ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 5, с. 579–589

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929.4

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА–КРАСОВСКОГО ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЗИТИВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© **А. Ю. Александров**

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru

Поступила в редакцию 04.02.2024 г., после доработки 09.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассматривается связанная система, описывающая взаимодействие нелинейной дифференциальной подсистемы с нелинейностями секторного типа и линейной разностной подсистемы. Предполагается, что система является позитивной. Строится диагональный функционал Ляпунова–Красовского и определяются условия, при выполнении которых с помощью такого функционала можно доказать абсолютную устойчивость изучаемой системы. В случае нелинейностей степенного вида выводятся оценки скорости стремления решений к началу координат. Проводится анализ устойчивости соответствующей системы с переключениями параметров. Находятся достаточные условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения при любом допустимом законе переключения.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическая система, абсолютная устойчивость, позитивная система, функционал Ляпунова–Красовского, переключения.

DOI: 10.31857/S0374064124050013, EDN: LBUEJV

ВВЕДЕНИЕ

Связанные системы, описывающие взаимодействие дифференциальных и разностных подсистем, относятся к классу дифференциально-алгебраических систем [1, § 1.6; 2, § 3.4; 3]. Системы такого рода широко используются для моделирования процессов химической технологии и гидродинамики, линий без потерь в электротехнике, применяются в задачах стабилизации самолётов, а также в ряде других инженерных приложений [1, §§ 1.6, 2.5; 4]. Кроме того, к такому виду систем приводятся дифференциальные уравнения с запаздыванием нейтрального типа [2, с. 71].

Актуальной проблемой, возникающей при анализе динамики указанных систем, является проблема устойчивости их решений. Методы исследования устойчивости и стабилизации хорошо разработаны для линейных дифференциально-алгебраических систем (см., например, [2, § 3.4; 5–8] и цитируемую в них литературу). Для нелинейных систем ряд результатов, основанных на развитии второго метода Ляпунова, получен в статьях [5, 9]. Условия устойчивости были сформулированы в терминах существования функционалов Ляпунова–Красовского, обладающих определёнными свойствами. Однако следует заметить, что до сих пор не разработано общих конструктивных подходов к построению требуемых функционалов.

Важным подклассом дифференциально-алгебраических систем являются позитивные системы. Устойчивость таких систем изучалась в работах [10–13]. В [10] и [11] с помощью метода сравнения были установлены условия экспоненциальной устойчивости нелинейных систем и линейных систем с переменным запаздыванием. В статье [12] для нахождения условий робастной устойчивости линейных систем применялся специальный подход, основанный на использовании математических моделей в форме "вход–выход". В [13] для нелинейной позитивной дифференциально-алгебраической системы с переключениями параметров строился линейный функционал Ляпунова–Красовского, существование которого гарантировало асимптотическую устойчивость рассматриваемой системы при любом допустимом законе переключения.

В то же время эффективным подходом к исследованию устойчивости позитивных систем является использование диагональных функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского. Этот подход хорошо разработан для позитивных дифференциальных и разностных систем без запаздывания [14]. В статье [15] для позитивных линейных систем с запаздыванием было введено понятие диагональной устойчивости по Риккати. В работах [15–17] были получены условия такой устойчивости для некоторых классов линейных и нелинейных систем с запаздыванием.

Целью настоящей статьи является анализ диагональной устойчивости позитивной дифференциально-алгебраической системы специального вида.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t)=Af(x(t))+By(t-\tau), \quad y(t)=Cf(x(t))+Dy(t-\tau). \tag{1}$$

Здесь $t\geqslant t_0\geqslant 0$, $x(t)\in\mathbb{R}^m$, $y(t)\in\mathbb{R}^k$, A, B, C, D — постоянные матрицы соответствующих размерностей, τ — постоянное положительное запаздывание, $f(x)$ — непрерывная при $\|x\|<H$ ($0<H\leqslant+\infty$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора) векторная функция сепарабельного вида, т.е. $f(x)=(f_1(x_1),\ldots,f_m(x_m))^{\mathrm{т}}$, где $x_1, \ldots, x_m$ — компоненты вектора x. Предполагается, что скалярные функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют секторным условиям: $x_if_i(x_i)>0$ при $x_i\neq 0$, $i=\overline{1,m}$. Функции $f(x)$ с указанными свойствами будем называть *допустимыми*. Таким образом, рассматриваем связанную систему, описывающую взаимодействие нелинейной дифференциальной системы типа Персидского $\dot{x}(t)=Af(x(t))$ (см. [14, с. 97]) и линейной разностной системы с непрерывным временем $y(t)=Dy(t-\tau)$.

