ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 4, с. 533–549

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Д. В. Георгиевский[1], Н. А. Раутиан[2]

[1,2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
[1,2]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*
e-mail: [1]georgiev@mech.math.msu.su, [2]nadezhda.rautian@math.msu.ru

Поступила в редакцию 24.01.2024 г., после доработки 24.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Рассматриваются вопросы корректной разрешимости и экспоненциальной устойчивости решений абстрактных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами интегральных операторов общего вида из пространства функций, интегрируемых на положительной полуоси. Исследуемые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. Предлагаемый подход к изучению указанных интегро-дифференциальных уравнений связан с применением теории полугрупп и может быть использован для исследования других интегро-дифференциальных уравнений, содержащих интегральные слагаемые вида вольтерровой свёртки.

Ключевые слова: вольтеррово интегро-дифференциальное уравнение, линейное дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, полугруппа операторов, вязкоупругость.

DOI: 10.31857/S0374064124040083, EDN: OZNRQI

ВВЕДЕНИЕ

Большую роль в теории определяющих соотношений линейной вязкоупругости играют связи напряжений и деформаций в виде интегральных операторов с ядрами, являющимися материальными функциями, которые можно найти из установочных экспериментов [1–3]. Если материальные функции зависят только от одной временно́й переменной, то вязкоупругие среды называют *нестареющими*. Использование данных определяющих соотношений в постулатах механики сплошной среды приводит, в частности, к уравнениям движения, представляющим собой вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Будем называть их далее *абстрактными интегро-дифференциальными уравнениями.*

Ниже на примере абстрактного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в линейной теории вязкоупругости, будет представлен общий подход исследования, который можно применить ко многим другим линейным моделям, содержащим вольтерровы интегральные операторы. Указанное абстрактное интегро-дифференциальное уравнение (одномерное уравнение движения вязкоупругой среды) может быть реализовано как интегро-дифференциальное уравнение в частных производных:

$$u_{tt}(x,t)=\rho^{-1}\left[\mu\Delta u(x,t)+(\mu+\lambda)\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{div}u(x,t))\right]-$$
$$-\int\limits_l^t K(t-\tau)\rho^{-1}\mu\left[\Delta u(x,\tau)+\operatorname{grad}(\operatorname{div}u(x,\tau))\right]d\tau-\int\limits_l^t Q(t-\tau)\rho^{-1}\lambda\operatorname{grad}(\operatorname{div}u(x,\tau))\,d\tau+f(x,t),$$

где $t>0$; $u=\vec{u}(x,t)\in\mathbb{R}^3$ — вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей; l — заданный параметр $(-\infty\leqslant l\leqslant 0)$, $\rho>0$ — постоянная плотность; λ, μ — положительные параметры, аналоги коэффициентов Ламе в теории упругости (см. [1, 2]).

Предполагается, что на границе области Ω выполнены условия Дирихле $u|_{\partial\Omega}=0$. Ядра интегральных операторов $K(t)$, $Q(t)$ — положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды.

К вольтерровым интегро-дифференциальными уравнениями относится также интегро-дифференциальное уравнение Гуртина–Пипкина (см. [4–7]), которое описывает процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью. Кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси, см. [8]).

Линейные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с частными производными представляют достаточно широкий класс интегро-дифференциальных уравнений, поэтому более естественно рассматривать интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегро-дифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения с частными производными.

Исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях, посвящена обширная литература (см., например, работы [4–15] и библиографию в них).

Для получения результатов данной статьи использован подход, связанный с изучением однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений, который является продолжением и развитием исследований, результаты которых опубликованы в работах [6, 11, 12], посвящённых спектральному анализу оператор-функций — символов вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство; A — самосопряжённый положительный оператор: $A^*=A\geqslant\kappa_0 I$ $(\kappa_0>0)$, действующий в пространстве H и имеющий ограниченный обратный. Путь B — симметрический оператор: $(Bx,y)=(x,By)$, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$ $(D(A)\subseteq D(B))$, неотрицательный: $(Bx,x)\geqslant 0$ для любых $x,y\in D(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\|\leqslant\kappa\|Ax\|$, $0<\kappa<1$, для любого $x\in D(A)$; I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+(A+B)u(t)-\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{l}^{t}R_k(t-s)(a_kA+b_kB)u(s)\,ds=f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{1}$$

$$u(+0)=\varphi_0,\quad u'(+0)=\varphi_1,\quad u(t)=\varphi(t),\quad t\in[l,0],\quad -\infty\leqslant l\leqslant 0,\tag{2}$$

