

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.929

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ
РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ
ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

© А. А. Леваков¹, Д. А. Долженкова²

¹Белорусский государственный университет, г. Минск

²ООО “ХайКво Солошенс”, г. Минск

e-mail: ¹levakov123321@gmail.com, ²dar.ya.d.a105@gmail.com

Поступила в редакцию 24.11.2023 г., после доработки 17.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Под стохастической дифференциально-разностной гибридной системой понимается система взаимосвязанных переменных, в которой динамика одних переменных описывается при помощи стохастических дифференциальных уравнений, а других — посредством разностных уравнений. Рассматриваются системы с разностными уравнениями двух видов: уравнением, описывающим процесс наблюдения с мультипликативным винеровским шумом, и уравнением с запаздыванием. Доказаны теоремы существования и единственности решений каждой из систем. Основные условия на параметры систем — локальные условия Липшица и линейный порядок роста.

Ключевые слова: гибридная система, стохастическое уравнение, существование, единственность.

DOI: 10.31857/S0374064124050033, EDN: LBOJWJ

ВВЕДЕНИЕ

Нередко при математическом моделировании реальных процессов встречаются процессы, которые имеют как детерминированный, так и стохастический характер, и ведут себя как непрерывно, так и дискретно. Отсюда возникает потребность в исследовании достаточно нового класса систем — стохастических дифференциально-разностных гибридных систем. Гибридные системы активно применяются в следующих областях: биоинформатика [1], робототехника [2, 3], коммуникационные сети [4], экономика [5] и финансовые рынки [6]. Процессы, происходящие на финансовом рынке, более чем в любой другой области зависят от ряда случайных факторов, таких как получаемая участниками рынка информация, их субъективные мнения и предпочтения, поэтому для моделирования таких процессов используют именно гибридные системы.

В большинстве работ, посвящённых изучению гибридных систем, авторы ограничиваются рассмотрением линейных гибридных систем [7–11], для которых вопрос разрешимости задачи вытекает, как правило, из известных теорем существования и единственности решений дифференциальных и разностных уравнений. Значительно меньше известно исследований проблемы существования решений для нелинейных стохастических дифференциально-разностных гибридных систем [12]. В данной статье доказаны теоремы существования и единственности для нелинейных стохастических дифференциально-разностных гибридных систем двух типов.

1. ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА С РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ВИД ПРОЦЕССА НАБЛЮДЕНИЯ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ВИНЕРОВСКИМ ШУМОМ

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$; $W(t)$, $W_1(t)$ — независимые d - и r -мерные $(\mathcal{F}_t)$ -броуновские движения соответственно; функции $g: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$, $q: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$, которые при каждом фиксированных (x, y) измеримы по Борелю и при каждом фиксированных t непрерывны по (x, y) ; функция $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, которая при каждом фиксированных (t, ω) непрерывна по (x, y) и при каждом фиксированных (x, y) процесс $f(\cdot, x, y, \cdot)$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерим и $(\mathcal{F}_t)$ -согласован; $(\mathcal{F}_0)$ -измеримый случайный вектор $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$; $(\beta([0, 1]) \times \mathcal{F})$ -измеримый $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный процесс $u: [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, $\beta(\mathbb{R}_+)$ — борелевская σ -алгебра на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Рассмотрим стохастическую дифференциально-разностную гибридную систему вида

$$dx(t, \omega) = f(t, x(t, \omega), y(t, \omega), \omega)dt + g(t, x(t, \omega), y(t, \omega))dW(t, \omega), \quad (1)$$

$$y(t+1, \omega) = h(t, x(t, \omega), y(t, \omega)) + q(t, x(t, \omega), y(t, \omega))W_1(t+1, \omega). \quad (2)$$

Определение 1. Под *решением системы* (1), (2) с начальными условиями $\eta(\omega)$, $u(t, \omega)$ понимаем пару процессов $(x(t, \omega), y(t, \omega))$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $x(t, \omega)$ — d -мерный непрерывный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный случайный процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $(\mathcal{F}_t)$, $y(t, \omega)$ — $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измеримый r -мерный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный случайный процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $(\mathcal{F}_t)$, таких, что для каждого $t \geq 0$ $\int_0^t \|f(s, x(s, \omega), y(s, \omega), \omega)\| ds < +\infty$, $\int_0^t \|g(s, x(s, \omega), y(s, \omega))\|^2 ds < +\infty$ п. н. и для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ с вероятностью, равной единице, имеют место равенства

$$\begin{aligned} x(t, \omega) &= \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_0^t g(s, x(s, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega), \\ y(t+1, \omega) &= h(t, x(t, \omega), y(t, \omega)) + q(t, x(t, \omega), y(t, \omega))W_1(t+1), \\ y(t, \omega) &= u(t, \omega), \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

где первый интеграл является интегралом Лебега, а второй — интегралом Ито.

Говорят, что гибридная система имеет единственное решение с начальными условиями η , u , если для любых двух решений $(x_1(t, \omega), y_1(t, \omega))$, $(x_2(t, \omega), y_2(t, \omega))$ с начальными условиями η , u имеем $x_1(t, \omega) = x_2(t, \omega)$, $y_1(t, \omega) = y_2(t, \omega)$ при каждом $t \in [0, +\infty)$ с вероятностью, равной единице.

Будем говорить, что отображения f , g удовлетворяют **условию А)**, если:

A₁) существует вещественное отображение $M_1(b, \omega)$, $(b, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, такое, что при каждом фиксированном b отображение $M_1(b, \cdot)$ $(\mathcal{F})$ -измеримо, $E(M_1(b, \omega)) < +\infty$ (E — математическое ожидание), и для любых $b \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq b, \|x\| \leq b, \|y\| \leq b} \|f(t, x, y, \omega)\| \leq M_1(b, \omega);$$

A₂) существует вещественное отображение $k(t, b, \omega)$, определённое на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$, такое, что при каждом фиксированном $b \in \mathbb{R}_+$ процесс $k(\cdot, b, \cdot)$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерим, и для любых $b \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$ $E(\int_0^a k(t, b, \omega) dt) < +\infty$, при всех $b \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x, x_1 \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$, $\|x\| \leq b$, $\|x_1\| \leq b$, $\|y\| \leq b$, $\omega \in \Omega$ справедливо неравенство

$$2(x - x_1)^T(f(t, x, y, \omega) - f(t, x_1, y, \omega)) + \|g(t, x, y) - g(t, x_1, y)\|^2 \leq k(t, b, \omega)\|x - x_1\|^2.$$

