ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 4, с. 550–560

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПРИ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯХ

А. В. Ильин[1], А. С. Фурсов[2]

[1,2]*Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай*
[1,2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
[1]*Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, г. Москва*
[2]*Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, г. Москва*
e-mail: [1]iline@cs.msu.ru, [2]fursov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 02.03.2024 г., после доработки 02.03.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Построен цифровой регулятор, стабилизирующий непрерывную переключаемую линейную систему с соизмеримыми запаздываниями в управлении при медленных переключениях. Стабилизация последовательно включает в себя построение переключаемой непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором; переход к её дискретной модели, представимой в виде переключаемой системы с режимами различных порядков; одновременную стабилизацию подсистем полученной дискретной модели и расчёт времени задержки, обеспечивающего устойчивость исходной переключаемой системы, замкнутой найденным регулятором.

Ключевые слова: стабилизация, цифровой регулятор, переключаемая система, запаздывание.

DOI: 10.31857/S0374064124040093, EDN: OXECBS

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена проблеме стабилизации переключаемых линейных систем с запаздываниями в управлении в случае, когда переключающие сигналы, определяющие активный режим системы в каждый момент времени, являются, во-первых, не наблюдаемыми, т.е. не доступными для измерения, и, во-вторых, имеют ограничение снизу на время между соседними переключениями. Фактически данная статья является непосредственным продолжением работ [1, 2], также посвящённых этой тематике.

В статье [1] исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. При этом предполагалось, что запаздывание одинаковое для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу. В результате для её решения был предложен алгоритм, включающий два основных шага: переход от исходной непрерывной системы к её точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Одним из важных предположений, при котором решалась указанная задача, являлось условие синхронности моментов переключений стабилизируемой системы с моментами времени работы дискретного регулятора.

В работе [2] приведённая задача стабилизации обобщена на случай, когда режимы переключаемой системы имеют различные запаздывания в управлении. Тогда методика, изложенная в [1], приводит к задаче стабилизации переключаемой дискретной системы с режимами различных динамических порядков, для решения которой в [2] было предложено использовать метод расширения динамического порядка, позволяющий перейти к переключаемой системе с режимами единого порядка и далее, на основе метода функций Ляпунова, свести задачу поиска стабилизирующего регулятора к задаче разрешимости системы линейных матричных неравенств. Дискретный регулятор, полученный в результате применения указанной методики, обеспечивает стабилизацию исходной системы при произвольных переключениях рассматриваемого типа.

Ниже рассматривается та же задача стабилизации переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями в управлении, что и в работе [2], с той лишь разницей, что переключающие сигналы теперь имеют ограничения на величину промежутков (времени задержки) между двумя соседними переключениями, т.е. фактически рассматривается переключаемая система с медленными переключениями. Как и в работе [2], с помощью метода точной дискретизации данная система приводится к переключаемой дискретной системе с режимами различных динамических порядков, но затем для поиска стабилизирующего регулятора используется иной подход, основанный на методе одновременной стабилизации конечного семейства динамических порядков с последующей оценкой времени задержки для переключающих сигналов, обеспечивающего устойчивость соответствующей замкнутой системы.

Итак, рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\dot{x}(t)=A_\sigma x(t)+b_\sigma u(t-\theta_\sigma),\quad y(t)=c_\sigma x(t),\quad \sigma\in S_{\mu,\gamma},\quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

где $\sigma\colon \mathbb{R}_+\to I=\{1,\ldots,m\}$ — непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал); $S_{\mu,\gamma}$ — множество переключающих сигналов σ, точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, γ — некоторое положительное число, а $l=0,1,2,\ldots$, при этом время между любыми двумя соседними переключениями не меньше $\tau=\mu\gamma$ $(\mu\in\mathbb{N})$; $x\in\mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y\in\mathbb{R}$ — измеряемый скалярный выход, $u\in\mathbb{R}$ — управляющий вход; $A_\sigma=A\circ\sigma$ — композиция отображения $A\colon I\to\{A_1,\ldots,A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma=b\circ\sigma$, $c_\sigma=c\circ\sigma$ и $\theta_\sigma=\theta\circ\sigma$ — аналогичные композиции для отображений $b\colon I\to\{b_1,\ldots,b_m\}$, $c\colon I\to\{c_1,\ldots,c_m\}$ и $\theta\colon I\to\{\theta_1,\ldots,\theta_m\}$. Здесь $\theta_i>0$ — величины постоянных запаздываний, причём θ_i/γ и θ_i/θ_j — рациональные числа для любых $i,j\in I$ и $\theta_i<\mu\gamma$ для всех $i\in I$. Далее считаем, что переключающий сигнал $\sigma(t)$ не доступен для измерения в процессе функционирования системы (1).

