

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В. М. Буданов

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

e-mail: vlbudanov@gmail.com

Поступила в редакцию 02.06.2023 г., после доработки 19.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Обоснован аналитический метод построения периодических решений для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений полиномиального типа. Периодические решения построены в виде рядов Фурье, коэффициенты которых являются полиномами, зависящими от параметра без предположения о его малости. В качестве примеров рассмотрены уравнение Ван дер Поля и система Лоренца.

*Ключевые слова:* периодическое решение, нелинейная система, последовательные приближения.

DOI: 10.31857/S0374064124050022, EDN: LBTMXF

## ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где линейная часть является матрицей  $\mathbf{A}$  порядка  $n \times n$ , а нелинейная — вектор-функцией  $\mathbf{f}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , компоненты которой представляют собой полиномы степени не ниже двух от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . На данный момент единственным математически обоснованным методом исследования периодических решений таких систем считается асимптотический метод малого параметра, развитый Н.Н. Боголюбовым и Ю.А. Митропольским [1, гл. 6]. Идея использования малого параметра появилась ещё в трудах А. Пуанкаре. Ряд принципиальных теорем о сходимости рядов, представляющих периодические решения, доказаны А.М. Ляпуновым, им же предложен практический метод построения рядов, в частности, для систем, называемых теперь системами Ляпунова. В монографии [2, гл. 2, § 12] описан этот метод и решён ряд задач с его использованием. Однако указывается, что сходимость имеет место при малых значениях параметра, более того, общепринятым является утверждение, что асимптотические методы приводят к расходящимся рядам [3, с. 89]. В то же время имеются работы, в которых доказывается сходимость метода последовательных приближений для конечных значений параметра, в частности, для уравнения Ван дер Поля [4, § 9.1].

В данной статье метод, предложенный Ляпуновым, обосновывается для более широкого класса систем. Это позволяет построить решение в виде рядов для периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, в частности, для уравнения Ван дер Поля и системы Лоренца (при исследовании решений для системы Лоренца применяются исключительно численные методы [5, §§ 2.3, 6.4]). При изменении параметров в системе Лоренца происходят качественные изменения структуры фазового потока от единственного стока до “странного” аттрактора. Мы будем рассматривать промежуточную ситуацию, когда все особые точки неустойчивы и существуют периодические решения. Эти периодические решения

имеют седловой тип, поэтому даже их численное нахождение доставляет определённые проблемы [6, § 9.2]. В данной работе строятся аналитические приближения этих периодических траекторий. В статье [7] построены периодические и квазипериодические решения для математического маятника и связанных маятников, а в [8] представлено квазипериодическое решение для неограниченной задачи трёх тел в двухпланетном варианте.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Предлагаемый метод является модификацией метода Ляпунова, но применяется к системе, которая не является системой Ляпунова, так как не консервативна. Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть имеется нелинейная система

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

удовлетворяющая условиям:

- 1)  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  — вектор-функция, компоненты которой — полиномы степени не меньше первой;
- 2) в промежутке  $\mu \in [0, \bar{\mu}]$  система имеет периодическое решение, представимое в виде разложения по степеням  $\mu$  с коэффициентами в виде сходящихся рядов Фурье

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^k \sum_{l=0}^{+\infty} (\mathbf{a}_{kl} \cos(l\omega t) + \mathbf{b}_{kl} \sin(l\omega t)), \tag{2}$$

где частота  $\omega$  также представима в виде сходящегося ряда

$$\omega = \omega_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^k \theta_k. \tag{3}$$

Тогда частичные ряды  $\mathbf{x}_n, \omega_n$ , получаемые из (2), (3) отбрасыванием слагаемых степени большей  $n$ , удовлетворяют с точностью  $O(\mu^{n+1})$  следующему уравнению:

$$\dot{\mathbf{x}}_n + \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) = 0. \tag{4}$$

**Доказательство.** Представим периодическое решение (2), (3) в виде  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n + \mu^{n+1}\mathbf{y}_{n+1}$ ,  $\omega = \omega_n + \mu^{n+1}\theta_{n+1}$ . В этом случае тригонометрические члены можно записать с использованием двух первых членов разложения Тейлора:

$$\begin{aligned} \cos(l\omega t) &= \cos(l\omega_n t) - l\mu^{n+1}\theta_{n+1}t \sin(l\omega_n t) + o(\mu^{n+1}), \\ \sin(l\omega t) &= \sin(l\omega_n t) + l\mu^{n+1}\theta_{n+1}t \cos(l\omega_n t) + o(\mu^{n+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, решение примет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_n(\omega_n) + \mu^{n+1}\mathbf{z}_n(\omega_n) + o(\mu^{n+1}),$$

где  $\mathbf{z}_n$  содержит не только тригонометрические, но и смешанные члены с множителем  $t$ . Тогда

$$\mu\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1} + O(\mu^n)) = \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) + O(\mu^{n+1}).$$

С учётом этих преобразований уравнение (1) для частичных рядов может быть представлено в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_n + \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) = -\mu^{n+1}(\dot{\mathbf{z}}_n + \mathbf{A}\mathbf{z}_n) + O(\mu^{n+1}).$$

Теорема доказана.

**Следствие.** Если решение представляется в виде сходящихся рядов по степеням параметра в некотором промежутке  $\mu \in [0, \mu^*]$ , то оно может быть найдено методом последовательных приближений по формуле (4). При этом найденные коэффициенты не меняются в последующих приближениях.

Отметим, что формулировка теоремы не предполагает ни обоснования условий существования решения в указанной форме, ни анализа диапазона сходимости получаемых формальных рядов. Теорема только обосновывает принципиальную возможность того, что при удачном выборе параметра формальные ряды, построенные методом последовательных приближений, могут оказаться сходящимися при немалых значениях этого параметра. Приведённые ниже примеры иллюстрируют такую возможность. Отметим также, что отличие (3) от замены Ляпунова состоит в том, что вводится ряд для частоты, а не для периода. В случае периодических решений, близких к гомоклиническим траекториям, период стремится к бесконечности и для него получается расходящийся ряд, в то время как частота стремится к нулю и соответствующий ряд может быть сходящимся.