Будем говорить, что отображения f , g , h и q удовлетворяют **условию В)**, если существуют вещественное измеримое по Борелю монотонно возрастающее отображение $M(t)$ и постоянная $\beta > 2$ такие, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$, $\omega \in \Omega$ выполняются неравенства

$$2x^T f(t, x, y, \omega) + \|g(t, x, y)\|^2 \leq M(t)(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2),$$

$$\|h(t, x, y)\|^2 + \|q(t, x, y)\|^\beta \leq M(t)(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Лемма 1 [13]. Пусть $\xi(t)$ — непрерывный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный неотрицательный процесс, σ — момент остановки, $\sigma(\omega) < +\infty$ п. н., $b \in \mathbb{R}_+$, и пусть для любого момента остановки $0 \leq \tau \leq \sigma$ $E(\xi(\tau)) \leq b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \sigma} \xi(t) \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{b}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Возьмём $\tau_1 = \sigma \wedge \inf\{t \geq 0: \xi(t) \geq \varepsilon\}$. Тогда $\{\omega: \sup_{0 \leq t \leq \sigma} \xi(t) \geq \varepsilon\} = \{\omega: \xi(\tau_1) \geq \varepsilon\}$. Теперь требуемое неравенство вытекает из неравенства Чебышёва.

Лемма 2 [14, с. 82]. Пусть функция $y = V(t, \omega, z)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^d$, при каждом фиксированном z $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерима, а при каждом фиксированном (t, ω) непрерывна по z и $(\mathcal{F}_t)$ -измерима при каждом фиксированном (t, z) ; функция $z: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерима и $(\mathcal{F}_t)$ -согласована. Тогда отображение $(t, \omega) \rightarrow V(t, \omega, z(t, \omega))$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измеримо и $(\mathcal{F}_t)$ -согласовано.

Теорема 1. Если отображения f , g , h и q удовлетворяют условиям *A)* и *B)*, то для любого $(\mathcal{F}_0)$ -измеримого вектора $\eta(\omega)$ и для любого $(\beta([0, 1]) \times \mathcal{F})$ -измеримого $(\mathcal{F}_t)$ -согласованного случайного процесса $u(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, таких, что

$$E(\|\eta(\omega)\|^2) < +\infty, \quad E\left(\int_0^1 \|u(t, \omega)\|^2 dt\right) < +\infty, \quad (3)$$

система (1), (2) имеет единственное решение с начальными условиями η , u .

Доказательство. На промежутке $[0, 1]$ возьмём $y(t, \omega) = u(t, \omega)$. Для каждого натурального n определим процессы $x_n(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, следующим образом: для $t \in [0, 1/n]$

$$x_n(t, \omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, \eta(\omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_0^t g(s, \eta(\omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega),$$

а для $t \in [k/n, (k+1)/n]$, $k = \overline{1, n-1}$,

$$x_n(t, \omega) = x_n(k/n, \omega) + \int_{k/n}^t f(s, x_n(k/n, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_{k/n}^t g(s, x_n(k/n, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega),$$

где интегралы по ds при каждом ω являются интегралами Лебега, а по $dW(s, \omega)$ — интегралами Ито.

Процесс $x_n(t, \omega)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_n(t, \omega) &= \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x_n(s, \omega) + p_n(s, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \\ &+ \int_0^t g(s, x_n(s, \omega) + p_n(s, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p_n(t, \omega) = x_n(\kappa_n(t), \omega) - x_n(t, \omega)$, $\kappa_n(t) = [tn]/n$ ($[tn]$ — целая часть числа tn). При сделанных предположениях легко видеть с учётом леммы 2, что процессы $x_n(t, \omega)$ определены на промежутке $[0, 1]$, непрерывны и $(\mathcal{F}_t)$ -согласованны. Возьмём $b \geq 1$. Определим τ_n^b как момент первого выхода процесса $x_n(t, \omega)$ из шара $\|x\| \leq b/6$, $\tau_n^b = \inf\{t \in [0, 1] : \|x_n(t, \omega)\| > b/6\}$, $\tau_y^b = \inf\{t \in [0, 1] : \|y(t, \omega)\| > b/6\}$, тогда $\|p_n(t, \omega)\| \leq b/3$ при $0 \leq t \leq \tau_n^b \wedge \tau_y^b$. Из определения процесса $p_n(t, \omega)$ следует, что на промежутке $[\kappa_n(t), \kappa_n(t) + 1/n)$ его можно представить в виде

$$-p_n(t, \omega) = \int_{\kappa_n(t)}^t f(s, x_n(\kappa_n(t)), y(s, \omega), \omega) ds + \int_{\kappa_n(t)}^t g(s, x_n(\kappa_n(t)), y(s, \omega)) dW(s, \omega).$$

Пусть $v_n(t, \omega) = \|p_n(t, \omega) 1_{A_n^b}(t, \omega)\|$, где $A_n^b = \{(t, \omega) : 0 \leq t \leq \tau_n^b \wedge \tau_y^b\}$,

$$1_{A_n^b}(t, \omega) = \begin{cases} 1, & (t, \omega) \in A_n^b, \\ 0, & (t, \omega) \notin A_n^b. \end{cases}$$

Возьмём произвольное значение $t \in [0, 1]$. Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, ввиду результата [15, с. 118, замечание 7] и условия теоремы, имеем

$$\begin{aligned} P\{v_n(t, \omega) \geq 2\varepsilon\} &\leq P\left\{1_{A_n^b}(t, \omega) \int_{\kappa_n(t)}^t \|f(s, x_n(\kappa_n(t)), y(s, \omega), \omega)\| ds \geq \varepsilon\right\} + \\ &+ P\left\{1_{A_n^b}(t, \omega) \int_{\kappa_n(t)}^t \|g(s, x_n(\kappa_n(t)), y(s, \omega))\|^2 ds \geq \delta\right\} + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \leq \\ &\leq P\left\{1_{A_n^b}(t, \omega) \frac{M_1(b, \omega)}{n} \geq \varepsilon\right\} + P\left\{1_{A_n^b}(t, \omega) \frac{M(1)(1+2b^2)}{n} \geq \delta\right\} + \frac{\delta}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из неравенства (5) вытекает, что для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется соотношение

$$v_n(t, \omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \quad \left(\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} - \text{сходимость по вероятности} \right). \quad (6)$$