Каждое решение системы (1) при $t\geqslant t_0$ определяется начальными условиями: $x(t_0)=x_0$, $y(t_0+\xi)=\varphi(\xi)$ при $\xi\in[-\tau,0)$, где $x_0\in\mathbb{R}^m$, а функция $\varphi(\xi)$ принадлежит пространству $C([-\tau,0),\mathbb{R}^k)$ непрерывных и ограниченных вектор-функций $\varphi\colon[-\tau,0)\mapsto\mathbb{R}^k$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau=\sup_{\xi\in[-\tau,0)}\|\varphi(\xi)\|$. Под *решением* понимается пара функций $x(t)$, $t\in[t_0,T)$, и $y(t)$, $t\in[t_0-\tau,T)$ ($t_0<T\leqslant+\infty$), которые удовлетворяют начальным условиям и системе (1) при $t\neq t_0+k\tau$, $k=0,1,\ldots$, причём $x(t)$ является непрерывной функцией, имеющей кусочно-непрерывную производную, а функция $y(t)$ является кусочно-непрерывной. Через y_t обозначим отрезок соответствующей компоненты решения, т.е. $y_t\colon\xi\mapsto y(t+\xi)$ при $\xi\in[-\tau,0)$. Из предположений относительно правой части системы (1) следует существование её решений (см. [5]).

В настоящей статье неравенства для векторов будем понимать покомпонентно.

Определение 1. Система (1) называется *позитивной*, если её решения с неотрицательными начальными данными остаются неотрицательными при возрастании времени.

Замечание 1. Известно (см. [11, 13]), что система (1) позитивна тогда и только тогда, когда матрица A метцлерова (все её внедиагональные элементы неотрицательны), а матрицы B, C, D являются неотрицательными.

Из свойств функций $f_1(x_1)$, $\ldots$, $f_m(x_m)$ следует, что рассматриваемая система имеет нулевое решение.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) *абсолютно устойчива*, если её нулевое решение асимптотически устойчиво при любой допустимой функции $f(x)$ и любом неотрицательном запаздывании τ.

Хорошо известно (см., например, [5]), что система (1) может быть абсолютно устойчивой только в случае, когда D является матрицей Шура (все её собственные числа по модулю меньше единицы). Далее считаем, что это условие выполнено.

В работе [12] с использованием линейного функционала Ляпунова–Красовского доказано, что позитивная система (1) абсолютно устойчива тогда и только тогда, когда матрица

$$Q = A + B(I - D)^{-1}C \tag{2}$$

является гурвицевой. Здесь I — единичная матрица соответствующей размерности. В настоящей статье, развивая результаты, полученные в [12, 15–17] для различных классов позитивных систем с запаздыванием, исследуем условия диагональной устойчивости рассматриваемой дифференциально-алгебраической системы.

Диагональный функционал Ляпунова–Красовского строим по формуле

$$V(x(t), y_t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int\limits_{0}^{x_i(t)} f_i(u)\, du + \sum_{j=1}^{k} \omega_j \int\limits_{t-\tau}^{t} y_j^2(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

где λ_i, ω_j — постоянные коэффициенты, $x_i(t)$ и $y_j(t)$ — компоненты векторов $x(t)$ и $y(t)$ соответственно.

Определение 3. Будем говорить, что система (1) *диагонально устойчива*, если существует функционал вида (3), гарантирующий абсолютную устойчивость этой системы.

Покажем, что для позитивной системы (1) диагональная устойчивость эквивалентна абсолютной устойчивости. Кроме того, в случае функций $f_1(x_1)$, $\ldots$, $f_m(x_m)$ степенного вида с помощью построенного функционала оценим скорость стремления решений к началу координат. Также рассмотрим систему с переключениями параметров и определим условия существования для соответствующего семейства подсистем общего диагонального функционала Ляпунова–Красовского.

2. КРИТЕРИЙ ДИАГОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Будем использовать подходы, разработанные в статьях [16, 17].

Теорема 1. *Для диагональной устойчивости позитивной системы (1) необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно устойчива.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Покажем достаточность.

Если система абсолютно устойчива, то матрица Q, определённая по формуле (2), гурвицева. Заметим, что из свойств матрицы D следует (см. [14, § 2.2]), что матрица $(I-D)^{-1}$ является неотрицательной, значит матрица Q — метцлерова. Поэтому [14, § 2.2] существуют векторы $\zeta > 0$ и $\eta > 0$ такие, что $Q\zeta < 0$, $Q^{\mathrm{т}}\eta < 0$.