## 2. УРАВНЕНИЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Рассмотрим известное уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}, \quad (5)$$

исследованию которого посвящено много работ, особенно в предположении, что значение параметра  $\mu$  является малой величиной. Имеются также работы, в которых численно строятся коэффициенты ряда Фурье для периодического решения — предельного цикла для фиксированных немалых значений параметра, больших единицы. Здесь мы применим изложенный выше теоретический результат для построения ряда по степеням параметра. В качестве нулевого приближения возьмём функцию

$$x_0 = A \cos \psi, \quad \psi = \omega t.$$

Очевидно, что она удовлетворяет уравнению (5) с точностью до нулевой степени параметра при  $\omega = 1$ . Подставив её в правую часть (5), получим уравнение для первого приближения:

$$\ddot{x} + x = \mu A \omega \left( \frac{1}{4} A^2 - 1 \right) \sin \psi + \frac{1}{4} \mu A^3 \omega \sin(3\psi).$$

В первом и дальнейших приближениях полагаем, что первая гармоника не изменяется. Здесь это означает, что коэффициент при  $\sin \psi$  должен быть равен нулю, т.е.  $A^2 = 4$ . С учётом этого понизим степень амплитуды для третьей гармоники, а также положим  $\omega = 1$ . В результате получим уравнение для добавки по третьей гармонике:

$$\ddot{x} + x = \mu A \sin(3\psi).$$

Решением этого уравнения является, очевидно, функция  $x = -1/8\mu A \sin(3\psi)$ , и решение первого приближения определяется по формуле

$$x_1 = A \left( \cos \psi - \frac{1}{8} \mu \sin(3\psi) \right), \quad A^2 = 4, \quad \omega = 1.$$

Значения амплитуды и частоты справедливы только для первого приближения, поэтому для построения второго приближения подставляем в правую часть (5) только выражение

для  $x$ . Получаем уравнение второго приближения, в котором останутся те же члены при первой степени параметра и добавятся члены второго порядка. Члены более высокого порядка отбрасываем и получаем уравнение для добавок второго порядка:

$$\ddot{x} + x = \mu^2 A \omega \left[ \frac{1}{32} A^2 \cos \psi + \left( \frac{3}{16} A^2 - \frac{3}{8} \right) \cos(3\psi) + \frac{5}{32} A^2 \cos(5\psi) \right].$$

Для первой гармоники должно остаться решение  $x = A \cos \psi$ ,  $\psi = \omega t$ , что означает

$$-\omega^2 + 1 = \frac{1}{32} \mu^2 \omega A^2.$$

Поправок второго порядка на амплитуду не возникает, поэтому подставляем  $A^2 = 4$  и для частоты получаем уточнённое значение  $\omega = 1 - \mu^2/16$ . Для высших гармоник находим частные решения и получаем добавку второго порядка по параметру:

$$x_2 = x_1 - A \mu^2 \left( \frac{3}{64} \cos(3\psi) + \frac{5}{192} \cos(5\psi) \right).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (5) можно убедиться, что полученное решение удовлетворяет уравнению с точностью до второго порядка по параметру.

Далее процесс построения высших приближений можно продолжить по той же схеме, при этом учитывая, что члены следующего порядка  $\mu^n$  могут появляться не только в нелинейной правой части (5), но и в левой части. Поэтому рассмотрим процедуру построения высших приближений подробнее. По форме двух первых приближений видно, что решение может быть построено как

$$x = Au,$$

где  $u$  зависит от  $\psi$  и  $\mu$ . Пусть найдено приближение с номером  $n-1$ . Приближение с номером  $n$  ищем в виде

$$x_n = A_n u_n, \quad u_n = u_{n-1} + \xi_n \mu^n, \quad \omega_n = \omega_{n-1} + \gamma_n \mu^n, \quad A_n^2 = A_{n-1}^2 + a_n \mu^n.$$

Его подстановка в (5) с использованием теоремы 1 даёт соотношение

$$(\omega_{n-1} + \gamma_n \mu^n)^2 (u_{n-1}'' + \xi_n'' \mu^n) + u_{n-1} + \xi_n \mu^n = \mu \omega_{n-1} u_{n-1}' (1 - (A_{n-2}^2 + a_{n-1} \mu^{n-1}) u_{n-1}^2),$$

которое должно быть выполнено с точностью  $\mu^n$ . Штрихами обозначены производные по  $\psi$ . Выделим члены с множителем  $\mu^n$ :

$$2\omega_0 \gamma_n u_0'' + \omega_0 u_0' u_0^2 a_{n-1} + \omega_0^2 \xi_n'' + \xi_n = [-\omega_{n-1}^2 u_{n-1}'' + \mu \omega_{n-1} u_{n-1}' (1 - A_{n-2}^2) u_{n-1}^2]_n.$$

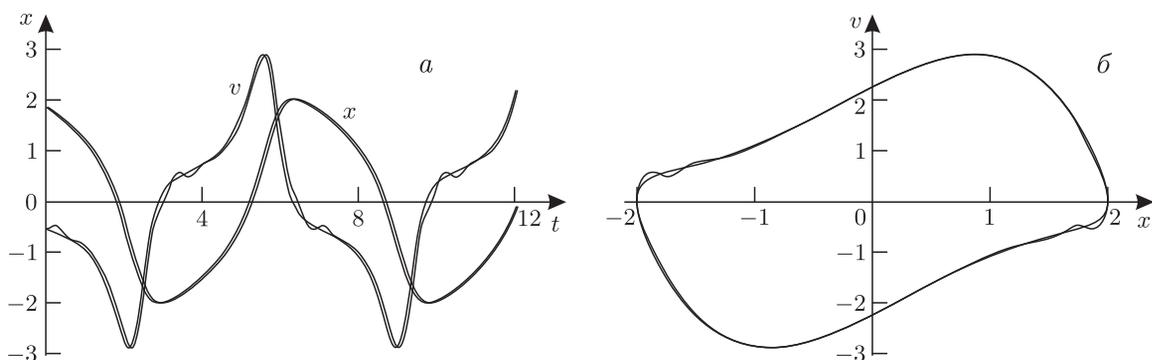
Отметим, что в  $n$ -м приближении определяется поправка к амплитуде порядка  $n-1$ . В этом уравнении правая часть зависит от предыдущего приближения, а в левой части находятся подлежащие определению  $\gamma_n$ ,  $a_{n-1}$ ,  $\xi_n$ . Поскольку  $u_0 = \cos \psi$ , то  $\gamma_n$ ,  $a_{n-1}$  определяются из условия компенсации первой гармоники в правой части по  $\cos \psi$  и  $\sin \psi$  соответственно. После этого очевидным образом находится  $\xi_n$  как сумма высших гармоник. В последовательных приближениях  $\cos \psi$  и  $\sin \psi$  появляются в правой части поочередно, соответственно в рядах для частоты и амплитуды содержатся только чётные степени параметра  $\mu$ . Приведём результат шестого приближения:

