Yu.F. Korobeinik, concerning analytical as $h \rightarrow 0$ solutions $G(h, u)$ of the mixed type linear equation $hG_{hh}'' = G_{uu}''$ to which the hodograph images of both cases of the systems of equations of these quasiclassical approximations are equivalent.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, gas dynamics equation, shallow water equation, asymptotics, singularity theory, catastrophe theory, gradient catastrophe, dropping singularity, cusp.

FUNDING

The work of A.M. Shavlukov was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 21-11-00006)

REFERENCES

1. И'ин, А.М., *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, Providence: Am. Math. Soc., 1992.
2. Gurevich, A.V. and Shvartsburg, A.B., *Nelineynaya teoriya rasprostraneniya radiovoln v ionosfere* (Nonlinear Theory of Radio Wave Propagation in the Ionosphere), Moscow: Nauka, 1973.

3. Shvartsburg, A.B., *Geometricheskaya optika v nelineynoy teorii voln* (Geometrical Optics in the Nonlinear Theory of Waves), Moscow: Nauka, 1976.
4. Zhdanov, S.L. and Trubnikov, B.A., *Kvazigazovyye neustoychivyye sredy* (Quasigaseous Unstable Media), Moscow: Nauka, 1991.
5. Kudashev, V.R. and Suleimanov, B.I., Characteristic features of some typical spontaneous intensity collapse processes in unstable media, *JETP Lett.*, 1995, vol. 62, no. 4, pp. 382–388.
6. Kudashev, V.R. and Suleimanov, B.I., The effect of small dissipation on the onset of one-dimensional shock waves, *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 441–451.
7. Garifullin, R.N. and Suleimanov, B.I., From weak discontinuities to nondissipative shock waves, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2010, vol. 110, no. 1, pp. 133–146.
8. Dubrovin, B., Grava, T., and Klein, C., On universality of critical behaviour in the critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the tritonque to the Painlevé-I equation, *J. Nonlinear Sci.*, 2009, vol. 19, no. 1, pp. 57–94.
9. Konopelchenko, B.G. and Ortenzi, G., Quasi-classical approximation in vortex filament dynamics. Integrable systems, gradient catastrophe, and flutter, *Stud. Appl. Math.*, 2013, vol. 130, no. 2, pp. 167–199.
10. Konopelchenko, B.G. and Ortenzi, G., Jordan form, parabolicity and other features of change of type transition for hydrodynamic type systems, *J. Phys. A*, 2017, vol. 50, no. 21, art. 215205.
11. Bogayevsky, I.A. and Tunitsky, D.V., Singularities of multivalued solutions of quasilinear hyperbolic systems, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, no. 21, pp. 67–78.
12. Shavlukov, A.M. and Suleimanov, B.I., A typical dropping cusp singularity of solutions to equations of a one-dimensional isentropic gas flow, *Bull. of the RAS: Phys.*, 2020, vol. 84, no. 5, pp. 552–554.
13. Shavlukov, A.M. and Suleimanov, B.I., Inheritance of generic singularities of solutions of a linear wave equation by solutions of isentropic gas motion equations, *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 4, pp. 608–620.
14. Rakhimov, A.Kh., Singularities of Riemannian invariants, *Funct. Anal. Appl.*, 1993, vol. 27, no. 1, pp. 39–50.
15. Brocker, Th. and Lander, L., *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975.
16. Poston, T. and Stewart, I., *Catastrophe Theory and its Applications*, New York: Dover Publications, 1978.
17. Arnol'd, V.I., Gusein-Zade, S.M., and Varchenko, A.N., *Singularities of Differentiable Mappings. Volume 1: The Classification of Critical Points Caustics and Wave Fronts*, Berlin: Birkhäuser, 1985.
18. Gilmore, R., *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, New York: Dover Publications, 1993.
19. Alexeyev, Y.K. and Sukhorukov, V.P., *Vvedenie v teoriyu katastrof* (The Introduction to Catastrophe Theory), Moscow: MSU Press, 2000.
20. Sed'kh, V.D., *Matematicheskiye metody teorii katastrof* (Mathematical Methods of the Catastrophe Theory), Moscow: MCCME, 2021.
21. Korobeinik, Yu.F., Analytic solutions to a certain class of partial differential equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1961, no. 2, pp. 1337–1340.
22. Yanushauskas, A.I., Structural properties of solutions of some analytic partial differential equations, *Differ. Uravn.*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 182–194.
23. Yanushauskas, A.I., *Analiticheskiye i garmonicheskiye funktsii mnogikh peremennykh* (Analytical and Harmonic Functions of Several Variables), Novosibirsk: Nauka, 1981.