Поскольку $v_n(t, \omega) \leq b/3$, то из (6), используя теорему Фубини и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем, что для любых $b \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_0^{\tau_n^b \wedge \tau_y^b} \|p_n(t, \omega)\| dt\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 E(v_n(t, \omega)) dt = 0. \quad (7)$$

Временно зафиксируем n , m и положим

$$z_n(t) = x_n(t, \omega), \quad z_m(t) = x_m(t, \omega), \quad p(t) = p_n(t, \omega), \quad q(t) = p_m(t, \omega),$$

$$\alpha(t, b, \omega) = \int_0^t k(s, b, \omega) ds, \quad \psi(t, b, \omega) = \exp\{-\alpha(t, b, \omega)\},$$

$$\gamma_{n,m,y} = \tau_n^b \wedge \tau_m^b \wedge \tau_y^b, \quad y(t) = y(t, \omega), \quad \psi(t, b, \omega) = \psi(t).$$

Используя формулу Ито, имеем

$$\begin{aligned} \psi(t \wedge \gamma_{n,m,y}) \|z_n(t \wedge \gamma_{n,m,y}) - z_m(t \wedge \gamma_{n,m,y})\|^2 &= \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} \psi(s) [-k(s, b, \omega) \|z_n(s) - z_m(s)\|^2 + \\ &+ 2(z_n(s) - z_m(s))^T (f(s, z_n(s) + p(s), y(s), \omega) - f(s, z_m(s) + q(s), y(s), \omega)) + \end{aligned}$$

$$+ \|g(s, z_n(s) + p(s), y(s)) - g(s, z_m(s) + q(s), y(s))\|^2] ds + \\ + \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} 2\psi(s)(z_n(s) - z_m(s))^T (g(s, z_n(s) + p(s), y(s)) - g(s, z_m(s) + q(s), y(s))) dW(s).$$

Отсюда с учётом условия A_2) получаем

$$\begin{aligned} & \psi(t \wedge \gamma_{n,m,y}) \|z_n(t \wedge \gamma_{n,m,y}) - z_m(t \wedge \gamma_{n,m,y})\|^2 \leq \\ & \leq \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} \psi(s) [k(s, b, \omega) (\|z_n(s) + p(s) - z_m(s) - q(s)\|^2 - \|z_n(s) - z_m(s)\|^2) + \\ & + 2(-p(s) + q(s))^T (f(s, z_n(s) + p(s), y(s), \omega) - f(s, z_m(s) + q(s), y(s), \omega))] ds + \\ & + \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} 2\psi(s)(z_n(s) - z_m(s))^T (g(s, z_n(s) + p(s), y(s)) - g(s, z_m(s) + q(s), y(s))) dW(s) \leq \\ & \leq \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} C(s, b, \omega) (\|p(s)\| + \|q(s)\|) ds + \\ & + \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} 2\psi(s)(z_n(s) - z_m(s))^T (g(s, z_n(s) + p(s), y(s)) - g(s, z_m(s) + q(s), y(s))) dW(s), \end{aligned}$$

где $C(t, b, \omega) = 2bk(t, b, \omega) + 4M_1(b, \omega)$. Возвращаясь к предыдущим обозначениям, из последнего неравенства для любого $b \in \mathbb{R}_+$ и для любого $(\mathcal{F}_t)$ -момента остановки τ , $0 \leq \tau \leq \gamma_{n,m,y}$, имеем неравенство

$$\begin{aligned} & E(\exp\{-\alpha(\tau, b)\} \|x_n(\tau, \omega) - x_m(\tau, \omega)\|^2) \leq \\ & \leq E\left(\int_0^{\tau_y^b \wedge \tau_n^b} C(s, b, \omega) \|p_n(s, \omega)\| ds + \int_0^{\tau_y^b \wedge \tau_m^b} C(s, b, \omega) \|p_m(s, \omega)\| ds\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Из условий теоремы следует, что для каждого $b \in \mathbb{R}_+$

$$E\left(\int_0^1 C(t, b, \omega) dt\right) = L(b) < +\infty. \quad (9)$$

Покажем, что при каждом фиксированном $b \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_0^{\tau_n^b} \|p_n(t, \omega)\| C(t, b, \omega) dt\right) = 0. \quad (10)$$

Для каждого натурального i представим выражение под знаком предела в (10) в виде

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^{\tau_n^b} \|p_n(t, \omega)\| C(t, b, \omega) dt\right) &= E\left(\int_0^{\tau_n^b} \|p_n(t, \omega)\| C(t, b, \omega) 1_{B_{1i}}(t, \omega) dt\right) + \\ &+ E\left(\int_0^{\tau_n^b} \|p_n(t, \omega)\| C(t, b, \omega) 1_{B_{2i}}(t, \omega) dt\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $B_{1i} = \{(t, \omega) : C(t, b, \omega) > i\}$, $B_{2i} = \{(t, \omega) : C(t, b, \omega) \leq i\}$.

Из (9) имеем $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_{1i}) = 0$ (здесь μ — мера Лебега). Отсюда и из теоремы 3.1 в [16, с. 11] следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать i таким образом, чтобы первое слагаемое в правой части равенства (11) оказалось бы меньше $\varepsilon/2$. Зафиксируем такое i , а затем, используя (7), выберем номер N_ε так, чтобы второе слагаемое в (11) оказалось бы меньше $\varepsilon/2$ при $n \geq N_\varepsilon$. Отсюда и из равенства (11) следует неравенство (10).