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим (c_i,A_i,b_i) переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t)=A_i x(t)+b_i u(t-\theta_i),\quad y(t)=c_i x(t),\quad i\in I.$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t)\equiv 0$ при $t\leqslant 0$), начальном условии $x(0)=x_0$ и переключающем сигнале $\sigma\in S_{\mu,\gamma}$ является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t)=A_{\sigma(t)}x(t)+b_{\sigma(t)}u(t-\theta_{\sigma(t)}),\quad x(0)=x_0.$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ

Построение цифрового алгоритма управления для переключаемой линейной системы (1) предполагает построение соответствующей непрерывно-дискретной системы, включающей цифровой регулятор. Такая система описывается с помощью дифференциально-разностных уравнений. Приведём эти уравнения в явном виде.

Цифровой регулятор для непрерывной системы представляется в виде последовательного соединения трёх звеньев: идеального квантователя (модель аналого-цифрового преобразователя), преобразующего аналоговый сигнал $y(t)$ в дискретную (решётчатую) функцию $y[lT]=y(lT)$ $(T>0,\ l=0,1,\ldots)$; дискретного регулятора (алгоритм работы для цифрового вычислительного устройства)

$$\begin{cases} v[(l+1)T]=Qv[lT]+qy[lT], & v\in\mathbb{R}^r, \\ u[lT]=Hv[lT]+hy[lT], & v[0]=v_0, \end{cases} \tag{2}$$

и формирующего элемента (модель цифро-аналогового преобразователя)

$$u(t)=\sum_{j=0}^{[t/T]} u[jT]S(t-jT), \quad S(t)=\begin{cases} 1, & t\in[0,T], \\ 0, & t\notin[0,T]. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь T — период квантования по времени t (считаем, что $T<\gamma$); $[\cdot]$ — целая часть действительного числа; $Q\in\mathbb{R}^{r\times r}$, $q\in\mathbb{R}^{r\times 1}$, $H\in\mathbb{R}^{1\times r}$, $h\in\mathbb{R}$ (r — порядок регулятора); $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определённые на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{+\infty}$; формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [3, с. 25].

Замыкая систему (1) регулятором (2), (3), получаем замкнутую непрерывно-дискретную (дифференциально-разностную) систему

$$\begin{matrix} \dot{x}(t)=A_\sigma x(t)+b_\sigma u(t-\theta_\sigma), & x(0)=x_0, \\ v[(l+1)T]=Qv[lT]+qc_\sigma x(lT), & v[0]=v_0, \end{matrix} \quad \sigma(t)\in S_{\mu,\gamma}, \tag{4}$$

где управляющая функция u описывается следующим образом:

$$u(t-\theta_\sigma)=\begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{[(t-\theta_\sigma)/T]}(Hv[lT]+hc_\sigma x(lT))S(t-\theta_\sigma-mT), & \text{если } t\geqslant\theta_\sigma, \\ 0, & \text{если } 0\leqslant t<\theta_\sigma. \end{cases}$$

Система (4) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы ($l=[t/T]$), т.е.

$$lT\leqslant t<(l+1)T, \quad l=1,2,\ldots$$

По аналогии с уравнением состояния системы (1) решением уравнения состояния системы (4) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t)\equiv 0$ при $t\leqslant 0$), начальных условиях $x(0)=x_0$, $v[0]=v_0$ и переключающем сигнале $\sigma\in S_{\mu,\gamma}$ будем считать решение линейной нестационарной дифференциально-разностной системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t)=A_{\sigma(t)}x(t)+b_{\sigma(t)}u(t-\theta_{\sigma(t)}), \quad v[(l+1)T]=Qv[lT]+qc_{\sigma(t)}x(lT), \quad lT\leqslant t<(l+1)T, \quad l=1,2,\ldots$$

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (4) будем называть *равномерно устойчивой*, а регулятор (2), (3) *стабилизирующим*, если для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma\in S_{\mu,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено условие

$$\left\|\begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix}\right\|\to 0 \quad \text{при } t\to+\infty,\ l=[t/T].$$

Здесь под нормой вектора понимается евклидова норма.

Теперь приведём точную постановку задачи стабилизации.

Задача стабилизации. Для переключаемой линейной системы (1) с заданными $\gamma > 0$ и $\mu \in \mathbb{N}$ построить цифровой регулятор вида (2), (3), обеспечивающий равномерную устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы (4).

Задачу построения цифрового стабилизатора для непрерывно-дискретной системы (4) сведём к задаче построения дискретного стабилизатора для соответствующей дискретной модели. При этом необходимо обеспечить выполнение условий согласованности, гарантирующих эквивалентность свойства устойчивости замкнутой непрерывно-дискретной системы (4) и её дискретной модели, замкнутой тем же регулятором.

2. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Для решения сформулированной задачи стабилизации перейдём от непрерывно-дискретной системы (4) к её дискретной модели. Для этого воспользуемся методом точной дискретизации [3, с. 81; 4, с. 40], в соответствии с которым вначале строится дискретная модель для исходной системы (1), а затем она замыкается дискретным регулятором (2).

Выберем константы $l_0 \in N$ и $T > 0$ так, чтобы, во-первых, выполнялось равенство $\gamma = l_0 T$, во-вторых, нашлись бы константы $l_i \in \mathbb{N}$ $(i \in I)$, для которых $\theta_i = l_i T$ (это всегда можно сделать в силу соизмеримости запаздываний).

Отметим, что если $\sigma(t) \in S_{\mu,\gamma}$, то на решения системы (4) влияют значения переключающего сигнала только в моменты $t = lT$ $(l = 0, 1, \ldots)$. Поэтому в качестве переключающих сигналов для дискретной модели переключаемой системы (4) будем в дальнейшем рассматривать соответствующие решётчатые функции $\sigma[lT]$ $(T > 0,\ l = 0, 1, \ldots)$, а множество таких функций обозначать как $[S]_{\mu,\gamma}$. Обозначим через $x[lT]$ решётчатую вектор-функцию для вектора состояния $x(t)$ системы (1).

Итак, пусть в момент времени $t = lT$ вектор состояния системы (1) равен $x[lT]$ и $\sigma[lT] = i$. Тогда, используя формулу Коши для решений линейной стационарной неоднородной системы, имеем

$$x[(l+1)T] = e^{A_i T} x[lT] + \int\limits_{lT}^{(l+1)T} e^{A_i((l+1)T-\xi)} b_i u(\xi - \theta_i)\, d\xi.$$

Поскольку на входе непрерывной системы (1) действует фиксатор нулевого порядка, то $u(t - \theta_i) \equiv u[(l - l_i)T]$ для всех $t \in [lT, (l+1)T]$. Следовательно,

$$x[(l+1)T] = e^{A_i T} x[lT] + b_i u[(l - l_i)T] \int\limits_{lT}^{(l+1)T} e^{A_i((l+1)T-\xi)}\, d\xi.$$

Выполнив под интегралом замену переменной $\mu = \xi - lT$, получим

$$x[(l+1)T] = e^{A_i T} x[lT] + b_i u[(l - l_i)T] \int\limits_0^T e^{A_i(T-\mu)}\, d\mu.$$

Введём обозначения

$$\hat{A}_i = e^{A_i T}, \quad \hat{b}_i = b_i \int\limits_0^T e^{A_i(T-\mu)}\, d\mu,$$

$$x_{n+1}[lT] = u[(l-1)T], \quad x_{n+2}[lT] = u[(l-2)T], \quad \ldots, \quad x_{n+l_i}[lT] = u[(l - l_i)T]. \qquad (5)$$

Тогда

$$x_{n+1}[(l+1)T] = u[lT], \quad x_{n+2}[(l+1)T] = x_{n+1}[lT],$$

$$x_{n+3}[(l+1)T] = x_{n+2}[lT], \quad \ldots, \quad x_{n+l_i}[(l+1)T] = x_{n+l_i-1}[lT]. \qquad (6)$$

Используя введённые обозначения и учитывая, что $\sigma \in S_{\mu,\gamma}$, получаем дискретную модель i-го режима системы (1) в следующем виде:

$$x^{(i)}[(l+1)T] = \bar{A}_i x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i u[lT], \quad y[lT] = \bar{c}_i x^{(i)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{\mu,\gamma}, \tag{7}$$

где

$$x^{(i)}[lT] = \begin{pmatrix} x_1[lT] & \ldots & x_n[lT] & x_{n+1}[lT] & \ldots & x_{n+l_i}[lT] \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}$$

— расширенный вектор состояния дискретной модели i-го режима системы (1),

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} \hat{A}_i & O_{n\times(l_i-1)} & \hat{b}_i \\ O_{1\times n} & O_{1\times(l_i-1)} & 0 \\ O_{(l_i-1)\times n} & E_{(l_i-1)\times(l_i-1)} & O_{(l_i-1)\times 1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_i = \begin{pmatrix} O_{n\times 1} \\ 1 \\ O_{(l_i-1)\times 1} \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_i = \begin{pmatrix} c_i & O_{1\times l_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(n+l_i)}$$

— блочные матрица и векторы, O и E — нулевая и единичная матрицы соответствующих размерностей.