где $a_k>0$, $b_k\geqslant 0$, $k=\overline{1,N}$, $\varphi(0)=\varphi_0$, $\varphi'(0)=\varphi_1$. Допустим, что функции $R_k\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k(t) \text{ — положительные невозрастающие функции},\quad R_k(t)\in L_1(\mathbb{R}_+),\quad k=\overline{1,N}.\tag{3}$$

Пусть

$$M_k(t)=\int\limits_{t}^{+\infty}R_k(s)\,ds,\quad k=\overline{1,N}.\tag{4}$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$\sum_{k=1}^{N} a_k M_k(0) < 1, \quad \sum_{k=1}^{N} b_k M_k(0) < 1. \tag{5}$$

Определение 1. Назовём вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением* задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2).

2. ЗАДАЧА КОШИ И ПОЛУГРУППА ОПЕРАТОРОВ В РАСШИРЕННОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Положим

$$A_0 := \left(1 - \sum_{k=1}^{N} a_k M_k(0)\right) A + \left(1 - \sum_{k=1}^{N} b_k M_k(0)\right) B,$$

$$A_k := a_k A + b_k B,$$

$$Q_1 := A^{1/2} A_0^{-1/2}, \quad Q_2 := B^{1/2} A_0^{-1/2}. \tag{6}$$

Замечание 1. Из известного результата (см. [16, с. 361]) вытекает, что операторы A_0, A_k являются самосопряжёнными и положительными для всех $k = \overline{1, N}$.

Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [17, с. 177–179]) следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы Q_1, Q_2 допускают ограниченное замыкание в H, A_0^{-1} — ограниченный оператор.

Превратим область определения $D(A_0^{\beta})$ оператора A_0^{β}, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_{β}, введя на $D(A_0^{\beta})$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^{β}.

Через Ω_k обозначим весовое пространство $L^2_{r_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в H, снабжённое нормой

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} r_k(s) \|u(s)\|_H^2 \, ds \right)^{1/2}, \quad r_k(\tau) := R_k^{-1}(\tau) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad k = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [18, с. 33]): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$, $t > 0$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \partial \xi(\tau)/\partial \tau$ в пространстве Ω_k с областью определения $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k \colon \partial \xi(\tau)/\partial \tau \in \Omega_k\}$ является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [18, с. 66]).

Введём операторы $\mathbb{B}_k \colon H \to \Omega_k$ $(k = 1, 2)$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = R_k(\tau) Q_k v, \quad k = \overline{1, N}, \quad \tau > 0.$$

Тогда сопряжённые операторы $\mathbb{B}_k^* \colon \Omega_k \to H$ $(k = 1, 2)$ имеют вид

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(t, \tau) \, d\tau, \quad k = \overline{1, N}.$$

Действительно, для любых $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} = \langle R_k(\tau) Q_k v, \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} =$$

$$= \int_0^{+\infty} r_k(\tau) \langle R_k(\tau) Q_k v, \xi(\tau) \rangle_H \, d\tau = \left\langle v, Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi(\tau) \, d\tau \right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) \rangle_H.$$

Введём гильбертово пространство

$$\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\oplus_{k=1}^{N} \Omega_k\right),$$

снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \|\xi_k\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau > 0,$$

которое будем называть *расширенным гильбертовым пространством.*

Введём также линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \Bigg\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau)) \in \mathbb{H}\colon$$

$$v \in H_{1/2},\ \ \xi_0 + \sum_{k=1}^{N} Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \xi_k(\tau)\, d\tau \in H_{1/2},\ \ \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k),\ \ k = \overline{1, N} \Bigg\} =$$

$$= \Bigg\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau)) \in \mathbb{H}\colon v \in H_{1/2},\ \ \xi_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2},\ \ \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k),\ \ k = \overline{1, N} \Bigg\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau)) =$$

$$= \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \xi_k(\tau)\, d\tau \right],\ \ A_0^{1/2} v,\ \ R_k(\tau) Q_k A_0^{1/2} v + \mathbb{T}_k \xi_k(\tau) \right) =$$

$$= \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right],\ \ A_0^{1/2} v,\ \ \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau) \right)^T, \quad k = \overline{1, N}.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде произведения операторных матриц:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & \cdots & -\mathbb{B}_N^* \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & \mathbb{T}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{B}_N & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{T}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}.$$