В силу (8), (10) и леммы 1 для любого $b > 0$ имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq \gamma_{n,m,y}} \exp\{-\alpha(t, b, \omega)\} \|x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)\|^2 \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Множитель $\exp\{-\alpha(t, b, \omega)\}$ можно опустить, так как он не зависит от n и m . Отсюда следует соотношение

$$\sup_{0 \leq t \leq \gamma_{n,m,y}} \|x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)\| \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (12)$$

Снова временно положим

$$\begin{aligned} z(t) &= x_n(t, \omega), \quad \psi_1(t) = \exp\{-\alpha_1(t) - \|\eta(\omega)\|^2 - \alpha_2(t, \omega)\}, \\ \alpha_1(t) &= \int_0^t M(s) ds, \quad \alpha_2(t, \omega) = \int_0^t M(s) \|y(s)\|^2 ds, \quad p(t) = p_n(t, \omega). \end{aligned}$$

С учётом формулы Ито и условия В) имеем

$$\begin{aligned} & \psi_1(t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b) (1 + \|z(t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b)\|^2) \leq \exp\{-\|\eta\|^2\} (1 + \|\eta\|^2) + \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b} \psi_1(s) (M(s) (\|z(s) + p(s)\|^2 - \|z(s)\|^2) - 2p(s)^T f(s, z(s) + p(s), y(s), \omega)) ds + \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b} 2\psi_1(s) z(s)^T g(s, z(s) + p(s), y(s)) dW(s) \leq \\ & \leq \exp\{-\|\eta\|^2\} (1 + \|\eta\|^2) + \int_0^{t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b} C_1(b, \omega) \|p(s)\| ds + \int_0^{t \wedge \tau_n^b} 2\psi_1(s) z(s)^T g(s, z(s) + p(s), y(s)) dW(s), \end{aligned}$$

где

$$C_1(b, \omega) = bM(1) + 2M_1(b, \omega).$$

Так как $\sup_{\|z\| \in [0, +\infty)} \exp\{-\|z\|^2\} (1 + \|z\|^2) = 1$, то из последнего неравенства для любого момента остановки τ , $0 \leq \tau \leq \tau_n^b \wedge \tau_y^b$, следует, что

$$E(\psi_1(\tau) (1 + \|x_n(\tau)\|)^2) \leq 1 + E\left(\int_0^{\tau_n^b \wedge \tau_y^b} C_1(b, \omega) \|p_n(s)\| ds\right).$$

Соотношение (10) справедливо и после замены процесса $C(t, b, \omega)$ на $C_1(b, \omega)$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_0^{\tau_n^b \wedge \tau_y^b} C_1(b, \omega) \|p_n(s, \omega)\| ds\right) = 0.$$

Для любого $b > 0$ существует $\nu(b) > 0$ такое, что для любого $n \geq \nu(b)$ выполняется неравенство $E(\int_0^{\tau_n} C_1(b, \omega) \|p_n(t, \omega)\| dt) \leq 1$. Для всех $n \geq \nu(b)$ имеем $E(\psi_1(\tau)(\|x_n(\tau, \omega)\|^2 + 1)) \leq 2$. Для любого $d > 0$ и всех $n \geq \nu(b)$ согласно лемме 1 выполняется неравенство

$$P\left\{\sup_{t \leq \tau_n^b \wedge \tau_y^b} \psi_1(t)(\|x_n(t, \omega)\|^2 + 1) \geq d\right\} \leq \frac{2}{d},$$

из которого имеем

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{n \geq \nu(b)} P\left\{\sup_{t \leq \tau_y^b \wedge \tau_n^b} \psi_1(t)\|x_n(t, \omega)\|^2 \geq b\right\} = 0. \quad (13)$$

Из соотношения (13) вытекает равенство

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{n \geq \nu(b)} P\{\tau_n^b < 1\} = 0. \quad (14)$$

Действительно, если предположить, что равенство (14) не имеет места, то существуют число $r_0 > 0$ и последовательности натуральных чисел $m_i \rightarrow \infty$, $n_i \rightarrow \infty$, $n_i \geq \nu(m_i)$, такие, что $P\{\tau_{n_i}^{m_i} < 1\} \geq r_0$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Так как $E(\int_0^1 \|y(t, \omega)\|^2 dt) < +\infty$, а процесс $\psi_1(t, \omega)$ не зависит от m_i , то $\lim_{i \rightarrow \infty} P\{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|y(t, \omega)\| \leq m_i\} = 1$, $\lim_{i \rightarrow \infty} P\{\psi_1(1, \omega)m_i \geq 36\} = 1$. Отсюда и из соотношения (13) получаем противоречивое соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{n \geq \nu(b)} P\left\{\sup_{t \leq \tau_y^b \wedge \tau_n^b} \psi_1(t)\|x_n(t, \omega)\|^2 \geq b\right\} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} P\left\{\sup_{t \leq \tau_{n_i}^{m_i} \wedge \tau_y^{m_i}} \psi_1(t)\|x_{n_i}(t, \omega)\|^2 \geq m_i\right\} \geq \\ &\geq \liminf_{i \rightarrow \infty} P\left\{\frac{1}{36}\psi_1(\tau_{n_i}^{m_i})\|x_{n_i}(\tau_{n_i}^{m_i}, \omega)\|^2 \geq m_i, \tau_{n_i}^{m_i} < 1, \sup_{0 \leq t \leq 1} \|y(t, \omega)\| \leq m_i\right\} \geq \\ &\geq \liminf_{i \rightarrow \infty} P\left\{\frac{1}{36}\psi_1(1)m_i \geq 1, \tau_{n_i}^{m_i} < 1, \sup_{0 \leq t \leq 1} \|y(t, \omega)\| \leq m_i\right\} \geq r_0/2 > 0. \end{aligned}$$

Из (12) и (14) имеем

$$\sup_{t \in [0, 1]} (\|x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)\|) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (15)$$

Члены последовательности $x_n(t, \omega)$, $(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega$, являются случайными величинами, определёнными на Ω со значениями в пространстве $C([0, 1], \mathbb{R}^d)$ с нормой $\|\cdot\| = \sup_{t \in [0, 1]} \|\psi(t)\|$. Из соотношения (15) вытекает, что последовательность $x_n(t, \omega)$ является фундаментальной по вероятности. Следовательно, существует непрерывный процесс $x(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, такой, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} (\|x_n(t, \omega) - x(t, \omega)\|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (16)$$

Так как $\|x_n(\kappa_n(t), \omega) - x(t, \omega)\| \leq \|x_n(t, \omega) - x(t, \omega)\| + \|x_n(\kappa_n(t), \omega) - x_n(t, \omega)\| = \|p_n(t, \omega)\| + \|x_n(t, \omega) - x(t, \omega)\|$, то, используя соотношения (5), (14), (16), получаем, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} (\|x_n(\kappa_n(t), \omega) - x(t, \omega)\|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (17)$$