Таким образом, получаем дискретную модель системы (1) в виде переключаемой дискретной системы вида

$$x^{(\sigma)}[(l+1)T] = \bar{A}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + \bar{b}_\sigma u[lT], \quad y[lT] = \bar{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{\mu,\gamma}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Теперь заметим, что режимы (7) построенной переключаемой дискретной системы (8) уже не содержат запаздываний, однако имеют различные динамические порядки, поскольку $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n+l_i}$ для каждого $i \in I$. В связи с этим, для того чтобы определить решение уравнения состояния полученной переключаемой системы, необходимо решить вопрос о согласовании начальных условий для уравнений состояния различных режимов при переключениях между ними.

Итак, пусть в момент времени $\tilde{l}T$ режим j переключаемой системы (8) сменяется режимом i, причём $\theta_j \neq \theta_i$. Тогда, учитывая (5) и (6), зададим начальное значение для вектора состояния $x^{(i)}$ i-го режима в момент $\tilde{l}T$ следующим образом:

$$x^{(i)}[\tilde{l}T] = \begin{pmatrix} x_1[\tilde{l}T] & \ldots & x_n[\tilde{l}T] & u[(\tilde{l}-1)T] & \ldots & u[(\tilde{l}-l_i)T] \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}, \tag{9}$$

где $x_1[\tilde{l}T]$, $\ldots$, $x_n[\tilde{l}T]$ — значения первых n компонент вектора состояния $x^{(j)}$ j-го режима в момент времени $\tilde{l}T$.

Решением уравнения состояния переключаемой системы (8) при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in [S]_{\mu,\gamma}$ и начальном условии $x^{(\sigma[0])}[0] \in \mathbb{R}^{n+l_\sigma}$ будем называть дискретную вектор-функцию $\tilde{x}[lT] \in \mathbb{R}^{n+p}$ ($p = \max_i\{l_i\}$), совпадающую на каждом промежутке активности i-го режима ($i \in I$) с вектор-функцией $\tilde{x}^{(i)}[lT] \in \mathbb{R}^{n+p}$. При этом вектор-функция

$$\tilde{x}^{(i)}[lT] = \begin{pmatrix} x_1[lT] & \ldots & x_n[lT] & x_{n+1}[lT] & x_{n+l_i}[lT] & \underbrace{0 \ \ \ldots \ \ 0}_{p-l_i} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^{n+p}$$

порождается решением уравнения состояния i-го режима (7) на соответствующем промежутке активности $[\tilde{l}T, \hat{l}T]$ этого режима с начальными условиями (9). Учитывая указанные выше определения, в дальнейшем, если в момент времени $\tilde{l}T$ режим j переключаемой системы (8) сменяется режимом i, под $\tilde{x}[\tilde{l}T_-]$ будем понимать значение $\tilde{x}^{(j)}[lT]$, а под $\tilde{x}[\tilde{l}T]$ — значение $\tilde{x}^{(i)}[lT]$.

При введённом выше согласовании начальных условий в моменты переключений системы (8) выполняется свойство точной дискретизации [3, с. 81]

$$x(t)|_{t=lT} = \bar{x}[lT] = \begin{pmatrix} x_1[lT] & \ldots & x_n[lT] \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}, \quad l = 0, 1, \ldots,$$

где $x(t)$ — решение уравнения состояния непрерывной системы (1) при фиксированном управлении u и заданных $\sigma \in S_{\mu,\gamma}$, $x(0) \in \mathbb{R}^n$, а $\bar{x}[lT]$ — вектор, образованный первыми n компонентами вектора $\tilde{x}[lT]$ решения соответствующей дискретной системы (8) при согласованных начальных условиях

$$x^{\sigma[0]}[0] = \begin{pmatrix} x_1^{(\sigma[0])}[0] \\ \dots \\ x_n^{(\sigma[0])}[0] \\ x_{n+1}^{(\sigma[0])}[0] \\ \dots \\ x_{n+l_{\sigma(0)}}^{(\sigma[0])}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \dots \\ x_n(0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Замыкая систему (8) регулятором (2), получаем дискретную модель замкнутой непрерывно-дискретной системы (4):

$$\begin{aligned} &x^{(\sigma)}[(l+1)T] = (\bar{A}_\sigma + \bar{b}_\sigma h \bar{c}_\sigma) x^{(\sigma)}[lT] + \bar{b}_\sigma H v[lT], \\ &v[(l+1)T] = q\bar{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + Qv[lT], \end{aligned} \qquad \sigma \in [S]_{\mu,\gamma}. \tag{11}$$

Решением системы (11) считаем вектор $\hat{x}[lT] = (\tilde{x}[lT] \quad v[lT])^{\mathrm{т}}$. Замкнутую дискретную переключаемую систему (11) будем называть *равномерно устойчивой*, если при любых начальных условиях $x^{\sigma[0]}[0]$ вида (10), $v[0]$ и $\sigma \in [S]_{\mu,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено

$$\|\hat{x}[lT]\| \to 0 \quad \text{при } l \to +\infty.$$

На основании результатов работы [1] сформулируем теорему о согласованности свойства устойчивости систем (4) и (11).