Определение 2. Линейный оператор $\mathcal{A}$ с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется *диссипативным*, если $\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, x) \leqslant 0$ при $x \in D(\mathcal{A})$, и *максимально диссипативным*, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

В работе [13] показано, что при выполнении условий (5) оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ максимально диссипативен и, следовательно, является генератором сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

Введём $(2+N)$-компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \ldots, \xi_N(t, \tau)) \in \mathbb{H},$$

$$Z_0 = (v_0, \xi_{00}, \xi_{01}(\tau), \ldots, \xi_{0N}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$:

$$\frac{d}{dt}Z(t)=\mathbb{A}Z(t), \tag{7}$$

$$Z(0)=Z_0. \tag{8}$$

Определение 3. Вектор $Z(t)=(v(t),\xi_0(t),\xi_1(t,\tau),\ldots,\xi_N(t,\tau))\in D(\mathbb{A})$ называется *классическим решением* задачи (7), (8), если $v(t),\xi_0(t)\in C^1(\mathbb{R}_+,H)$, $\xi_k(t,\tau)\in C^1(\mathbb{R}_+,H)$ для любого $\tau>0$, $k=\overline{1,N}$, $Z(t)\in C([0,+\infty),D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (7) для любого $t\in\mathbb{R}_+$ и начальному условию (8).

3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Предположим, что ядра интегральных операторов $R_k(\tau)$, $k=\overline{1,N}$, удовлетворяют условиям

$$R_k'(\tau)+\gamma R_k(\tau)\leqslant 0 \tag{9}$$

для некоторого $\gamma>0$ и почти всех $\tau>0$. Условие (9) хорошо известно и использовалось разными авторами для доказательства экспоненциальной устойчивости полугрупп, связанных с различными уравнениями с памятью (см., например, монографию [3], а также цитированную в ней литературу).

Приведём результат об экспоненциальной устойчивости полугруппы $S(t)=e^{t\mathbb{A}}$, $t\geqslant 0$, в пространстве $\mathbb{H}$.

Теорема 1 [15, теорема 1.1]. *Пусть $S(t)Z_0$ — решение задачи (7), (8) при $t>0$ и пусть функции $R_k(\tau)$ $(k=\overline{1,N})$ удовлетворяют условиям (3), (5) и условию (9) для некоторого $\gamma>0$ и почти всех $\tau>0$. Тогда существуют такие постоянные $\theta>1$ и $\omega>0$, что для любого $Z_0\in D(\mathbb{A})$ справедливо неравенство*

$$\|S(t)Z_0\|_{\mathbb{H}}\leqslant\theta\,\|Z_0\|_{\mathbb{H}}\,e^{-\omega t}. \tag{10}$$

4. ТЕОРЕМЫ О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$:

$$\frac{d}{dt}Z(t)=\mathbb{A}Z(t)+F(t), \tag{11}$$

$$Z(0)=Z_0, \tag{12}$$

здесь $Z(t)=(v(t),\xi_0(t),\xi_1(t,\tau),\ldots,\xi_N(t,\tau))\in D(\mathbb{A})$;

$$Z_0:=\Big(\varphi_1,A_0^{1/2}\varphi_0,\xi_{01}(\tau),\ldots,\xi_{0N}(\tau)\Big)\in D(\mathbb{A}), \tag{13}$$

функции $\xi_{0k}(\tau)$ определены формулами

$$\xi_{0k}(\tau):=\int\limits_l^0 R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds,\quad \tau>0,\quad k=\overline{1,N};$$

$$F(t):=(f_1(t),0,0,\ldots,0),\quad f_1(t):=f(t)-\sum_{k=1}^N M_k(t-l)A_k\varphi(l),$$

l — заданное число $(-\infty\leqslant l\leqslant 0)$; $f(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$, $\varphi(t)\in C([l,0],H)$ — заданные вектор-функции; $\varphi_0\in H$, $\varphi_1\in H$ — заданные векторы; функции $M_k(\cdot)$ $(k=\overline{1,N})$ определяются формулами (4).