Выберем коэффициенты λ_i в функционале (3) в виде $\lambda_i = \eta_i/\zeta_i$, где η_i, ζ_i — компоненты векторов η, ζ соответственно, $i = \overline{1,m}$. Продифференцируем этот функционал в силу системы (1) и получим

$$\dot V = f^{\mathrm{т}}(x(t))\Lambda\bigl(Af(x(t)) + By(t-\tau)\bigr) + y^{\mathrm{т}}(t)\Omega y(t) - y^{\mathrm{т}}(t-\tau)\Omega y(t-\tau) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(x(t)) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}^{\mathrm{т}} G \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}.$$

Здесь Λ и Ω — диагональные матрицы с элементами λ_i и ω_j соответственно на главных диагоналях,

$$G=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{т}}\Lambda+\Lambda A+2C^{\mathrm{т}}\Omega C & \Lambda B+2C^{\mathrm{т}}\Omega D \\ B^{\mathrm{т}}\Lambda+2D^{\mathrm{т}}\Omega C & 2(D^{\mathrm{т}}\Omega D-\Omega) \end{pmatrix}.$$

Нужно подобрать коэффициенты ω_j так, чтобы матрица G была отрицательно определена. Заметим, что G — симметричная и метцлерова матрица, поэтому [14, § 2.2] для доказательства её отрицательной определённости достаточно найти положительный вектор θ такой, что

$$G\theta<0. \tag{4}$$

Пусть $L=(I-D)^{-1}(C+\gamma I)$, где γ — положительный параметр. Если $\theta=\mathrm{col}(\zeta, L\zeta)$, то $\theta>0$ и

$$G\theta=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{т}}\eta+\Lambda A\zeta+2C^{\mathrm{т}}\Omega C\zeta+\Lambda BL\zeta+2C^{\mathrm{т}}\Omega DL\zeta \\ B^{\mathrm{т}}\eta+2D^{\mathrm{т}}\Omega C\zeta+2\left(D^{\mathrm{т}}\Omega D-\Omega\right)L\zeta \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \Lambda Q\zeta+A^{\mathrm{т}}\eta+\gamma\Lambda B(I-D)^{-1}\zeta+2C^{\mathrm{т}}\Omega(C+DL)\zeta \\ B^{\mathrm{т}}\eta+2(D^{\mathrm{т}}-I)\Omega L\zeta-2\gamma D^{\mathrm{т}}\Omega\zeta \end{pmatrix}.$$

Выберем положительные числа $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_k$ так, чтобы имело место равенство

$$2\Omega L\zeta=(I-D^{\mathrm{т}})^{-1}(B^{\mathrm{т}}\eta+\gamma 1_k),$$

где 1_k — k-мерный вектор, все компоненты которого равны единице. Тогда

$$G\theta=\begin{pmatrix} \Lambda Q\zeta+Q^{\mathrm{т}}\eta+\gamma\Lambda B(I-D)^{-1}\zeta-2\gamma C^{\mathrm{т}}\Omega\zeta+\gamma C^{\mathrm{т}}(I-D^{\mathrm{т}})^{-1}1_k \\ -\gamma 1_k-2\gamma D^{\mathrm{т}}\Omega\zeta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если

$$\gamma\big(\Lambda B(I-D)^{-1}\zeta+C^{\mathrm{т}}(I-D^{\mathrm{т}})^{-1}1_k\big)<-\Lambda Q\zeta-Q^{\mathrm{т}}\eta,$$

то выполнено условие (4), а производная функционала (3) удовлетворяет неравенству

$$\dot V\leqslant -a\big(\|f(x(t))\|^2+\|y(t-\tau)\|^2\big),\quad a=\mathrm{const}>0. \tag{5}$$

Применяя теорему 3 из работы [5], получаем, что нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво при любой допустимой функции $f(x)$ и любом неотрицательном запаздывании τ. Теорема доказана.

3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

Известно [5], что если система (1) линейна ($f_i(x_i)=x_i,\ i=\overline{1,m}$) и асимптотически устойчива, то она экспоненциально устойчива. В данном пункте рассмотрим допустимые функции $f_1(x_1),\ \ldots,\ f_m(x_m)$ степенного вида. Пусть

$$f_i(x_i)=x_i^{\mu_i},\quad i=\overline{1,m}, \tag{6}$$

где μ_i — рациональные числа с нечётными числителями и знаменателями, причём $\mu_i\geqslant 1$ и $\max_{i=\overline{1,m}}\mu_i>1$. Покажем, что в этом случае с помощью построенного функционала Ляпунова–Красовского можно получить оценки времени переходных процессов для соответствующей системы (1).