Теорема 1. *Пусть переключаемая дискретная система (11) равномерно устойчива, тогда непрерывно-дискретная система (4) также равномерно устойчива.*

Таким образом, поставленная в п. 1 задача стабилизации, в соответствии с теоремой 1, может быть сведена к задаче стабилизации по выходу дискретной системы (8) дискретным регулятором (2).

3. ОДНОВРЕМЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И РАСЧЁТ ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ

Как известно, регулятор, стабилизирующий переключаемую систему, должен стабилизировать каждый режим этой системы в отдельности. Поскольку рассматриваемая задача стабилизации переключаемой системы (1) предполагает неизмеряемость переключающего сигнала $\sigma(t)$, то, учитывая рассуждения п. 2, синтез соответствующего цифрового регулятора фактически можно свести к задаче об одновременной стабилизации конечного семейства дискретных объектов

$$x^{(i)}[(l+1)T] = \bar{A}_i x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i u[lT], \quad y[lT] = \bar{c}_i x^{(i)}[lT], \quad i = \overline{1,m}, \tag{12}$$

единым регулятором вида (2).

Для решения задачи об одновременной стабилизации конечного семейства дискретных объектов (12) перейдём к их описанию через передаточные функции

$$\bar{W}_i(z) = \bar{c}_i(zI - \bar{A}_i)^{-1}\bar{b}_i = \frac{\bar{\beta}_i(z)}{\bar{\alpha}_i(z)} = \frac{b_{n_i+l_i-1,i}z^{n_i+l_i-1} + \ldots + b_{1,i}z + b_{0,i}}{z^{n_i+l_i} + a_{n_i+l_i-1,i}z^{n_i+l_i-1} + \ldots + a_{1,i}z + a_{0,i}}. \tag{13}$$

Теперь для построения единого регулятора, стабилизирующего объекты семейства (13), можно воспользоваться методами одновременной стабилизации, изложенными в монографии [5, с. 115]. Эти методы позволяют построить единый дискретный регулятор (в случае его существования) в виде передаточной функции

$$R^*(z) = \frac{p^*(z)}{g^*(z)} = \frac{p_r z^r + p_{r-1} z^{r-1} + \ldots + p_1 z + p_0}{z^r + g_{r-1} z^{r-1} + \ldots + g_1 z + g_0}. \tag{14}$$

Далее, в соответствии с методами теории реализации [6, с. 127], переходим от описания регулятора в виде передаточной функции (14) к описанию в пространстве состояний вида (2).

Построенный дискретный регулятор стабилизирует каждый режим переключаемой системы (7), т.е. обеспечивает для всех $i = \overline{1, m}$ асимптотическую устойчивость замкнутых систем

$$\begin{gathered} x^{(i)}[(l+1)T] = (\bar{A}_i + \bar{b}_i h \bar{c}_i) x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i H v[lT], \\ v[(l+1)T] = q\bar{c}_i x^{(i)}[lT] + Qv[lT]. \end{gathered} \tag{15}$$

Теперь необходимо определить значение времени задержки $\tau = \mu\gamma$, при котором найденный регулятор обеспечивает $[S]_{\mu,\gamma}$-устойчивость переключаемой дискретной системы (11). Для удобства дальнейших рассуждений перепишем системы (15) в виде

$$\bar{x}^{(i)}[(l+1)T] = \tilde{A}_i \bar{x}^{(i)}[lT], \quad i = \overline{1, m}, \quad \bar{x}^{(i)} = (x^{(i)} \quad v)^{\mathrm{т}}. \tag{16}$$

Используем процедуру, аналогичную предложенной в работе [7] для непрерывного случая. Для каждой дискретной устойчивой системы (16) ($i = \overline{1, m}$) рассмотрим дискретное матричное уравнение Ляпунова

$$\tilde{A}_i P_i \tilde{A}_i^{\mathrm{т}} - P_i = -R_i \tag{17}$$

с некоторой положительно определённой матрицей R_i. Известно [8, с. 59], что если матрицы $\tilde{A}_i$ шуровские (все собственные значения лежат внутри единичного круга), то уравнения (17) для каждого $i = \overline{1, m}$ имеют положительно определённые решения P_i, при этом функции $V_i = \tilde{x}^{\mathrm{т}} P_i \tilde{x}$ являются дискретными функциями Ляпунова для систем (16). Тогда, в соответствии с [8, с. 60], для решений этих систем верны следующие оценки:

$$\|\bar{x}^{(i)}[lT]\| \leqslant C_i \|\bar{x}^{(i)}[mT]\| \rho_i^{l-m}, \tag{18}$$

где

$$C_i = \sqrt{M_i/m_i}, \quad \rho_i = \sqrt{1 - r_i/M_i},$$

m_i и M_i — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы P_i, а r_i — минимальное собственное значение матрицы R_i (из [8, с. 62] следует, что $r_i < M_i$); через $\bar{x}^{(i)}$ обозначены векторы состояния соответствующих систем (16).