Теорема 2 (о корректной разрешимости (общий случай)). *Пусть l — заданное число $(-\infty\leqslant l\leqslant 0)$, выполнены условия (3), (5), $\varphi(t)\in H_1$, $\varphi'(t)\in H_1$ при $t\in[l,0]$, $\varphi(t)\in C([l,0],H_1)$, $\varphi'(t)\in C([l,0],H_1)$, $\varphi(0)=\varphi_0$, $\varphi'(0)=\varphi_1$, условие $\lim_{t\to l}A_k\varphi(t)=0$ $(k=\overline{1,N})$ выполнено при $-\infty\leqslant l<0$ и, кроме того, выполнен любой из следующих двух наборов условий:*

1) $f_1(t)\in H_{1/2}$, $A_0^{1/2}f_1(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$, $M_k(t)\in C(\mathbb{R}_+)$, $k=\overline{1,N}$, и условие $\varphi_0\in H_{3/2}$ выполнено, если $l=0$;

2) $f_1(t)\in C^1(\mathbb{R}_+,H)$, $M_k(t)\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k=\overline{1,N}$.

Тогда задача (11), (12) имеет единственное классическое решение

$$Z(t)=(v(t),\xi_0(t),\xi_1(t,\tau),\ldots,\xi_N(t,\tau)),$$

где $v(t)=u'(t)$, $\xi_0(t)=A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными l, $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0, φ_1, и справедлива следующая оценка:

$$E(t)=\frac{1}{2}\Big(\|u'(t)\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}u(t)\big\|_H^2\Big)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$
$$\leqslant d\Bigg[\|\varphi_1\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}\varphi_0\big\|_H^2+\sum_{k=1}^N\bigg\|\int_l^0 R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\bigg\|_{\Omega_k}^2+$$
$$+\bigg(\int_0^t\bigg\|f(s)-\sum_{k=1}^N M_k(s-l)A_k\varphi(l)\bigg\|_H ds\bigg)^2\Bigg],\tag{14}$$

если, кроме того, выполнено условие (9), то справедлива оценка

$$E(t)=\frac{1}{2}\Big(\|u'(t)\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}u(t)\big\|_H^2\Big)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$
$$\leqslant d\Bigg[e^{-2\omega t}\bigg(\|\varphi_1\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}\varphi_0\big\|_H^2+\sum_{k=1}^N\bigg\|\int_l^0 R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\bigg\|_{\Omega_k}^2\bigg)+$$
$$+\bigg(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\bigg\|f(s)-\sum_{k=1}^N M_k(s-l)A_k\varphi(l)\bigg\|_H ds\bigg)^2\Bigg]\tag{15}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функций f, φ и векторов φ_0, φ_1.

Сформулируем также важные частные случаи теоремы 2.

Теорема 3 (о корректной разрешимости (случай $l=0$)). *Пусть выполнены условия (3), (5), данные задачи (11), (12) удовлетворяют условиям*

$$F(t):=(f_1(t),0,0,\ldots,0),\qquad f_1(t)=f(t)-\sum_{k=1}^N M_k(t)A_k\varphi_0,$$

где $\varphi_0\in H_1$, $\varphi_1\in H_1$ — заданные векторы, вектор $Z_0=(\varphi_1,A_0^{1/2}\varphi_0,0,\ldots,0)\in D(\mathbb{A})$, и выполнен любой из следующих наборов условий:

1) $f(t)\in H_{1/2}$ и $A_0^{1/2}f(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$, $\varphi_0\in H_{3/2}$, $M_k(t)\in C(\mathbb{R}_+)$, $k=\overline{1,N}$;

2) $f_1(t)\in C^1(\mathbb{R}_+,H)$, $M_k(t)\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k=\overline{1,N}$.