$$\omega = 1 - \frac{1}{16} \mu^2 + \frac{17}{3072} \mu^4 + \frac{35}{884736} \mu^6, \quad A^2 = 4 + \frac{1}{16} \mu^2 - \frac{5}{3072} \mu^4,$$

$$\begin{aligned}
u = & \cos \psi - \frac{1}{8} \mu \sin(3\psi) + \mu^2 \left( -\frac{3}{64} \cos(3\psi) - \frac{5}{192} \cos(5\psi) \right) + \\
& + \mu^3 \left( \frac{1}{64} \sin(3\psi) + \frac{85}{4608} \sin(5\psi) + \frac{7}{1152} \sin(7\psi) \right) + \mu^4 \left( \frac{55}{12288} \cos(3\psi) + \frac{955}{110592} \cos(5\psi) + \right. \\
& + \frac{1379}{221184} \cos(7\psi) + \frac{61}{40960} \cos(9\psi) \left. \right) + \mu^5 \left( -\frac{71}{147456} \sin(3\psi) - \frac{16955}{5308416} \sin(5\psi) - \right. \\
& - \frac{101227}{26542080} \sin(7\psi) - \frac{9791}{4915200} \sin(9\psi) - \frac{5533}{14745600} \sin(11\psi) \left. \right) + \\
& + \mu^6 \left( \frac{5365}{14155776} \cos(3\psi) - \frac{22895}{31850496} \cos(5\psi) - \frac{5616737}{3185049600} \cos(7\psi) - \right. \\
& - \frac{891547}{589824000} \cos(9\psi) - \frac{409871}{663552000} \cos(11\psi) - \frac{715247}{7431782400} \cos(13\psi) \left. \right).
\end{aligned}$$

Описанный алгоритм приводит к тем же уравнениям для последовательных приближений, что и разложение решения по степеням параметра [1, § 6; 2, гл. 2, § 12]. Различие состоит лишь в способе вычисления поправок, возникающих от нелинейной компоненты, — прямой подстановкой предыдущего приближения или использованием производных нелинейной функции. Существенными отличиями являются шестой порядок полученного разложения в сравнении с третьим и его интерпретация. В указанных источниках параметр считается малым, в данной работе предполагается, что полученное решение является “начальной частью” ряда, сходящегося при немалых значениях параметра. Это подтверждается сравнением с результатами численного интегрирования, хотя с увеличением значения параметра сильно возрастает число приближений при заданной точности.

На рис. 1 сравниваются полученные аналитические приближения с результатами численного интегрирования уравнения (5). На рис. 1, *а* приведены графики зависимости координаты  $x$  и скорости  $v$  от времени, на рис. 1, *б* — предельный цикл на фазовой плоскости. Начальные условия берутся из аналитического приближения при  $\psi = 0$ . При выполнении последовательных приближений наблюдается сходимость при значении  $\mu = 1$ , в шестом приближении графики визуально совпадают, поэтому приведены результаты для значения  $\mu = 1.2$ . При построении высших приближений для этого значения также наблюдается сходимость (визуальное совпадение в 10-м приближении). Графики показывают хорошую аналитическую аппроксимацию и периода, и формы сильно нелинейных функций, причём видимые отклонения возникают для скорости как следствие дифференцирования высокочастотных составляющих.



**Рис. 1.** Сравнение аналитического и численного решений для уравнения Ван дер Поля.

## 3. СИСТЕМА ЛОРЕНЦА

Продemonстрируем работу метода на примере известной системы Лоренца — системы трёх уравнений относительно трёх неизвестных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с тремя положительными параметрами  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ :

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = \rho x - y - xz, \quad \dot{z} = xy - \beta z. \quad (6)$$

Обычно в литературе эта система рассматривается при значениях параметров  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ . Для третьего параметра существует критическое значение  $\rho \approx 24.7$ , при котором все три особые точки становятся неустойчивыми. Здесь мы рассмотрим построение решения в общем случае и более подробно для значений двух параметров  $\sigma = 8$ ,  $\beta = 3$ , близких к классическим, при которых качественное поведение решений остаётся тем же, но критическое значение третьего параметра и координаты нетривиальных особых точек принимают конечные значения  $\rho_c = 28$ ,  $x_c = y_c = \pm 9$ ,  $z_c = 27$ .

“Правая” стационарная точка определяется соотношениями

$$z_0 = \rho - 1, \quad x_0 = y_0 = \sqrt{\beta(\rho - 1)}. \quad (7)$$

Запишем уравнения в отклонениях от этой точки:

$$\dot{\xi} + \sigma(\xi - \eta) = 0, \quad \dot{\eta} - \xi + \eta + x_0\zeta = -\xi\zeta, \quad \dot{\zeta} - x_0(\xi + \eta) + \beta\zeta = \xi\eta,$$

где характеристическое уравнение линейной части, записанной слева, имеет вид

$$\lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + (\beta\sigma + \beta + x_0^2)\lambda + 2x_0^2\sigma = 0.$$

Найдём критические значения параметров, при которых особая точка теряет устойчивость, при этом характеристическое уравнение должно иметь вид

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda + q) = \lambda^3 + q\lambda^2 + \omega^2\lambda + \omega^2q = 0,$$