Процесс $x(t, \omega)$ является $(\mathcal{F}_t)$ -согласованным, так как такими являются процессы $x_n(t, \omega)$. Пусть $b \in \mathbb{R}_+$, $\tau(b, \omega) = \inf\{t: \|x(t, \omega)\| > b, \|y(t, \omega)\| > b\}$. Зафиксируем $t \in \mathbb{R}_+$ и выберем под-

последовательность $x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s), \omega)$ последовательности $x_n(\kappa_n(s), \omega)$, сходящуюся равномерно по $s \in [0, t]$ п. н. На основании теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\left\| \int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} (g(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s), \omega), y(s)) - g(s, x(s, \omega), y(s))) dW(s) \right\|^2 \right) = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} \|g(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s), \omega), y(s)) - g(s, x(s, \omega), y(s))\|^2 ds \right) = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} (f(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s), \omega), y(s), \omega) - f(s, x(s, \omega), y(s), \omega)) ds \right\| = 0 \quad \text{п. н.} \end{aligned} \quad (18)$$

Для некоторой подпоследовательности $x_{n_{k_i}}(\kappa_{n_{k_i}}(s), \omega)$ выполняется равенство [15, с. 111]

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} g(s, x_{n_{k_i}}(\kappa_{n_{k_i}}(s), y(s))) dW(s) = \int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} g(s, x(s, \omega), y(s)) dW(s) \quad \text{п. н.} \quad (19)$$

Из равенств (4), (18), (19) для любой последовательности $b_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$ имеем

$$x(t \wedge \tau(b_l, \omega), \omega) = \eta(\omega) + \int_0^{t \wedge \tau(b_l, \omega)} f(s, x(s, \omega), y(s), \omega) ds + \int_0^{t \wedge \tau(b_l, \omega)} g(s, x(s, \omega), y(s)) dW(s) \quad \text{п. н.} \quad (20)$$

Из соотношений (14), (17) и $\lim_{l \rightarrow +\infty} P\{\tau_y^{b_l} < 1\} = 1$ следует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\tau(b_l, \omega) \wedge t) = t \quad \text{п. н.}$$

Переходя к пределу в (20) при $l \rightarrow \infty$, убеждаемся, что при каждом $t \in [0, 1]$ с вероятностью, равной единице,

$$x(t, \omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_0^t g(s, x(s, \omega), y(s, \omega)) dW(s). \quad (21)$$

Определим на промежутке $[1, 2]$ процесс $u(t, \omega)$ следующим образом:

$$u(t, \omega) = h(t-1, x(t-1, \omega), u(t-1, \omega)) + q(t-1, x(t-1, \omega), u(t-1, \omega))W_1(t, \omega).$$

Из условий теоремы 1 и из леммы 2 следует, что процесс $u(t, \omega)$ является $(\beta([1, 2]) \times \mathcal{F})$ -измеримым и $(\mathcal{F}_t)$ -согласованным. Положим для $t \in [1, 2]$ $y(t, \omega) = u(t, \omega)$.

Покажем, что $E(\|x(1, \omega)\|)^2 < +\infty$ и $E(\int_1^2 \|y(s)\|^2 ds) < +\infty$. Действительно, из условия А) вытекает

$$\begin{aligned} E(\|x(t \wedge \tau(b, \omega))\|^2) &= E(\|\eta\|^2) + E \left(\int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} (2x(s)^T f(s, x(s), y(s), \omega) + \|g(s, x(s), y(s))\|^2) ds \right) \leq \\ &\leq E(\|\eta(\omega)\|^2) + E \left(\int_0^1 M(1)(1 + \|y(s)\|^2) ds + \int_0^t M(1)\|x(s \wedge \tau(b, \omega))\|^2 ds \right). \end{aligned}$$

Отсюда, сначала используя лемму Гронуолла–Беллмана, а затем переходя к пределу в полученном неравенстве при $b \rightarrow \infty$, имеем

$$E(\|x(t, \omega)\|^2) \leq \exp\{M(1)\}(E(\|\eta\|^2) + E\left(\int_0^1 M(1)(1 + \|y(s)\|^2) ds\right)) \quad (22)$$

и, следовательно, $E(\|x(1, \omega)\|)^2 < +\infty$.

Пусть $2m$ — наименьшее чётное натуральное число, большее чем $2\beta/(\beta - 2)$. Далее, используя условие В), неравенства Гёльдера, Ляпунова, а также неравенства (3), (22) и равенство $E(\|W_1(t)\|^{2m}) = C_1 t^m$, получаем

$$\begin{aligned} E\left(\int_1^2 \|y(s, \omega)\|^2 ds\right) &\leq C_2 \left[E\left(\int_1^2 \|h(s-1, x(s-1), y(s-1))\|^2 ds\right) + \right. \\ &\quad \left. + E\left(\int_1^2 \|q(s-1, x(s-1), y(s-1))\|^2 \|W_1(s)\|^{2m} ds\right) \right] \leq \\ &\leq C_3 \left[E\left(\int_1^2 (1 + \|x(s-1)\|^2 + \|y(s-1)\|^2) ds\right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^2 (E(\|q(s-1, x(s-1), y(s-1))\|^\beta))^{2/\beta} (E(\|W_1(s)\|^{2m}))^{1/(2m)} ds \right] \leq \\ &\leq C_4 \left[E\left(\int_1^2 (1 + \|x\|^2 + \|y\|^2) ds\right) + \int_1^2 s^{1/2} E(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2) ds \right] \leq \\ &\leq C_5 E\left(\int_1^2 (1 + \|x(s-1)\|^2 + \|y(s-1)\|^2) ds\right) < +\infty, \end{aligned}$$

где C_i , $i = \overline{1, 5}$, — некоторые постоянные.