Теорема 2. *Пусть система (1) позитивна, матрица (2) гурвицева, а функции* $f_1(x_1), \ldots$ $\ldots, f_m(x_m)$ *имеют вид (6). Тогда для любого* $\delta > 0$ *найдутся положительные числа* M_1 *и* M_2 *такие, что для решений с начальными данными, удовлетворяющими условиям*

$$t_0 \geqslant 0, \quad \|x_0\| + \|\varphi\|_\tau < \delta, \tag{7}$$

при всех $t \geqslant t_0$ *справедливы оценки*

$$|x_i(t, t_0, x_0, \varphi)| \leqslant M_1(1 + t - t_0)^{-1/(\rho_1(\mu_i+1))}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{8}$$

$$\|y(t, t_0, x_0, \varphi)\| \leqslant M_2(1 + t - t_0)^{-\rho_2/\rho_1}, \tag{9}$$

где $\rho_1 = \max_{i=\overline{1,m}}(\mu_i - 1)/(\mu_i + 1)$, $\rho_2 = \min_{i=\overline{1,m}} \mu_i/(\mu_i + 1)$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $V(x(t), y_t)$, построенный по формуле (3). В соответствии с доказательством теоремы 1 выбираем положительные коэффициенты λ_i, ω_j так, чтобы была справедлива оценка (5).

Далее проведём некоторую модификацию этого функционала. Положим

$$\widetilde{V}(x(t), y_t) = V(x(t), y_t) + \beta \int\limits_{t-\tau}^{t} (\xi - t + \tau)\|y(\xi)\|^2 \, d\xi, \tag{10}$$

где β — положительный параметр.

Дифференцируя функционал (10) в силу системы (1), получаем

$$\dot{\widetilde{V}} \leqslant -(a - \beta\tau)\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{2\mu_i}(t) + \|y(t-\tau)\|^2\right) - \beta \int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(\xi)\|^2 \, d\xi,$$

где значение a то же, что и в (5).

Пусть $0 < \beta < a/(2\tau)$. Тогда

$$\dot{\widetilde{V}} \leqslant -\frac{1}{2} a \sum_{i=1}^{m} x_i^{2\mu_i}(t) - \beta \int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(\xi)\|^2 \, d\xi. \tag{11}$$

Кроме того, при выбранном значении β для самого функционала справедливы соотношения

$$a_1\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\mu_i+1}(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(\xi)\|^2 \, d\xi\right) \leqslant \widetilde{V}(x(t), y_t) \leqslant a_2\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\mu_i+1}(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(\xi)\|^2 \, d\xi\right), \tag{12}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Из выполнения оценок (11) и (12) следует (см. [5, теорема 3]), что нулевое решение изучаемой системы асимптотически устойчиво в целом. Значит, для любого $\delta > 0$ найдутся положительные числа $\tilde{\delta}$ и $\tilde{b}$ такие, что если выполнены условия (7), то при всех $t \geqslant t_0$ имеем $\|x(t, t_0, x_0, \varphi)\| + \|y(t, t_0, x_0, \varphi)\| < \tilde{\delta}$ и

$$\dot{\widetilde{V}}(x(t, t_0, x_0, \varphi), y_t(t_0, x_0, \varphi)) \leqslant -\tilde{b}\widetilde{V}^{1+\rho_1}(x(t, t_0, x_0, \varphi), y_t(t_0, x_0, \varphi)). \tag{13}$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (13) и используя нижнюю оценку функционала из формулы (12), нетрудно показать, что число $M_1 > 0$ можно выбрать так, чтобы для решений с начальными данными, удовлетворяющими условиям (7), при всех $t \geqslant t_0$ выполнялись соотношения (8).

Матрица D является матрицей Шура. Поэтому [14, § 2.1] существует постоянная симметричная положительно определённая матрица Ξ, для которой матрица $D^{\mathrm{T}}\Xi D-\Xi$ отрицательно определена. Пусть $\hat{V}(y)=y^{\mathrm{T}}\Xi y$. Тогда

$$\hat{V}(y(t)) \leqslant b_1\hat{V}(y(t-\tau))+b_2\|f(x(t))\|^2,$$

где $0<b_1<1$, $b_2>0$. Последовательно применяя это неравенство на промежутках $[p\tau,(p+1)\tau]$, $p=0,1,\ldots$, и учитывая оценки (8), получаем, что найдётся число $M_2>0$ такое, что если начальные данные решения системы (1) удовлетворяют условиям (7), то при всех $t\geqslant t_0$ выполнено соотношение (9). Теорема доказана.