Тогда задача (11), (12) имеет единственное классическое решение

$$Z(t)=(v(t),\xi_0(t),\xi_1(t,\tau),\ldots,\xi_N(t,\tau)),$$

где $v(t)=u'(t)$, $\xi_0(t)=A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ *— классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными* $l=0$, $f(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива следующая оценка:*

$$E(t)=\frac{1}{2}\Big(\|u'(t)\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}u(t)\big\|_H^2\Big)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$
$$\leqslant d\Bigg[\|\varphi_1\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}\varphi_0\big\|_H^2+\bigg(\int\limits_0^t\Big\|f(s)-\sum_{k=1}^N M_k(s)A_k\varphi_0\Big\|_H\,ds\bigg)^2\Bigg];$$

если, кроме того, выполнено условие (9), то справедлива оценка

$$E(t)=\frac{1}{2}\Big(\|u'(t)\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}u(t)\big\|_H^2\Big)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$
$$\leqslant d\Bigg[e^{-2\omega t}\Big(\|\varphi_1\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}\varphi_0\big\|_H^2\Big)+\bigg(\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big\|f(s)-\sum_{k=1}^N M_k(s)A_k\varphi_0\Big\|_H\,ds\bigg)^2\Bigg]$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 4 (о корректной разрешимости (случай $-\infty\leqslant l<0$)). *Пусть* l *— заданное число* ($-\infty\leqslant l<0$), *выполнены условия (3), (5),* $F(t):=(f(t),0,0,\ldots,0)$, *где* $f(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$ *— заданная вектор-функция,* $\varphi(t)\in H_1$, $\varphi'(t)\in H_1$ *при* $t\in[l,0]$, $\varphi(t)\in C([l,0],H_1)$, $\varphi'(t)\in C([l,0],H_1)$, $\varphi(0)=\varphi_0$, $\varphi'(0)=\varphi_1$, $\lim_{t\to l}A_k\varphi(t)=0$, $k=\overline{1,N}$, *и выполнен любой из следующих наборов условий:*

1) $f(t)\in H_{1/2}$, $A_0^{1/2}f(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$, $M_k(t)\in C(\mathbb{R}_+)$, $k=\overline{1,N}$;

2) $f(t)\in C^1(\mathbb{R}_+,H)$, $M_k(t)\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k=\overline{1,N}$.

Тогда задача (11), (12) имеет единственное классическое решение

$$Z(t)=(v(t),\xi_0(t),\xi_1(t,\tau),\ldots,\xi_N(t,\tau)),$$

где $v(t)=u'(t)$, $\xi_0(t)=A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ *— классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными* l, $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива следующая оценка:*

$$E(t)=\frac{1}{2}\Big(\|u'(t)\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}u(t)\big\|_H^2\Big)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$
$$\leqslant d\Bigg[\|\varphi_1\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}\varphi_0\big\|_H^2+\sum_{k=1}^N\bigg\|\int\limits_l^0 R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\bigg\|_{\Omega_k}^2+\bigg(\int\limits_0^t\|f(s)\|_H\,ds\bigg)^2\Bigg];$$

если, кроме того, выполнено условие (9), то справедлива оценка

$$E(t):=\frac{1}{2}\Big(\|u'(t)\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}u(t)\big\|_H^2\Big)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$
$$\leqslant d\Bigg[e^{-2\omega t}\bigg(\|\varphi_1\|_H^2+\big\|A_0^{1/2}\varphi_0\big\|_H^2+\sum_{k=1}^N\bigg\|\int\limits_l^0 R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\bigg\|_{\Omega_k}^2\bigg)+\bigg(\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\|f(s)\|_H\,ds\bigg)^2\Bigg]$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функций* f, φ *и векторов* φ_0, φ_1.

Предложение 1 (достаточные условия выполнения условия (13) при $l=-\infty$). *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{R_k(\tau)}d\tau < \infty, \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left(\int\limits_\tau^{+\infty} \big(R_k'(\xi)\big)^2 d\xi \right) d\tau < \infty, \quad k=\overline{1,N}, \tag{16}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left\| A_k \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|^2 ds < \infty, \quad k=\overline{1,N}. \tag{17}$$

Тогда выполнено условие (13).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Сформулируем теоремы из монографии [17], необходимые для доказательства теоремы 2. Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(\mathcal{A})$.

Определение 4 [17, с. 38–39, 58]. Задача Коши

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t), \quad Z(0) = Z_0 \tag{18}$$

называется (*равномерно*) *корректной*, если

1) для любого $Z_0 \in D(\mathcal{A})$ существует единственное решение этой задачи;

2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: из того, что $Z_n(0) \to 0$ ($Z_n(0) \in D(\mathcal{A})$), вытекает, что $Z_n(t) \to 0$ при каждом $t \in [0,T]$ (равномерно по t) на любом конечном интервале $[0,T]$.