Затем для каждого натурального n определим процессы $x_n(t, \omega)$, $t \in [1, 2]$, следующим образом: для $t \in [1, 1 + 1/n]$

$$x_n(t, \omega) = x(1, \omega) + \int_1^t f(s, x(1, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_1^t g(s, x(1, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega),$$

а для $t \in [1 + k/n, 1 + (k+1)/n]$, $k = \overline{1, n-1}$,

$$\begin{aligned} x_n(t, \omega) &= x_n(1 + k/n, \omega) + \int_{1+k/n}^t f(s, x_n(1 + k/n, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \\ &\quad + \int_{1+k/n}^t g(s, x_n(1 + k/n, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega). \end{aligned}$$

Далее, используя последовательность $x_n(t, \omega)$, $t \in [1, 2]$, аналогично $x(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, построим процесс $x(t, \omega)$ на промежутке $[1, 2]$. Продолжая, построим решение гибридной системы и на промежутке $[0, +\infty)$.

Покажем единственность построенного решения для рассматриваемой системы. Предположим, что система (2) имеет два решения $x_1(t, \omega)$, $y_1(t, \omega)$ и $x_2(t, \omega)$, $y_2(t, \omega)$ такие, что при каждом $t \in [0, 1]$ с вероятностью, равной единице, $y_1(t, \omega) = y_2(t, \omega) = z(t, \omega)$ и $x_1(0, \omega) = x_2(0, \omega)$. Пусть $\sigma_m^i = \inf\{t \in [0, 1] : \|x_i(t, \omega)\| > m\}$, $i = 1, 2$, $\epsilon(t, m, \omega) = \int_0^t k(s, m, \omega) ds$, $\psi(t, m, \omega) = \exp\{-\epsilon(t, m, \omega)\}$. Используя формулу Ито, имеем

$$\begin{aligned} & \psi(t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2, m, \omega) \|x_1(t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2) - x_2(t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2)\|^2 = \\ &= \int_0^{t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2} \psi(s) \left(2(x_1(s) - x_2(s))^T (f(s, x_1(s), z(s), \omega) - f(s, x_2(s), z(s), \omega)) - \right. \\ & \quad \left. - k(s, m, \omega) \|x_1(s) - x_2(s)\|^2 + \|g(s, x_1(s), z(s)) - g(s, x_2(s), z(s))\|^2 \right) ds + \\ & \quad + \int_0^{t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2} \psi(s) 2(x_1(s) - x_2(s))^T (g(s, x_1(s), z(s)) - g(s, x_2(s), z(s))) dW(s). \end{aligned} \quad (23)$$

При каждом $m \in \mathbb{R}_+$ из (23), используя условие А), для любого момента остановки τ , $\tau \leq 1 \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2$, получаем $E(\psi(\tau, m, \omega) \|x_1(\tau, \omega) - x_2(\tau, \omega)\|^2) = 0$. Так как $\psi(\tau, m, \omega) \neq 0$, то $\|x_1(\tau, \omega) - x_2(\tau, \omega)\|^2 = 0$ п. н. Из последнего равенства вытекает, что с вероятностью, равной единице, имеет место равенство $x_1(\tau, \omega) = x_2(\tau, \omega)$, поэтому $x_1(t, \omega) = x_2(t, \omega)$ при каждом $t \in [0, \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2]$ п. н. Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2) = 1$ п. н., то отсюда следует, что для любого $t \in [0, 1]$ с этой же вероятностью имеет место равенство $x_1(t, \omega) = x_2(t, \omega)$, а на промежутке $[1, 2]$ — равенства $y_1(t, \omega) = y_2(t, \omega) = y(t, \omega)$. Продолжая такие рассуждения далее шаг за шагом, покажем, что решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают при каждом $t \in [0, +\infty)$ с вероятностью, равной единице. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= (-x_1^3(t) + x_2(t)y(t))dt + y(t)dW(t), \\ dx_2(t) &= (2tx_1^2(t) - t^2x_2(t) - x_1(t)y(t))dt + x_1(t)dW(t), \\ y(t+1) &= x_1(t) + tx_2(t) + y(t) + t^3W_1(t+1), \end{aligned}$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$, $W(t)$, $W_1(t)$ — одномерные процессы. Условие А) для этой системы вытекает из непрерывной дифференцируемости всех функций, кроме броуновских движений, входящих в систему. Так как для рассматриваемой системы $2x^T f(t, x, y) = -2(x_1^2 - tx_2)^2 \leq 0$, $\|g(t, x, y)\|^2 = y^2 + x_1^2$, $\|h\|^2 = (x_1 + tx_2 + y)^2$, $\|q\|^2 = t^6$, то ясно, что условие В) имеет место. Следовательно, для любых начальных условий, удовлетворяющих условиям теоремы 1, рассматриваемая система имеет единственное решение.

2. ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА С РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим гибридную систему вида

$$dx(t, \omega) = f(t, x(t, \omega), y(t, \omega), \omega) dt + g(t, x(t, \omega), y(t, \omega)) dW(t, \omega), \quad (24)$$

$$y(t, \omega) = h(t, x(t, \omega), y(t-1, \omega)). \quad (25)$$

Определение 2. Под решением системы (24), (25) с начальными условиями $\eta(\omega)$, $u(t, \omega)$, где $u: [-1, 0] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$ — $(\beta([-1, 0]) \times \mathcal{F})$ -измеримый $(\mathcal{F}_0)$ -согласованный процесс, понимаем пару процессов $(x(t, \omega), y(t, \omega))$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $x(t, \omega)$ — d -мерный непрерывный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный случайный процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком

$(\mathcal{F}_t)$, $y(t, \omega) - (\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измеримый r -мерный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный случайный процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $(\mathcal{F}_t)$, такие, что для каждого $t \geq 0$ $\int_0^t \|f(s, x(s, \omega), y(s, \omega))\| ds < +\infty$, $\int_0^t \|g(s, x(s, \omega), y(s, \omega))\|^2 ds < +\infty$ п. н. и для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ с вероятностью, равной единице, имеют место равенства

$$\begin{aligned} x(t, \omega) &= \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s, \omega), y(t, \omega)) ds + \int_0^t g(s, x(s, \omega), y(t, \omega)) dW(s, \omega), \\ y(t, \omega) &= h(t, x(t, \omega), y(t-1, \omega)), \\ y(t, \omega) &= u(t, \omega), \quad t \in [-1, 0), \end{aligned}$$

где первый интеграл является интегралом Лебега, а второй — интегралом Ито.