Замечание 2. Как уже отмечалось, в работе [12] для позитивной и абсолютно устойчивой системы (1) был построен линейный функционал Ляпунова–Красовского. Используя этот функционал и проводя рассуждения, аналогичные приведённым в доказательстве теоремы 2, можно также получить оценки вида (8), (9), но с бо́льшими показателями степеней. Значит, применение построенного в настоящей статье функционала позволяет точнее оценить время переходных процессов.

4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Далее рассмотрим систему

$$\dot{x}(t)=A_\sigma f(x(t))+B_\sigma y(t-\tau), \quad y(t)=Cf(x(t))+Dy(t-\tau). \tag{14}$$

Здесь $t\geqslant t_0\geqslant 0$, $\sigma=\sigma(t)$ — заданная при $t\geqslant t_0$ кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения, $\sigma(t)\colon [t_0,+\infty)\mapsto\{1,\ldots,N\}$, A_s, B_s — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $s=\overline{1,N}$, а остальные обозначения те же, что и для системы (1). Таким образом, переключения параметров происходят в первой группе уравнений, а во второй группе матрицы C и D являются постоянными. В частности, такая ситуация имеет место, когда система (14) линейна и получена в результате перехода от системы дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}\big(y(t)-Dy(t-\tau)\big)=\tilde{A}_\sigma y(t)+\tilde{B}_\sigma y(t-\tau)$$

с помощью замены переменной $x(t)=y(t)-Dy(t-\tau)$. Отметим, что в этом случае матрица C будет единичной.

В соответствии со стандартными предположениями (см. [18]) считаем, что функция $\sigma(t)$ на любом ограниченном промежутке может иметь только конечное число точек разрыва. Такие законы переключения будем называть *допустимыми*.

В каждый момент времени динамика системы (14) описывается одной из подсистем семейства

$$\dot{x}(t)=A_s f(x(t))+B_s y(t-\tau), \quad y(t)=Cf(x(t))+Dy(t-\tau), \quad s=\overline{1,N}. \tag{15}$$

Начальные условия и решения для системы (14) определяются так же, как и для системы (1). Из предположений относительно правой части системы следует существование её решений (см. [5]).

По-прежнему предполагаем, что D — матрица Шура, и рассматриваем случай, когда система (14) является позитивной.

Замечание 3. Известно (см. [11, 12]), что для позитивности системы (14) необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A_1, \ldots, A_N$ были метцлеровыми, а матрицы $B_1, \ldots, B_N$, C, D — неотрицательными.

Определение 4. Будем говорить, что система (14) *абсолютно устойчива*, если её нулевое решение асимптотически устойчиво при любой допустимой функции $f(x)$, любом неотрицательном запаздывании τ и любом допустимом законе переключения.

Определение 5. Будем говорить, что система (14) *диагонально устойчива*, если существует функционал вида (3), гарантирующий абсолютную устойчивость этой системы.

Для нахождения условий диагональной устойчивости воспользуемся специальным подходом, который был впервые предложен в работе [19] и получил дальнейшее развитие в [20, 21].

Рассмотрим системы неравенств

$$(A_s+B_s(I-D)^{-1}C)\zeta\leqslant\alpha_1\zeta,\quad s=\overline{1,N},\tag{16}$$

$$A_s^{\mathrm{т}}\eta+C^{\mathrm{т}}(I-D^{\mathrm{т}})^{-1}\max_{r=\overline{1,N}}\{B_r^{\mathrm{т}}\eta\}\leqslant\alpha_2\eta,\quad s=\overline{1,N}.\tag{17}$$

Заметим, что максимум в (17) понимается покомпонентно.

Теорема 3. *Пусть система (14) позитивна. Если существуют векторы $\zeta>0$, $\eta>0$ и числа α_1, α_2 такие, что $\alpha_1+\alpha_2<0$ и выполнены неравенства (16), (17), то данная система диагонально устойчива.*

Доказательство. Функционал Ляпунова–Красовского выбираем в виде (3), причём коэффициенты λ_i определяем по формулам $\lambda_i=\eta_i/\zeta_i$, где η_i, ζ_i — компоненты положительных векторов η, ζ, удовлетворяющих условиям (16) и (17) соответственно, $i=\overline{1,m}$. Обозначим через $W_s(x(t),y_t)$ производную этого функционала в силу s-й подсистемы семейства (15). Имеем

$$W_s(x(t),y_t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}f(x(t))\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}^{\mathrm{т}}G_s\begin{pmatrix}f(x(t))\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$G_s=\begin{pmatrix}A_s^{\mathrm{т}}\Lambda+\Lambda A_s+2C^{\mathrm{т}}\Omega C & \Lambda B_s+2C^{\mathrm{т}}\Omega D\\ B_s^{\mathrm{т}}\Lambda+2D^{\mathrm{т}}\Omega C & 2\,(D^{\mathrm{т}}\Omega D-\Omega)\end{pmatrix},$$

а Λ и Ω — диагональные матрицы с элементами λ_i и ω_j соответственно на главных диагоналях. Нужно подобрать положительные коэффициенты ω_j так, чтобы матрицы G_1, …, G_N были отрицательно определены.