соответственно, должно выполняться равенство

$$(\sigma + \beta + 1)(\beta\sigma + \beta + x_0^2) = 2x_0^2\sigma.$$

Отсюда определяются критическое значение для  $x_0$  и далее остальные параметры критической точки:

$$\begin{aligned} x_c^2 &= \frac{\beta(\sigma + 1)(\sigma + \beta + 1)}{\sigma - \beta - 1}, & z_c &= \frac{x_c^2}{\beta} = \frac{(\sigma + 1)(\sigma + \beta + 1)}{\sigma - \beta - 1}, \\ \omega_c^2 &= \beta(\sigma + 1) + x_c^2 = \frac{2\beta\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - \beta - 1}, & \rho_c &= z_c + 1 = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Введём вместо  $\rho$  новый параметр  $r$ :

$$\rho = (\rho_c - 1)(1 - r)^2 + 1, \quad (9)$$

обращающийся в нуль для критического случая. Тогда получается простая связь между координатами особой точки в общем (7) и критическом случаях:

$$z_0 = z_c(1 - r)^2, \quad x_0 = y_0 = x_c(1 - r). \quad (10)$$

Далее сделаем замену переменных так, чтобы в новых переменных  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  диапазон изменения был порядка единицы:

$$x = x_0 + x_c \xi, \quad y = x_0 + x_c \eta, \quad z = z_0 + z_c \zeta, \quad (11)$$

а также введём новую независимую переменную

$$\psi = \omega_c(1 - \gamma)t, \quad (12)$$

производную по которой будем обозначать штрихом. Параметр  $\gamma$  — это поправка к частоте, равная нулю в критическом случае. Тогда исходная система (6) с учётом (8)–(10) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \xi' + \frac{\sigma}{\omega_c}(\xi - \eta) = \gamma \xi' \equiv u, \quad \eta' + \frac{1}{\omega_c}(-\xi + \eta) + \frac{z_c}{\omega_c} \zeta = \gamma \eta' + \frac{z_c}{\omega_c}(r - \xi) \zeta \equiv v, \\ \zeta' + \frac{\beta}{\omega_c}(-\xi - \eta + \zeta) = \gamma \zeta' + \frac{\beta}{\omega_c}(-r\xi - r\eta + \xi\eta) \equiv w. \end{aligned} \quad (13)$$

В этой системе слева собраны линейные члены с фиксированными коэффициентами, а справа — нелинейные члены и члены с множителями  $r$ ,  $\gamma$ . В правой части системы нет единого параметра, однако в критической точке имеем  $r = \gamma = \xi = \eta = \zeta = 0$ . Можно предположить, что в некритических случаях существует аналитическая зависимость решения и параметров от какого-то другого параметра, в качестве которого выберем амплитуду  $A$  основной гармоники первой координаты. Тогда разложения переменных и параметров в правой части будут начинаться как минимум с первого порядка по  $A$  и будет иметь место главный результат теоремы 1 — при построении следующего приближения в правую часть можно подставлять предыдущее, т.е. использовать метод последовательных приближений. Заметим, что справедливость сделанного предположения будет подтверждена построенным решением.

Из-за такой структуры уравнений последовательные приближения можно вычислять по относительно простому алгоритму. Выражаем из двух первых уравнений  $\eta$ ,  $\zeta$  через  $\xi$ :

$$\eta = \xi + \frac{\omega_c}{\sigma}(\xi' - u), \quad \zeta = \frac{\omega_c}{\sigma z_c}(\omega_c(-\xi'' + u') - (\sigma + 1)\xi' + u + \sigma v). \quad (14)$$

Подстановка этих выражений в третье уравнение (13) с учётом (8) позволяет получить уравнение относительно одной переменной

$$\xi''' + \kappa \xi'' + \xi' + \kappa \xi = u'' + \frac{\beta + 1}{\omega_c} u' + \frac{\beta + x_c^2}{\omega_c^2} u + \frac{\sigma}{\omega_c} v' + \frac{\beta \sigma}{\omega_c^2} v - \frac{\sigma z_c}{\omega_c^2} w \equiv q, \quad \kappa = \frac{\sigma + \beta + 1}{\omega_c}. \quad (15)$$

В качестве первого приближения берём решение линейной части системы (13), положив правую часть равной нулю. Тогда уравнение (15) превращается в однородное, и любые гармонические функции единичной частоты являются его решениями. Поскольку мы имеем автономную систему, то изменением начала отсчёта времени можем изменять фазу и без ограничения общности принять  $\xi = A \cos \psi$ . Далее выражения для двух оставшихся переменных получаем из (14). Итак, в качестве первого приближения берём

$$\xi_1 = A \cos \psi, \quad \eta_1 = A \left( \cos \psi - \frac{\omega_c}{\sigma} \sin \psi \right), \quad \zeta_1 = A \frac{\omega_c}{\sigma z_c} (\omega_c \cos \psi + (\sigma + 1) \sin \psi). \quad (16)$$

Последующие приближения порядка  $n$  получаем подстановкой предыдущего в правую часть (13), и затем (15), после чего нужно найти решение неоднородного уравнения (15) с правой частью, зависящей от независимой переменной  $\psi$ , учитывая только члены порядка  $A^n$ .

Возникают следующие варианты в зависимости от состава правой части.

*Постоянные члены.* Поскольку  $u$  в (13) не может иметь постоянной составляющей, то

$$\xi_0 = \eta_0 = \frac{1}{\kappa} q_0, \quad \zeta_0 = \frac{\omega_c}{z_c} v_0.$$

*Кратные гармоники.* Для составляющих  $q = \dots + q_c \cos(n\psi) + q_s \sin(n\psi) + \dots$  решение (15) ищем в виде  $\xi = \xi_c \cos(n\psi) + \xi_s \sin(n\psi)$ , подстановка его в (15) даёт два уравнения:

$$-\kappa(n^2 - 1)\xi_c - (n^3 - n)\xi_s = q_c, \quad (n^3 - n)\xi_c - \kappa(n^2 - 1)\xi_s = q_s.$$