Будем говорить, что отображения f , g и h удовлетворяют **условию A')**, если:

A₁') существует вещественное отображение $M_1(b, \omega)$, $(b, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, такое, что при каждом фиксированном b отображение $M_1(b, \cdot)$ $(\mathcal{F})$ -измеримо, $E(M_1(b, \omega)) < +\infty$, и для любых $b \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq b, \|x\| \leq b, \|y\| \leq b} \|f(t, x, h(t, x, y), \omega)\| \leq M_1(b, \omega);$$

A₂') существуют вещественные отображения $k(t, b, \omega)$, $k_1(t, b)$, определённые соответственно на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, такие, что при каждом фиксированном $b \in \mathbb{R}_+$ процесс $k(\cdot, b, \cdot)$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерим, а функция $k_1(\cdot, b)$ измерима по Борелю, и для любых $b \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$ $E(\int_0^a k^2(t, b, \omega) dt) < +\infty$, $E(\int_0^a k_1^2(t, b) dt) < +\infty$, при всех $b \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x, x_1 \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$, $\|x\| \leq b$, $\|x_1\| \leq b$, $\|y\| \leq b$, $\omega \in \Omega$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 2(x - x_1)^T (f(t, x, y, \omega) - f(t, x_1, y_1, \omega)) &\leq k(t, b, \omega) (\|x - x_1\|^2 + \|y - y_1\|^2), \\ \|g(t, x, y) - g(t, x_1, y_1)\|^2 &\leq k_1(t, b) (\|x - x_1\|^2 + \|y - y_1\|^2), \\ \|h(t, x, y) - h(t, x_1, y_1)\|^2 &\leq k_1(t, b) \|x - x_1\|^2. \end{aligned}$$

Будем говорить, что отображения f , g , h удовлетворяют **условию B')**, если существует вещественное измеримое по Борелю монотонно возрастающее отображение $M(t)$ такое, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$, $\omega \in \Omega$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} 2x^T f(t, x, y, \omega) &\leq M(t) (1 + \|x\|^2 + \|y\|^2), \\ \|g(t, x, y)\|^2 + \|h(t, x, y)\|^2 &\leq M(t) (1 + \|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Теорема 2. Если отображения f , g , h удовлетворяют условиям A') и B'), то для любого $(\mathcal{F}_0)$ -измеримого вектора $\eta(\omega)$ и для любого $(\beta([-1, 0]) \times \mathcal{F})$ -измеримого $(\mathcal{F}_0)$ -согласованного случайного процесса $u(t, \omega)$, $t \in [-1, 0]$, таких, что

$$E(\|\eta(\omega)\|^2) < +\infty, \quad E\left(\int_{-1}^0 \|u(t, \omega)\|^2 dt\right) < +\infty,$$

система (24), (25) имеет единственное решение с начальными условиями η , и.

Доказательство. На промежутке $[-1, 0)$ возьмём $y(t, \omega) = u(t, \omega)$. Для каждого натурального n определим процессы $x_n(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, следующим образом: для $t \in [0, 1/n]$

$$x_n(t, \omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, \eta(\omega), h(s, \eta(\omega)), y(s-1, \omega), \omega) ds + \\ + \int_0^t g(s, \eta(\omega), h(s, \eta(\omega)), y(s-1, \omega)) dW(s, \omega),$$

а для $t \in [k/n, (k+1)/n]$, $k = \overline{1, n-1}$,

$$x_n(t, \omega) = x_n(k/n, \omega) + \int_{k/n}^t f(s, x_n(k/n, \omega), h(s, x_n(k/n, \omega)), y(s-1, \omega), \omega) ds + \\ + \int_{k/n}^t g(s, x_n(k/n, \omega), h(s, x_n(k/n, \omega)), y(s-1, \omega)) dW(s, \omega).$$

При выполнении условий $A')$, $B')$ функции $f_1(t, x, y) = f(t, x, h(t, x, y))$, $h(t, x, y)$, $g_1(t, x, y) = g(t, x, h(t, x, y))$ удовлетворяют условиям $A)$, $B)$. Рассуждая далее так же, как и при доказательстве теоремы 1 по последовательности $x_n(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, можно построить измеримый $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный процесс $x(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, такой, что при каждом $t \in [0, 1]$ с вероятностью, равной единице,

$$x(t, \omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s, \omega), h(s, x(s, \omega)), y(s-1, \omega)) ds + \\ + \int_0^t g(s, x(s, \omega), h(s, x(s, \omega)), y(s-1, \omega)) dW(s).$$

Определим на отрезке $[0, 1]$ процесс $u(t, \omega)$ как

$$u(t, \omega) = h(t, x(t, \omega), y(t-1, \omega)).$$

Из условий теоремы и из леммы 2 следует, что процесс $u(t, \omega)$ является $(\beta([0, 1]) \times \mathcal{F})$ -измеримым и $(\mathcal{F}_t)$ -согласованным. Положим $y(t, \omega) = u(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$. На следующем шаге построим процесс $x(t, \omega)$ на отрезке $[1, 2]$, аналогично процессу $x(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$. Продолжая такие построения, мы шаг за шагом построим решение гибридной системы (24), (25) на промежутке $[0, +\infty)$. Определение и доказательство единственности решения для системы (24), (25) такие же, как и для системы (1), (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказаны теоремы существования и единственности решений для двух нелинейных стохастических дифференциально-разностных гибридных систем. Установленные теоремы применимы и к управляемым гибридным системам, содержащим управление вида $U(t, \omega)$ в правой части стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t, \omega) = f(t, x(t, \omega), y(t, \omega), U(t, \omega))dt + g(t, x(t, \omega), y(t, \omega))dW(t, \omega),$$