Как и при доказательстве теоремы 1, положим $L=(I-D)^{-1}(C+\gamma I)$, $\gamma=\mathrm{const}>0$, $\theta=\mathrm{col}(\zeta,L\zeta)$. Тогда $\theta>0$ и

$$G_s\theta=\begin{pmatrix}A_s^{\mathrm{т}}\eta+\Lambda\left(A_s+B_s(I-D)^{-1}C\right)\zeta+\gamma\Lambda B_s(I-D)^{-1}\zeta+2C^{\mathrm{т}}\Omega(C+DL)\zeta\\ B_s^{\mathrm{т}}\eta+2(D^{\mathrm{т}}-I)\Omega L\zeta-2\gamma D^{\mathrm{т}}\Omega\zeta\end{pmatrix}.$$

Выберем положительные числа ω_1, …, ω_k так, чтобы имело место равенство

$$2\Omega L\zeta=(I-D^{\mathrm{т}})^{-1}\Big(\max_{r=\overline{1,N}}\{B_r^{\mathrm{т}}\eta\}+\gamma 1_k\Big).$$

Получим

$$G_s\theta\leqslant\begin{pmatrix}\alpha_1\eta+A_s^{\mathrm{т}}\eta+\gamma\Lambda B_s(I-D)^{-1}\zeta+2C^{\mathrm{т}}\Omega L\zeta-2\gamma C^{\mathrm{т}}\Omega\zeta\\ -\gamma 1_k-2\gamma D^{\mathrm{т}}\Omega\zeta\end{pmatrix}\leqslant$$

$$\leqslant\begin{pmatrix}\alpha_1\eta+A_s^{\mathrm{т}}\eta+C^{\mathrm{т}}(I-D^{\mathrm{т}})^{-1}\max_{r=\overline{1,N}}\{B_r^{\mathrm{т}}\eta\}+\gamma\Lambda B_s(I-D)^{-1}\zeta-2\gamma C^{\mathrm{т}}\Omega\zeta\\ -\gamma 1_k-2\gamma D^{\mathrm{т}}\Omega\zeta\end{pmatrix}\leqslant$$

$$\leqslant \begin{pmatrix} (\alpha_1+\alpha_2)\eta+\gamma\Lambda B_s(I-D)^{-1}\zeta-2\gamma C^{\mathrm{T}}\Omega\zeta \\ -\gamma 1_k-2\gamma D^{\mathrm{T}}\Omega\zeta \end{pmatrix}.$$

Значит, если γ достаточно мало́, то $G_s\theta<0$ при всех $s=\overline{1,N}$. Тогда при выбранных значениях параметров функционал (3) будет общим функционалом Ляпунова–Красовского для подсистем семейства (15), удовлетворяющим требованиям теоремы 3 из [5]. Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим гибридную систему (14) в случае, когда $m=k=N=2$,

$$A_1=\begin{pmatrix} -h & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

где h — положительный параметр.

Нетрудно проверить, что для существования положительных векторов ζ и η, удовлетворяющих соответствующим неравенствам (16) и (17), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_1\geqslant\max\left\{4-h,\ \frac{\sqrt{13}-7}{2}\right\},\quad \alpha_2\geqslant 0,$$

$$\alpha_2\geqslant\min\left\{\frac{4-h+\sqrt{(h-8)^2+4}}{2},\ \max\left\{7-h,\ \frac{2-h+\sqrt{(h-6)^2+12}}{2}\right\}\right\}.$$

В соответствии с теоремой 3 значения α_1 и α_2 нужно выбрать так, чтобы имело место соотношение $\alpha_1+\alpha_2<0$. Это можно сделать тогда и только тогда, когда

$$h>\frac{7+\sqrt{11}}{2}. \tag{18}$$

Таким образом, если выполнено неравенство (18), то рассматриваемая система абсолютно устойчива.