Определитель этой системы равен  $(n^2 - 1)^2(n^2 + \kappa^2)$  и отличен от нуля для всех  $n > 1$ , т.е. для всех гармоник, кроме первой, существует решение

$$\xi_c = \frac{-q_c \kappa + q_s n}{(n^2 - 1)(n^2 + \kappa^2)}, \quad \xi_s = \frac{-q_c n - q_s \kappa}{(n^2 - 1)(n^2 + \kappa^2)}. \quad (17)$$

После этого решения для двух оставшихся переменных определяются из (14) в виде коэффициентов при  $\cos(n\psi)$  и  $\sin(n\psi)$ :

$$\begin{aligned} \eta_c &= \xi_c + \frac{\omega_c}{\sigma}(n\xi_s - u_c), & \eta_s &= \xi_s - \frac{\omega_c}{\sigma}(n\xi_c + u_s), \\ \zeta_c &= \frac{\omega_c}{\sigma z_c}(\omega_c(n^2\xi_c + nu_s) - n(\sigma + 1)\xi_s + u_c + \sigma v_c), \\ \zeta_s &= \frac{\omega_c}{\sigma z_c}(\omega_c(n^2\xi_s - nu_c) + n(\sigma + 1)\xi_c + u_s + \sigma v_s). \end{aligned}$$

*Основная гармоника.* Для составляющих  $q = \dots + q_c \cos \psi + q_s \sin \psi + \dots$  в (17) при  $n = 1$  имеем вырождение, а, кроме того, добавки по первой координате должны быть равны нулю, поскольку по исходному предположению в первом приближении используется полная амплитуда основной гармоники. Поэтому единственный вариант удовлетворить (13) — это скомпенсировать первую гармонику непосредственно в правой части введением добавок к  $r$ ,  $\gamma$  в виде  $r_n A^{n-1}$ ,  $\gamma_n A^{n-1}$ , которые в (13) в произведении со слагаемыми первого приближения дадут добавочные члены порядка  $A^n$ :

$$\begin{aligned} u_+ &= -\gamma_n \sin \psi, & v_+ &= \frac{\omega_c}{\sigma}(-\gamma_n + r_n) \cos \psi + \left(-\gamma_n + \frac{\sigma + 1}{\sigma} r_n\right) \sin \psi, \\ w_+ &= \left(\frac{(\sigma + 1)\omega_c}{\sigma z_c} \gamma_n - \frac{2\beta}{\omega_c} r_n\right) \cos \psi + \left(-\frac{\omega_c^2}{\sigma z_c} \gamma_n + \frac{\beta}{\sigma} r_n\right) \sin \psi. \end{aligned}$$

Добавляя эти выражения в правую часть (15) и приравнивая к нулю множители при  $\cos \psi$ ,  $\sin \psi$ , получаем два уравнения относительно  $r_n$ ,  $\gamma_n$ :

$$\begin{aligned} -2(\sigma + \beta + 1)\gamma_n + \left(\sigma + \beta + 1 + \frac{2\sigma\beta z_c}{\omega_c^2}\right)r_n + \omega_c q_c &= 0, \\ (3\omega_c^2 - \beta - \sigma\beta - x_c^2)\gamma_n + (-\omega_c^2 + \beta + \sigma\beta - \beta z_c)r_n + \omega_c^2 q_s &= 0. \end{aligned}$$

С учётом (8) эти соотношения можно упростить:

$$\gamma_n - r_n = \frac{\omega_c}{2(\sigma + \beta + 1)} q_c, \quad \gamma_n - \frac{\sigma + \beta + 1}{2\sigma} r_n = -\frac{1}{2} q_s,$$

и записать решение

$$\gamma_n = -\frac{\sigma}{\sigma - \beta - 1} \left( \frac{\omega_c}{2\sigma} q_c + q_s \right), \quad r_n = -\frac{\sigma}{\sigma - \beta - 1} \left( \frac{\omega_c}{\sigma + \beta + 1} q_c + q_s \right).$$

После этого находим добавки по первым гармоникам для  $\eta$ ,  $\zeta$ , используя (14), где полагаем  $\xi = 0$  и заменяем  $u$ ,  $v$  на  $u + u_+$ ,  $v + v_+$ .

Таким образом, построение следующего приближения с номером  $n$  состоит в том, что предыдущее подставляем в правую часть (13) и далее в (15), в последнем оставляем составляющие порядка  $A^n$  и находим его решение в виде суммы постоянной составляющей, первой и кратных гармоник (17). Первая гармоника для  $\xi$  не изменяется, но появляются добавки по  $r$ ,  $\gamma$ . Для двух остальных переменных решение даётся формулами (14) и могут возникать поправки по первой гармонике.

Если найдено приближение для решения (13), то переход к исходным переменным осуществляется с учётом (12) через соотношения (10), (11), которые можно представить в виде

$$x = x_c(1 - r + \xi), \quad y = x_c(1 - r + \eta), \quad z = z_c((1 - r)^2 + \zeta).$$

#### 4. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Построим решение в виде рядов для значений  $\sigma = 8$ ,  $\beta = 3$ , при которых коэффициенты рядов получаются в алгебраическом виде. Критическое значение третьего параметра, соответствующие координаты “правой” особой точки и частота малых колебаний около неё (8) принимают конечные значения  $\rho_c = 28$ ,  $x_c = y_c = 9$ ,  $z_c = 27$ ,  $\omega_c = 6\sqrt{3}$ . После масштабирования и замен для третьего параметра  $\rho = 27(1 - r)^2 + 1$  и независимой переменной  $\psi = 6\sqrt{3}(1 - \gamma)t$  уравнения в отклонениях от особой точки (13) записываются в виде

$$\begin{aligned} \xi' + \frac{4\sqrt{3}}{9}(\xi - \eta) &= \gamma\xi' \equiv u, & \eta' + \frac{\sqrt{3}}{18}(-\xi + \eta) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta &= \gamma\eta' + \frac{3\sqrt{3}}{2}(r - \xi)\zeta \equiv v, \\ \zeta' + \frac{\sqrt{3}}{6}(-\xi - \eta + \zeta) &= \gamma\zeta' + \frac{\sqrt{3}}{6}(-r\xi - r\eta + \xi\eta) \equiv w. \end{aligned} \quad (18)$$