если $U(t, \omega)$ — измеримый $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный процесс. Без существенных изменений могут быть получены теоремы существования и единственности для стохастических дифференциально-разностных гибридных систем с разностными уравнениями вида

$$y(k+1) = h(k, x(k), y(k)) + q(k, x(k), y(k))W_1(k+1)$$

или

$$y(k, \omega) = h(k, x(k, \omega), y(k-1, \omega)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shu, Q. Dynamical properties of a two-gene network with hysteresis / Q. Shu, R.G. Sanfelice // Information and Computation. — 2014. — V. 236. — P. 102–121.
2. Bullo, F. Modeling and controllability for a class of hybrid mechanical systems / F. Bullo, M. Zefran // IEEE Trans. Robot. Automat. — 2002. — V. 18, № 4. — P. 563–573.
3. Mills, J.K. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks / J.K. Mills, A.A. Goldenberg // IEEE Trans. Robot. Automat. — 1989. — V. 5. — P. 30–46.
4. Куржанский, А.Б. Отчет о 16-м Международном конгрессе ИФАК (IFAC) — Международной федерации по автоматическому управлению / А.Б. Куржанский // Автомат. и телемех. — 2006. — № 1. — С. 183–189.
5. Luenberger, D.G. Singular dynamic Leontief systems / D.G. Luenberger, A. Arbel // Econometrica. — 1977. — V. 45. — P. 991–995.
6. Управление равновесными случайными процессами на финансовых рынках / В.А. Деева, М.В. Аветисян, В.Н. Платонова, М.Я. Шапиро. — М. : Юриспруденция, 2007. — 136 с.
7. Марченко, В.М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В.М. Марченко, О.Н. Поддубная // Докл. РАН. — 2005. — Т. 404, № 4. — С. 465–469.
8. Марченко, В.М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем / В.М. Марченко, И.М. Борковская // Тр. БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информатика. — 2012. — № 6. — С. 7–10.
9. Марченко, В.М. Гибридные динамические системы с многомерным временем. Представление решений / В.М. Марченко, И.М. Борковская, О.Н. Пыжкова // Тр. БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информатика. — 2015. — № 6. — С. 3–9.
10. Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems / W.P.M.H. Heemels, B. De Schutter, J. Lunze, M. Lazar // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2010. — V. 368, № 1930. — P. 4937–4960.
11. Roesser, R.P. A discrete state-space model for linear image processing / R.P. Roesser // IEEE Trans. Automat. Control. — 1975. — V. AC-20. — P. 1–10.
12. Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions / G. Yin, X. Mao, C. Yuan, D. Cao // SIAM J. Math. Anal. — 2009. — V. 41, № 6. — P. 2335–2352.
13. Крылов, Н.В. Простое доказательство существования решения уравнения Ито с монотонными коэффициентами / Н.В. Крылов // Теория вероятн. и ее примен. — 1990. — Т. 35, вып. 3. — С. 576–580.
14. Леваков, А.А. Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васильковский. — Минск : БГУ, 2019. — 495 с.
15. Липцер, Р.Ш. Статистика случайных процессов / Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев. — М. : Наука, 1974. — 696 с.
16. Kisielewicz, M. Differential Inclusions and Optimal Control / M. Kisielewicz. — Dordrecht–Boston–London : Kluwer Academic Publishers, 1991. — 240 p.

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREMS FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE HYBRID SYSTEMS

A. A. Levakov¹, D. A. Dolzhenkova²¹Belarusian State University, Minsk, Belarus²LLC HiQo Solutions, Minsk, Belaruse-mail: ¹levakov123321@gmail.com, ²dar.ya.d.a105@gmail.com

A stochastic differential-difference hybrid system is a system of interacting variables whose dynamics are described by stochastic differential equations for some of them and difference equations for others. Systems with two types of difference equations are examined: first, a difference equation in the form of a process involving the multiplicative Wiener process, and second, a difference equation with delay. The existence and uniqueness theorems for both systems have been proven. The basic conditions on the system's parameters are local Lipschitz conditions and linear growth order.

Keywords: hybrid system, stochastic equation, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Shu, Q. and Sanfelice, R.G., Dynamical properties of a two-gene network with hysteresis, *Information and Computation*, 2014, vol. 236, pp. 102–121.
2. Bullo, F. and Zefran, M., Modeling and controllability for a class of hybrid mechanical systems, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 2002, vol. 18, no. 4, pp. 563–573.
3. Mills, J.K. and Goldenberg, A.A., Force and position control of manipulators during constrained motion tasks, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 1989, vol. 5, pp. 30–46.
4. Kurzhanskiy, A.B. Report on the XVI International Congress of the International Federation of Automatic Control, *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 166–171.
5. Luenberger, D.G. and Arbel, A., Singular dynamic Leontief systems, *Econometrica*, 1977, vol. 45, pp. 991–995.
6. Deeva, V.A., Avetisyan, M.V., Platonova, V.N., and Shapiro, M.Ya., *Upravlenie ravnovesnymi sluchajnymi processami na finansovyh rynkakh*, Moscow: Yurisprudenciya, 2007.
7. Marchenko, V.M. and Poddubnaya, O.N., Representation of solutions and relative controllability of linear differential-algebraic systems with many delays, *Doklady RAN (Doklady Mathematics)*, 2005, vol. 404, no. 4, pp. 465–469.
8. Marchenko, V.M. and Borkovskaya, I.M., Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems, *Trudy BGTU. Ser. 3. Fiziko-matematicheskie nauki i informatika* (Proceedings of BSTU. Physics and Mathematics, Informatics), 2012, no. 6, pp. 7–10.
9. Marchenko, V.M., Borkovskaya, I.M., and Pyzhkova, O.N., Hybrid dynamic 2D-systems. Representation of solutions, *Trudy BGTU. Ser. 3. Fiziko-matematicheskie nauki i informatika* (Proceedings of BSTU. Physics and Mathematics. Informatics), 2015, no. 6, pp. 3–9.
10. Heemels, W.P.M.H., De Schutter, B., Lunze, J., and Lazar, M., Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2010, vol. 368, no. 1930, pp. 4937–4960.
11. Roesser, R.P., A discrete state-space model for linear image processing, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1975, vol. AC-20, pp. 1–10.
12. Yin, G., Mao, X., Yuan, Ch., and Cao, D., Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions, *SIAM J. on Math. Anal.*, 2009, vol. 41, no. 6, pp. 2335–2352.
13. Krylov, N.V., A simple proof of the existence of a solution to the Itô equation with monotone coefficients, *Theory Probab. Appl.*, 1990, vol. 35, iss. 3, pp. 583–587.
14. Levakov, A.A. and Vaskovsky, M.M., *Stokhasticheskie differentsial'nye uravnenia i vkluchenia* (Stochastic differential equations and inclusion), Minsk, BSU, 2019.
15. Lipzer, R.S. and Sirjaev, A.N., *Statistika sluchainykh processov* (Statistics of Random Processes), Moscow: Nauka, 1974.
16. Kisielewicz, M., *Differential Inclusions and Optimal Control*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1991.