Заметим, что из условия $\alpha_2\geqslant 0$ следует, что не существует положительного вектора η такого, что

$$A_s^{\mathrm{T}}\eta+C^{\mathrm{T}}(I-D^{\mathrm{T}})^{-1}\max_{r=\overline{1,N}}\{B_r^{\mathrm{T}}\eta\}<0,\quad s=\overline{1,N},$$

поэтому в данном случае анализ абсолютной устойчивости не может быть проведён на основе результата, полученного в статье [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе установлены условия существования диагональных функционалов Ляпунова–Красовского для некоторого класса нелинейных позитивных дифференциально-алгебраических систем. Кроме того, в случае допустимых функций степенного вида найдены оценки времени переходных процессов, а для соответствующей гибридной системы определены достаточные условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения при любом законе переключения. Следует отметить, что доказательства теорем 1 и 3 содержат конструктивные алгоритмы выбора параметров требуемых функционалов. Дальнейшие исследования будут направлены на развитие предложенных подходов для анализа устойчивости позитивных дифференциально-алгебраических систем с переменным и распределённым запаздыванием.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00091).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Niculescu, S.-I. Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach / S.-I. Niculescu. — Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hong Kong ; London ; Milano ; Paris ; Singapur ; Tokyo : Springer, 2001. — 388 p.
2. Fridman, E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control / E. Fridman. — Basel : Birkhäuser, 2014. — 362 p.
3. Pepe, P. A new Lyapunov–Krasovskii methodology for coupled delay differential and difference equations / P. Pepe, Z.-P. Jiang, E. Fridman // Int. J. Control. — 2007. — V. 81, № 1. — P. 107–115.
4. Rasvan, V. Oscillations in lossless propagation models: a Liapunov–Krasovskii approach / V. Rasvan, S.-I. Niculescu // IMA J. Math. Control Inform. — 2002. — V. 19. — P. 157–172.
5. Gu, K. Lyapunov–Krasovskii functional for uniform stability of coupled differential-functional equations / K. Gu, Y. Liu // Automatica. — 2009. — V. 45. — P. 798–804.
6. Метельский, А.В. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 547–558.
7. Щеглова, А.А. Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса неразрешенности / А.А. Щеглова, А.Д. Кононов // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 5. — С. 36–55.
8. Щеглова, А.А. К вопросу о сверхустойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений / А.А. Щеглова // Автоматика и телемеханика. — 2021. — № 2. — С. 55–70.
9. Pepe, P. On the stability of coupled delay differential and continuous time difference equations / P. Pepe, E.I. Verriest // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2003. — V. 48, № 8. — P. 1422–1427.
10. Ngoc, P.H.A. Stability of coupled functional differential-difference equations / P.H.A. Ngoc // Int. J. Control. — 2020. — V. 93, № 8. — P. 1920–1930.
11. Shen, J. Positivity and stability of coupled differential-difference equations with time-varying delays / J. Shen, W.X. Zheng // Automatica. — 2015. — V. 57. — P. 123–127.
12. Briat, C. Stability and performance analysis of linear positive systems with delays using input–output methods / C. Briat // Int. J. Control. — 2017. — V. 91, № 7. — P. 1669–1692.
13. Aleksandrov, A.Y. Absolute stability and Lyapunov–Krasovskii functionals for switched nonlinear systems with time-delay / A.Y. Aleksandrov, O. Mason // J. Franklin Institute. — 2014. — V. 351, № 8. — P. 4381–4394.
14. Kazkurewicz, E. Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation / E. Kazkurewicz, A. Bhaya. — Boston : Birkhäuser, 1999. — 267 p.
15. Mason, O. Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems / O. Mason // Systems and Control Letters. — 2012. — V. 61. — P. 6–10.
16. Aleksandrov A. Diagonal Riccati stability and applications / A. Aleksandrov, O. Mason // Linear Algebra and its Appl. — 2016. — V. 492. — P. 38–51.

17. Александров, А.Ю. О диагональной устойчивости позитивных систем с переключениями и запаздыванием / А.Ю. Александров, О. Мейсон // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 12. — С. 16–33.
18. Liberzon, D. Basic problems in stability and design of switched systems / D. Liberzon, A.S. Morse // IEEE Control Systems Magazine. — 1999. — V. 19, № 5. — P. 59–70.
19. Pastravanu, O.C. Max-type copositive Lyapunov functions for switching positive linear systems / O.C. Pastravanu, M.-H. Matcovschi // Automatica. — 2014. — V. 50. — P. 3323–3327.
20. Aleksandrov, A.Y. On the existence of a common Lyapunov function for a family of nonlinear positive systems / A.Y. Aleksandrov // Systems and Control Letters. — 2021. — V. 147. — Art. 1048324.
21. Aleksandrov, A.Y. On the existence of diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals for a class of nonlinear positive time-delay systems / A.Y. Aleksandrov // Automatica. — 2024. — V. 160. — Art. 111449.