Выпишем уравнение для первой координаты (15):

$$\xi''' + \frac{2\sqrt{3}}{3}\xi'' + \xi' + \frac{2\sqrt{3}}{3}\xi = u'' + \frac{2\sqrt{3}}{9}u' + \frac{7}{9}u + \frac{4\sqrt{3}}{9}v' + \frac{2}{9}v - 2w \equiv q. \quad (19)$$

Также выпишем соотношения для построения очередного приближения: постоянные добавки

$$\xi_0 = \eta_0 = \sqrt{3} \left( \frac{1}{9}v_0 - w_0 \right), \quad \zeta_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0; \quad (20)$$

кратные гармоники

$$\xi_c = \frac{-2\sqrt{3}q_c + 3nq_s}{(n^2 - 1)(3n^2 + 4)}, \quad \xi_s = \frac{-2\sqrt{3}q_s - 3nq_c}{(n^2 - 1)(3n^2 + 4)}; \quad (21)$$

первая гармоника

$$\gamma_n = -\frac{3\sqrt{3}}{4}q_c - 2q_s, \quad r_n = -\sqrt{3}q_c - 2q_s. \quad (22)$$

После нахождения решения для первой координаты решения для двух оставшихся определяются соотношениями (14):

$$\eta = \xi + \frac{3\sqrt{3}}{4}(\xi' - u), \quad \zeta = \frac{1}{2}(-\xi'' + u') + \frac{\sqrt{3}}{36}(-9\xi' + u + 8v). \quad (23)$$

Теперь можно перейти к непосредственному построению приближений.

*Первое приближение.* В качестве первого приближения для периодического решения системы (18) берём решение линейной части (16):

$$\xi_1 = A \cos \psi, \quad \eta_1 = A \left( \cos \psi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin \psi \right), \quad \zeta_1 = A \left( \frac{1}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \right). \quad (24)$$

Таким образом, в первом приближении получили семейство периодических решений, параметризуемое амплитудой по первой переменной.

*Второе приближение.* Подставив первое приближение в правую часть (18), положив  $r = 0$ ,  $\gamma = 0$ , получим выражения, имеющие множителем  $A^2$ :

$$u = 0, \quad v = -\frac{3\sqrt{3}}{8}(1 + \cos(2\psi)) - \frac{9}{16} \sin(2\psi),$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{12}(1 + \cos(2\psi)) - \frac{3}{16} \sin(2\psi), \quad q = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 3 \cos(2\psi)) + \frac{5}{4} \sin(2\psi).$$

Для постоянных составляющих имеем  $v_0 = -3\sqrt{3}/8$ ,  $w_0 = \sqrt{3}/12$  и по формулам (20) получаем

$$\xi_0 = \eta_0 = -\frac{3}{8}, \quad \zeta_0 = -\frac{1}{4}.$$

Для вторых гармоник имеем  $q_c = -3\sqrt{3}/4$ ,  $q_s = 5/4$ . После подстановки этих выражений в (21) с  $n = 2$  получаем  $\xi_c = 1/4$ ,  $q_s = \sqrt{3}/24$ . Первых гармоник в правых частях (18), (19) во втором приближении не возникло, соответственно, не появляются поправки к  $r$ ,  $\gamma$ . Далее используем (23) с  $\xi = -3/8 + 1/4 \cos(2\psi) + \sqrt{3}/24 \sin(2\psi)$  и приходим к следующим выражениям для второго приближения:

$$\xi_2 = \xi_1 + A^2 \left( -\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos(2\psi) + \frac{\sqrt{3}}{24} \sin(2\psi) \right), \quad \eta_2 = \eta_1 + A^2 \left( -\frac{3}{8} + \frac{7}{16} \cos(2\psi) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(2\psi) \right),$$

$$\zeta_2 = \zeta_1 + A^2 \left( -\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \cos(2\psi) + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin(2\psi) \right). \quad (25)$$

*Третье приближение.* После подстановки второго приближения (24), (25) в правую часть системы (18) получим выражения, имеющие множителем  $A^3$ :

$$u = 0, \quad v = \frac{\sqrt{3}}{128}(51 \cos \psi - 27 \cos(3\psi)) + \frac{1}{64}(21 \sin \psi - 24 \sin(3\psi)),$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{384}(-29 \cos \psi + 25 \cos(3\psi)) + \frac{1}{192}(22 \sin \psi - 23 \sin(3\psi)),$$

$$q = \frac{\sqrt{3}}{96}(37 \cos \psi - 65 \cos(3\psi)) - \frac{11}{16} \sin \psi + \sin(3\psi).$$

Видим, что появились слагаемые на основной частоте, для них действуем по третьему варианту: подставляем в (22)  $q_c = 37\sqrt{3}/96$ ,  $q_s = -11/16$  и вычисляем  $\gamma_3 = 65/128$ ,  $r_3 = 7/32$ .

После этого вычисляем коэффициенты (21) для третьих гармоник по первой координате и применяем (23) для оставшихся двух координат. Результат третьего приближения:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= \xi_2 + A^3 \left( \frac{209}{3968} \cos(3\psi) + \frac{131\sqrt{3}}{7936} \sin(3\psi) \right), \\ \eta_3 &= \eta_2 + A^3 \left( \frac{195\sqrt{3}}{512} \sin \psi + \frac{5209}{31744} \cos(3\psi) - \frac{1619\sqrt{3}}{15872} \sin(3\psi) \right), \\ \zeta_3 &= \zeta_2 + A^3 \left( -\frac{17}{128} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{1536} \sin \psi + \frac{1881}{31744} \cos(3\psi) + \frac{725\sqrt{3}}{23808} \sin(3\psi) \right).\end{aligned}\quad (26)$$

Это периодическое решение реализуется при значении параметра  $r = 7A^2/32$ , при этом поправка к частоте составляет  $\gamma = 65A^2/128$ .

Отметим, что зависимость между параметром и амплитудой появилась лишь в третьем приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что полученные решения удовлетворяют уравнениям (13) с точностью  $A^3$ .