Обозначим $C_* = \max\{C_1, \ldots, C_m\}$ ($C_* \geqslant 1$), $\rho_0 = \max\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ ($0 < \rho_0 < 1$). Теперь можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть регулятор (2) является единым стабилизатором для семейства дискретных объектов (12), R_i ($i = \overline{1, m}$) — некоторые положительно определённые матрицы порядка n, а P_i ($i = \overline{1, m}$) — соответствующие положительно определённые решения матричных уравнений Ляпунова (17). Пусть для матриц R_i и P_i вычислены значения C_* и ρ_0.*

Тогда регулятор (2) является стабилизирующим для дискретной переключаемой линейной системы (8), для которой

$$\mu > \frac{p - \log_{\rho_0} C_0^2}{l_0}, \tag{19}$$

где $C_0 = C_*^2(1+(p-k)\max_{\bar c_i}\{\|H\|+\|h\bar c_i\|\})$, $p=\max_i\{l_i\}$, $k=\min_i\{l_i\}$.

Доказательство. Пусть для замкнутой системы (11) выполнено условие (19). Зафиксируем произвольный переключающий сигнал $\sigma_*[lT]\in[S]_{\mu,\gamma}$ и соответствующее произвольное начальное условие $x^{\sigma_*[0]}(0)$. Пусть $\{m_jT\}$, $j\in\mathbb{N}$, — последовательность моментов переключений, задаваемых сигналом $\sigma_*[lT]$ (считаем, что $m_0=0$).

Рассмотрим два произвольных последовательных момента переключений m_jT и $m_{j+1}T$. Оценим теперь норму $\|\hat x[m_{j+1}T]\|$ через норму $\|\hat x[m_jT]\|$ в предположении, что значения $\sigma_*[m_jT]$ и $\sigma_*[m_{j+1}T]$ неизвестны.

Учитывая определение решения системы (11), имеем

$$\big\|\hat x[m_{j+1}T]\big\| \leqslant \big\|\hat x[m_{j+1}T_-]\big\| + \big|u[(m_{j+1}-(k+1))T]\big| + \ldots + \big|u[(m_{j+1}-p)T]\big|. \tag{20}$$

Поскольку $u[lT]=Hv[lT]+hc_\sigma x^{(\sigma)}[lT]$, то

$$\big|u[(m_{j+1}-(k+1))T]\big| \leqslant \max_{\bar c_i}\{\|H\|+\|h\bar c_i\|\}\big\|\hat x[(m_{j+1}-(k+1))T]\big\|, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad \big|u[(m_{j+1}-p)T]\big| \leqslant \max_{\bar c_i}\{\|H\|+\|h\bar c_i\|\}\big\|\hat x[(m_{j+1}-p)T]\big\|. \tag{21}$$

В силу (18) справедливы неравенства

$$\big\|\hat x[m_{j+1}T_-]\big\| \leqslant C_*\rho_0^p\big\|\hat x[(m_{j+1}-p)T]\big\| \leqslant C_*\big\|\hat x[(m_{j+1}-p)T]\big\| \tag{22}$$

и

$$\big\|\hat x[(m_{j+1}-s)T]\big\| \leqslant C_*\rho_0^{p-s}\big\|\hat x[(m_{j+1}-p)T]\big\| \tag{23}$$

при $s\in[k+1,p-1]$. Из (20)–(23) получаем

$$\big\|\hat x[m_{j+1}T]\big\| \leqslant \big\|\hat x[m_{j+1}T_-]\big\| + (p-k)C_*\max_{\bar c_i}\{\|H\|+\|h\bar c_i\|\}\big\|\hat x[(m_{j+1}-p)T]\big\| \leqslant$$
$$\leqslant C_*\big(1+(p-k)\max_{\bar c_i}\{\|H\|+\|h\bar c_i\|\}\big)\big\|\hat x[(m_{j+1}-p)T]\big\|.$$

Далее, поскольку

$$m_{j+1}-m_j \geqslant \mu l_0 > p, \tag{24}$$

то

$$\big\|\hat x[m_{j+1}T]\big\| \leqslant C_*\big(1+(p-k)\max_{\bar c_i}\{\|H\|+\|h\bar c_i\|\}\big)C_*\big\|\hat x[m_jT]\big\|\rho_0^{m_{j+1}-m_j-p}.$$