CONSTRUCTING DIAGONAL LYAPUNOV–KRASOVSKII FUNCTIONALS FOR A CLASS OF POSITIVE DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC SYSTEMS

A. Yu. Aleksandrov

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru

A coupled system describing the interaction of a differential subsystem with nonlinearities of a sector type and a linear difference subsystem is considered. It is assumed that the system is positive. A diagonal Lyapunov–Krasovskii functional is constructed and conditions are determined under which the absolute stability of the investigated system can be proved with the aid of such a functional. In the case of nolinearities of the power form, estimates for the convergence rate of solution to the origin are derived. The stability analysis of the corresponding system with parameter switching is fulfiled. Sufficient conditions guaranteeing the asymptotic stability of the zero solution for any admissible switching law are obtained.

Keywords: differential-algebraic system, absolute stability, positive system, Lyapunov–Krasovskii functional, switchings.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00091).

REFERENCES

1. Niculescu, S.-I., *Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach*, Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milano; Paris; Singapur; Tokyo: Springer, 2001.
2. Fridman, E., *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*, Basel: Birkhäuser, 2014.
3. Pepe, P., Jiang, Z.-P., and Fridman, E., A new Lyapunov–Krasovskii methodology for coupled delay differential and difference equations, *Int. J. Control*, 2007, vol. 81, no. 1, pp. 107–115.
4. Rasvan, V. and Niculescu, S.-I., Oscillations in lossless propagation models: a Liapunov–Krasovskii approach, *IMA J. Math. Control Inform.*, 2002, vol. 19, pp. 157–172.
5. Gu, K. and Liu, Y., Lyapunov–Krasovskii functional for uniform stability of coupled differential-functional equations, *Automatica*, 2009, vol. 45, pp. 798–804.
6. Metel'skii, A. and Khartovskii, V., Synthesis of damping controllers for the solution of completely regular differential-algebraic delay systems, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 539–550.
7. Shcheglova, A.A. and Kononov, A.D., Robust stability of differential-algebraic equations with an arbitrary unsolvability index, *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 5, pp. 798–814.
8. Shcheglova, A.A., On the superstability of an interval family of differential-algebraic equations, *Autom. Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 2, pp. 232–244.
9. Pepe, P. and Verriest, E.I., On the stability of coupled delay differential and continuous time difference equations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 8, pp. 1422–1427.

10. Ngoc, P.H.A., Stability of coupled functional differential-difference equations, *Int. J. Control*, 2020, vol. 93, no. 8, pp. 1920–1930.
11. Shen, J. and Zheng, W.X., Positivity and stability of coupled differential-difference equations with time-varying delays, *Automatica*, 2015, vol. 57, pp. 123–127.
12. Briat, C., Stability and performance analysis of linear positive systems with delays using input–output methods, *Int. J. Control*, 2017, vol. 91, no. 7, pp. 1669–1692.
13. Aleksandrov, A.Y. and Mason, O., Absolute stability and Lyapunov–Krasovskii functionals for switched nonlinear systems with time-delay, *J. Franklin Institute*, 2014, vol. 351, no. 8, pp. 4381–4394.
14. Kazkurewicz, E. and Bhaya, A., *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*, Boston: Birkhäuser, 1999.
15. Mason, O., Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems, *Systems and Control Letters*, 2012, vol. 61, pp. 6–10.
16. Aleksandrov, A. and Mason, O., Diagonal Riccati stability and applications, *Linear Algebra and its Appl.*, 2016, vol. 492, pp. 38–51.
17. Aleksandrov, A.Yu. and Mason, O., On diagonal stability of positive systems with switches and delays, *Autom. Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2114–2127.
18. Liberzon, D. and Morse, A.S., Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, vol. 19, no. 5, pp. 59–70.
19. Pastravanu, O.C. and Matcovschi, M.-H., Max-type copositive Lyapunov functions for switching positive linear systems, *Automatica*, 2014, vol. 50, pp. 3323–3327.
20. Aleksandrov, A.Y., On the existence of a common Lyapunov function for a family of nonlinear positive systems, *Systems and Control Letters*, 2021, vol. 147, art. 1048324.
21. Aleksandrov, A.Y., On the existence of diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals for a class of nonlinear positive time-delay systems, *Automatica*, 2024, vol. 160, art. 111449.