Приближения более высокого порядка могут быть построены по той же схеме, но при этом коэффициенты будут громоздкими — для четвёртого приближения возникают знаменатели из восьми цифр, для пятого — из двенадцати. По этой причине здесь для точного решения с рациональными коэффициентами ограничимся третьим приближением (26).

Приближения высокого порядка можно строить, используя приближённые коэффициенты в виде десятичных дробей с заданным количеством десятичных знаков. Приведём здесь результат девятого приближения при стандартных коэффициентах  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ . При этом критические значения равны

$$\rho_c = 24.7368, \quad x_c = y_c = 7.956, \quad z_c = 23.7368, \quad \omega_c = 9.6245.$$

Девятое приближение выбрано из тех соображений, что получается хорошая аппроксимация предельного цикла достаточно большой амплитуды и при этом формулы аналитического приближения ещё не становятся слишком громоздкими. Здесь и далее ограничиваемся четырьмя десятичными знаками, хотя расчёты производились с машинной точностью. Для параметра и поправки на частоту получены следующие ряды:

$$\begin{aligned}r &= 0.1706A^2 + 0.1144A^4 + 0.142A^6 + 0.2153A^8, \\ \gamma &= 0.4279A^2 + 0.2605A^4 + 0.3218A^6 + 0.491A^8.\end{aligned}$$

Периодические траектории в девятом приближении представляются рядами

$$\begin{aligned}\xi &= -0.3476A^2 - 0.1826A^4 - 0.2162A^6 - 0.3251A^8 + \\ &+ A \cos \psi + (0.2599A^2 + 0.1636A^4 + 0.1928A^6 + 0.2853A^8) \cos(2\psi) + \\ &+ (0.0526A^3 + 0.0623A^5 + 0.0931A^7 + 0.1564A^9) \cos(3\psi) + (0.0098A^4 + 0.0162A^6 + 0.0284A^8) \cos(4\psi) + \\ &+ (0.0016A^5 + 0.0034A^7 + 0.0067A^9) \cos(5\psi) + (0.0002A^6 + 0.0005A^8) \cos(6\psi) + \\ &+ (0.0882A^2 + 0.0475A^4 + 0.0437A^6 + 0.0548A^8) \sin(2\psi) + \\ &+ (0.037A^3 + 0.0455A^5 + 0.064A^7 + 0.1016A^9) \sin(3\psi) + \\ &+ (0.0112A^4 + 0.0201A^6 + 0.0347A^8) \sin(4\psi) + (0.003A^5 + 0.007A^7 + 0.0141A^9) \sin(5\psi) + \\ &+ (0.0008A^6 + 0.0022A^8) \sin(6\psi) + (0.0002A^7 + 0.0006A^9) \sin(7\psi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta = & -0.3476A^2 - 0.1826A^4 - 0.2162A^6 - 0.3251A^8 + \\
 & + A \cos \psi + (0.4297A^2 + 0.1824A^4 + 0.1935A^6 + 0.2763A^8) \cos(2\psi) + \\
 & + (0.1593A^3 + 0.148A^5 + 0.1939A^7 + 0.3023A^9) \cos(3\psi) + (0.0527A^4 + 0.0751A^6 + 0.1177A^8) \cos(4\psi) + \\
 & + (0.0162A^5 + 0.031A^7 + 0.0564A^9) \cos(5\psi) + (0.0047A^6 + 0.0112A^8) \cos(6\psi) + \\
 & + (0.0013A^7 + 0.0037A^9) \cos(7\psi) + 0.0003A^8 \cos(8\psi) + 0.0001A^9 \cos(9\psi) + \\
 & + (-0.9625A + 0.4119A^3 + 0.2507A^5 + 0.3097A^7 + 0.4726A^9) \sin \psi + \\
 & + (-0.412A^2 - 0.0533A^4 - 0.0624A^6 - 0.0927A^8) \sin(2\psi) + \\
 & + (-0.115A^3 - 0.0695A^5 - 0.0883A^7 - 0.1391A^9) \sin(3\psi) + \\
 & + (-0.0264A^4 - 0.0263A^6 - 0.038A^8) \sin(4\psi) + (-0.0048A^5 - 0.006A^7 - 0.0092A^9) \sin(5\psi) + \\
 & + (-0.0005A^6 - 0.0002A^8) \sin(6\psi) + (0.0001A^7 + 0.0006A^9) \sin(7\psi) + 0.0001A^8 \sin 8\psi, \\
 \zeta = & -0.1951A^2 - 0.0882A^4 - 0.1148A^6 - 0.1787A^8 + \\
 & + (0.3902A - 0.073A^3 - 0.0209A^5 - 0.0128A^7 - 0.008A^9) \cos \psi + \\
 & + (0.1318A^2 + 0.0172A^4 + 0.0233A^6 + 0.0373A^8) \cos(2\psi) + \\
 & + (0.0385A^3 + 0.0222A^5 + 0.0275A^7 + 0.0428A^9) \cos(3\psi) + (0.0091A^4 + 0.0092A^6 + 0.0132A^8) \cos(4\psi) + \\
 & + (0.0017A^5 + 0.0022A^7 + 0.0034A^9) \cos(5\psi) + (0.0002A^6 + 0.0001A^8) \cos(6\psi) - 0.0002A^9 \cos(7\psi) + \\
 & + (0.446A + 0.0077A^3 + 0.0126A^5 + 0.0193A^7 + 0.0316A^9) \sin \psi + \\
 & + (0.1465A^2 + 0.071A^4 + 0.079A^6 + 0.1152A^8) \sin(2\psi) + \\
 & + (0.0518A^3 + 0.0482A^5 + 0.0637A^7 + 0.1002A^9) \sin(3\psi) + (0.0174A^4 + 0.0246A^6 + 0.0384A^8) \sin(4\psi) + \\
 & + (0.0054A^5 + 0.0103A^7 + 0.0187A^9) \sin(5\psi) + (0.0016A^6 + 0.0038A^8) \sin(6\psi) + \\
 & + (0.0004A^7 + 0.0012A^9) \sin(7\psi) + 0.0001A^8 \sin 8\psi.
 \end{aligned}$$