Обозначив

$$m_{j+1}^* = m_{j+1}-m_j-p,$$

получим неравенство

$$\|\hat x[m_{j+1}T]\| \leqslant C_0\|\hat x[m_jT]\|\rho_0^{m_{j+1}^*},$$

откуда следует, что для любого $j\in\mathbb{N}$ верна цепочка неравенств

$$\big\|\hat x[m_jT]\big\| \leqslant C_0\big\|\hat x[m_{j-1}T]\big\|\rho_0^{m_j^*} \leqslant C_0^2\big\|\hat x[m_{j-2}T]\big\|\rho_0^{m_{j-1}^*+m_j^*} \leqslant C_0^j\big\|\hat x[m_0T]\big\|\rho_0^{m_1^*+m_2^*+\ldots+m_j^*}. \tag{25}$$

Так как $m_1^*+m_2^*+\ldots+m_j^*=m_j-jp$ и $m_0=0$, то из (25) имеем

$$\|\hat{x}[m_jT]\|\leqslant C_0^j\|\hat{x}[0]\|\rho_0^{m_j-jp}=\left(\frac{C_0}{\rho_0^p}\right)^j\|\hat{x}[0]\|\rho_0^{m_j}=\left(\frac{C_0}{\rho_0^p}\right)^j\rho_0^{j\mu l_0}\|\hat{x}[0]\|\rho_0^{m_j-j\mu l_0}=$$
$$=(C_0\rho_0^{\mu l_0-p})^j\|\hat{x}[0]\|\rho_0^{m_j-j\mu l_0}. \tag{26}$$

Далее, в силу (24) справедливы неравенства

$$m_j>m_{j-1}+\mu l_0>m_{j-2}+2\mu l_0>\ldots>m_0+j\mu l_0=j\mu l_0,$$

поэтому

$$\rho_0^{m_j-j\mu l_0}<1. \tag{27}$$

Поскольку из условия теоремы следует, что

$$\mu>\frac{p-\log_{\rho_0}C_0^2}{l_0}>\frac{p-\log_{\rho_0}C_0}{l_0},$$

то

$$\mu l_0-p+\log_{\rho_0}C_0>0,$$

а значит,

$$\log_{\rho_0}(C_0\rho_0^{\mu l_0-p})>0$$

и

$$C_0\rho_0^{\mu l_0-p}<1. \tag{28}$$

Тогда из (26)–(28) получаем

$$\lim_{j\to+\infty}\|\hat{x}[m_jT]\|=0. \tag{29}$$

Теперь для каждого промежутка $[m_{j+1}T,m_{j+2}T)$, $j\in\mathbb{N}$, рассмотрим величину

$$h_{j+1}=\max_{lT\in[m_{j+1}T,m_{j+2}T)}\{\|\hat{x}[lT]\|\}.$$

Из (18) следует, что

$$h_{j+1}\leqslant C_*\|\hat{x}[m_{j+1}T]\|\rho^{\eta}$$

для некоторого $\eta\geqslant 0$. Отсюда и из (24) имеем

$$h_{j+1}\leqslant C_*\|\hat{x}[m_{j+1}T]\|\leqslant C_0\|\hat{x}[m_{j+1}T]\|\leqslant C_0^2\|\hat{x}[m_jT]\|\rho_0^{m_{j+1}^*}\leqslant C_0^2\|\hat{x}[m_jT]\|\rho_0^{\mu l_0-p}. \tag{30}$$

Так как из условия теоремы вытекает, что

$$\mu l_0-p+\log_{\rho_0}C_0^2>0,$$

то

$$C_0^2\rho_0^{\mu l_0-p}<1.$$

Тогда из (30) получаем

$$h_{j+1}\leqslant\|\hat{x}[m_jT]\|,$$

откуда, учитывая (29), находим

$$\lim_{j\to+\infty}h_{j+1}=0.$$

Таким образом, для рассматриваемого решения $\hat{x}[lT]$ справедливо равенство

$$\lim_{l\to+\infty}\|\hat{x}[lT]\|=0.$$

Следовательно, замкнутая система (11) равномерно устойчива. Теорема доказана.

4. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО РЕГУЛЯТОРА

На основании теоремы 2 можно предложить следующую процедуру построения стабилизирующего регулятора для системы (8).

1. Используя известные методы [5, с. 115] поиска одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства дискретных систем (13) на основе интервального анализа [9, с. 81], построим в пространстве $\mathbb{R}^{2r+1}$ коэффициентов регулятора (14) множество $\mathcal{P}$, представляющее собой объединение конечного набора параллелотопов, каждая точка которого соответствует одновременно стабилизирующему регулятору.

2. На множестве $\mathcal{P}$ в пространстве $\mathbb{R}^{2r+1}$ построим равномерную сетку и для каждого j-го узла сетки, соответствующего некоторому одновременно стабилизирующему регулятору, выпишем этот регулятор в пространстве состояний и соответствующую замкнутую систему вида (11).

3. Для каждого j-го узла сетки проверим выполнение неравенства (19) для соответствующей замкнутой системы (11). Если хотя бы для одного узла сетки проверка даёт положительный результат, то на этом работа алгоритма закончена, поскольку найденный регулятор в силу теоремы 2 будет обеспечивать устойчивость системы (11), а следовательно, в силу теоремы 1, и замкнутой системы (4).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурсов, А.С. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении / А.С. Фурсов, С.И. Миняев, В.С. Гусева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. —1132–1141.
2. Ильин, А.В. Цифровая стабилизация переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями / А.В. Ильин, А.С. Фурсов // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 514. — С. 82–88.
3. Поляков, К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие / К.Ю. Поляков. — СПб. : Изд-во СПбГМТУ, 2012. — 154 с.
4. Chen, T. Optimal sample-data control systems / T. Chen, B. Francis. — Berlin : Springer-Verlag, 1994. — 386 p.
5. Фурсов, А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов / А.С. Фурсов. — М. : Аргамак-медиа, 2016. — 238 с.
6. Математические методы теории управления. Проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости / С.В. Емельянов, С.К. Коровин, А.В. Ильин [и др.] — М. : Физматлит, 2013. — 197 с.
7. Фурсов, А.С. К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем / А.С. Фурсов, Э.Ф. Хусаинов // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1522–1533.
8. Поляк, Б.Т. Математическая теория автоматического управления / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт. — М. : Ленанд, 2019. — 504 с.
9. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер ; пер. с англ. С.И. Кумков ; ред. Б.Т. Поляк. — 2-е изд., испр. — М. : Институт компьютерных исследований, 2007. — 468 с.

STABILIZATION OF THE SWITCHED SYSTEM WITH COMPARABLE DELAYS DURING SLOW SWITCHINGS

A. V. Il'in[1], A. S. Fursov[2]

[1,2]Department of Mathematics, School of Science,
Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, Zhejiang, China
[1,2]Lomonosov Moscow State University, Russia
[1]Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, Moscow, Russia
[2]Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia
e-mail: [1]iline@cs.msu.ru, [2]fursov@cs.msu.su

An approach is proposed to constructing a digital controller that stabilizes a continuously switched linear system with commensurate delays in control during slow switchings. The approach to stabilization consistently includes the construction of a switchable continuous-discrete closed-loop system with a digital controller, the transition to its discrete model, represented in the form of a switched system with modes of different orders, simultaneous stabilization of the subsystems of the resulting discrete model and calculation of the delay time that ensures the stability of the original switched system , closed by the found regulator.

Keywords: stabilization, digital controller, switchable system, delay.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2019-1621.

REFERENCES

1. Fursov, A.S., Minyaev, S.I., and Guseva, V.S., Digital stabilizer design for a switched linear control delay system, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 8, pp. 1115–1124.
2. Ilin, A.V. and Fursov, A.S., Digital stabilization of a switched linear system with commensurate delays, *Dokl. Math.*, 2023, vol. 108, no. 3, pp. 493–498.
3. Polyakov, K.Yu., *Osnovy teorii tsifrovykh sistem upravleniya* (Fundamentals of the Theory of Digital Control Systems), St. Petersburg: St.-Peterb. Gos. Morsk. Tech. Univ. Press, 2012.
4. Chen, T. and Francis, B., *Optimal sample-data control systems*, Berlin: Springer-Verlag, 1994.
5. Fursov, A.S., *Odnovremennaya stabilizatsiya: teoriya postroyeniya universal'nogo regulyatora dlya semeystva dinamicheskikh ob"yektov* (Simultaneous Stabilization: Theory of Constructing a Universal Controller for a Family of Dynamic Objects), Moscow: Argamak-Media, 2016.
6. Emel'yanov, S.V., Korovin, S.K., Il'in, A.V., Fomichev, V.V., and Fursov, A.S., *Matematicheskiye metody teorii upravleniya. Problemy ustoychivosti, upravlyayemosti i nablyudayemosti* (Mathematical Methods of Control Theory: Problems of Stability, Controllability, and Observability), Moscow: Fizmatlit, 2013.
7. Fursov, A.S. and Khusainov, E.F., On the stabilization of switchable linear systems, *Differ. Equat.*, vol. 51, no. 11, pp. 1518–1528.
8. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., and Rapoport, L.B., *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* (Mathematical Theory of Automatic Control), Moscow: Lenand, 2019.
9. Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., and Walter, E., *Applied Interval Analysis*, New York: Springer-Verlag, 2001.