На рис. 2 приведены результаты численного интегрирования и полученного аналитического решения для  $A = 0.7$ . Этому решению соответствует значение третьего параметра  $\rho = 18.5485$  и частота  $\omega = 6.3678$ , т.е. частота уменьшилась в полтора раза по сравнению с критической. Исходная система (6) интегрировалась с начальными условиями, соответ-

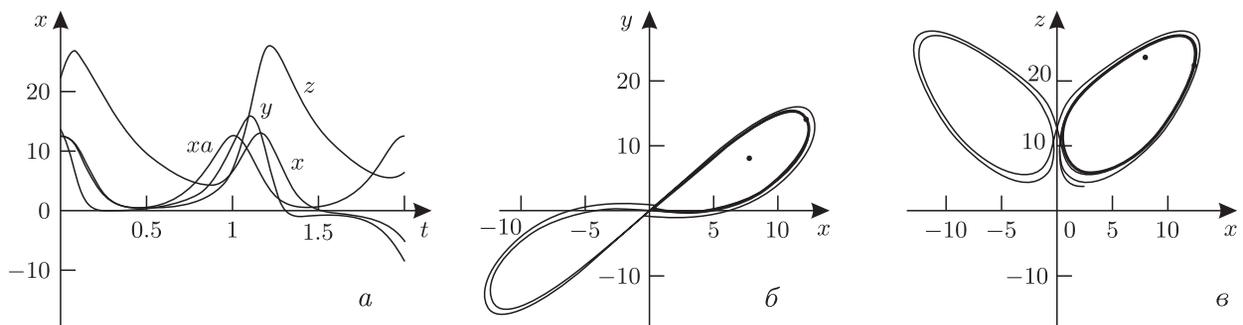


Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений для системы Лоренца.

ствующими  $\xi(0)$ ,  $\eta(0)$ ,  $\zeta(0)$ . Аналитическое решение в исходных переменных получено с использованием (10), (11). На рис. 2, а приведены графики изменения координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  во времени, а также для сравнения одна координата аналитического решения  $xa$ . Аналитическое и численное решения близки по форме, но отличаются по частоте. Траектория в течение одного периода находится вблизи предельного цикла, а далее уходит от него, поскольку предельный цикл неустойчив. На рис. 2, б, в жирным линиями показаны аналитически построенные предельные циклы, тонкими линиями — численные решения в двух проекциях на плоскости  $(x, y)$  и  $(x, z)$ . Точками отмечены начальные условия и координаты стационарной точки для критического значения параметра. Отметим, что построенный предельный цикл с  $A=0.7$  имеет значительную амплитуду, является существенно нелинейным и приближается к гомоклинической траектории, при этом процесс построения последовательных приближений является сходящимся.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено обоснование возможности построения аналитических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений в виде формальных рядов по степеням параметра, которые оказываются сходящимися при “немалых” значениях последнего. Вопрос о выборе параметра, видимо, должен решаться индивидуально для каждой задачи. В качестве параметра может выступать как естественный параметр в уравнении Ван дер Поля, так и амплитуда основной гармоники, как в системе Лоренца. Проведено сравнение с результатами численного решения, которое показало улучшение точности в следующих приближениях в широком диапазоне изменения параметра для обоих примеров.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке научно-образовательных школ МГУ имени М.В. Ломоносова: “Фундаментальные и прикладные исследования космоса” и “Математические методы анализа сложных систем” (проект 23-Sh01-11).

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматгиз, 1963. — 410 с.
2. Малкин, И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин. — М. : Гостехиздат, 1956. — 491 с.
3. Журавлев, В.Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов ; под ред. А.Ю. Ишлинского. — М. : Наука, 1988. — 325 с.
4. Гребеников, Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. — М. : Наука, 1979. — 434 с.
5. Гукенхеймер, Д. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс ; пер. с англ. А.П. Иванова ; под ред. А.Д. Морозова. — М.—Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2002. — 560 с.
6. Strogatz, S. Nonlinear Dynamics and Chaos / S. Strogatz. — Perseus Books, 1994.
7. Буданов, В.М. Метод неопределённых частот / В.М. Буданов // Фунд. и прикл. математика. — 2018. — Т. 22, № 2. — С. 59–71.
8. Буданов, В.М. Применение метода неопределённых частот для анализа двухпланетной задачи / В.М. Буданов // Докл. РАН. Физика, техн. науки. — 2021. — Т. 501, № 1. — С. 33–37.

METHOD FOR CONSTRUCTING PERIODIC SOLUTIONS  
OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. M. Budanov

*MSU Research Institute of Mechanics, Moscow, Russia*  
*e-mail: vlbudanov@gmail.com*

A justification is given for the analytical method for constructing periodic solutions for nonlinear systems of ordinary differential equations of polynomial type. Periodic solutions are constructed in the form of Fourier series, in which the coefficients are polynomials depending on the parameter without the assumption of its smallness. Two examples are considered — the van der Pol equation and the Lorentz system.

*Keywords:* periodic solution, nonlinear system, successive approximations.

## FUNDING

This work was carried out with financial support from scientific and educational schools of Lomonosov Moscow State University “Mathematical methods of analysis of complex systems”, and “Fundamental and applied space research” (project no. 23-Sh01-11).

## REFERENCES

1. Bogoliubov, N.N. and Mitropolsky, Yu.A., *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1961.
2. Malkin, I.G., *Nekotorye zadachi teorii nelineinykh kolebaniï* (Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations), Moscow: GITTL, 1956.
3. Zhuravlev, V.F. and Klimov, D.M., *Prikladnye metody v teorii kolebaniï* (Applied Methods in the Theory of Oscillations), Moscow: Nauka, 1988.
4. Grebenikov, E.A. and Ryabov, Yu.A., *Constructive Methods in the Analysis of Nonlinear Systems*, Moscow: Mir Publishers, 1983.
5. Gukenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, New York: Springer, 1983.
6. Strogatz, S., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, 1994.
7. Budanov, V.M., Undefined frequencies method, *J. Mat. Sci.*, 2021, vol. 253, no. 6, pp. 796–805.
8. Budanov, V.M., Application of the undefined frequency method for the analysis of a two planet problem, *Dokl. Phys.*, 2021, vol. 66, no. 12, pp. 341–344.