Замечание 2. Если задача Коши (18) порождает сжимающую полугруппу в пространстве $\mathbb{H}$, то эта задача равномерно корректна.

Теорема 5 [17, теорема 1.1]. *Если задача Коши (18) корректна, то её решение даётся формулой $Z(t) = S(t)Z_0$ ($Z_0 \in D(\mathcal{A})$), где $S(t)$ — сильно непрерывная при $t > 0$ полугруппа операторов.*

Теорема 6 [17, теорема 6.5]. *Если задача Коши (18) равномерно корректна, то формула*

$$Z(t) = S(t)Z_0 + \int\limits_0^t S(t-p)F(p)dp \tag{19}$$

даёт решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad Z(0) = Z_0, \tag{20}$$

где $Z_0 \in D(\mathcal{A})$ и вектор-функция $F(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) значения функции $F(t) \in D(\mathcal{A})$ и функция $\mathcal{A}F(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{H})$;

2) функция $F(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H})$.

5.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Из условий теоремы 2 следует выполнение условий теоремы 6 для задачи (7), (8). Таким образом, задача (7), (8), согласно теореме 6, является равномерно корректной и для её классического решения с учётом формулы (19) справедлива оценка

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d\left(\|Z_0\|_{\mathbb{H}} + \int\limits_0^t \|F(s)\|_{\mathbb{H}}\, ds \right) \tag{21}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции F и векторов φ_0, φ_1.

Если ядра интегральных операторов $R_k(\tau)$, $k=\overline{1,N}$, удовлетворяют дополнительно ещё и условиям (9), то для классического решения задачи (7), (8) с учётом формулы (19) и оценки (10) справедлива оценка

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d\left(e^{-\omega t}\|Z_0\|_{\mathbb{H}} + \int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\|F(s)\|_{\mathbb{H}}\,ds\right) \tag{22}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции F и векторов φ_0, φ_1.

Оценки (21) и (22) следуют из формулы (19), применённой к задаче (11), (12), в обозначениях теоремы 6, так как $Z(t)=S(t)Z_0$, где полугруппа $S(t)=e^{t\mathbb{A}}$ является сжимающей.

Покажем, что если выполнены условия теоремы 2, то $v(t)=u'(t)$, $\xi_0(t)=A_0^{1/2}u(t)$, где $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2).

При выполнении условий теоремы 2 задача Коши (11), (12), записанная покоординатно, имеет вид следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\left[\xi_0(t) + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \xi_k(t,\tau)\,d\tau\right] = f_1(t), \quad \frac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t),$$

$$\frac{d\xi_k(t,\tau)}{dt} = R_k(\tau)Q_kA_0^{1/2}v(t) + \frac{\partial\xi_k(t,\tau)}{\partial\tau}, \quad k=\overline{1,N}, \tag{23}$$

где $t,\tau>0$, $f_1(t)=f(t)-(M_1(t-l)A+M_2(t-l)B)\varphi(l)$, $-\infty\leqslant l\leqslant 0$, функции $M_k(t)$ $(k=\overline{1,N})$ определяются формулами (4),

$$v(0)=\varphi_1, \quad \xi_0(0)=A_0^{1/2}\varphi_0,$$

$$\xi_k(t,\tau)|_{t=0} = \int\limits_l^0 R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds, \quad \tau>0, \quad k=\overline{1,N}. \tag{24}$$

Рассмотрим последние N уравнений системы (23). Применим к этим уравнениям метод вариации произвольных постоянных. По определению оператора $\mathbb{T}_k\xi(\tau)=\partial\xi(\tau)/\partial\tau$, где $D(\mathbb{T}_k)=\{\xi\in\Omega_k\colon \partial\xi/\partial\tau\in\Omega_k\}$, $k=\overline{1,N}$, соответствующие однородные уравнения имеют вид

$$\frac{d\xi_k(t,\tau)}{dt} = \mathbb{T}_k\xi_k(t,\tau), \quad k=\overline{1,N}.$$

Следовательно, общие решения однородных уравнений могут быть записаны в виде $\xi_k^O(t,\tau)=$ $=e^{t\mathbb{T}_k}C_k(\tau)$, $k=\overline{1,N}$, где $C_k(\tau)\in D(\mathbb{T}_k)$ — произвольные векторы.

Применяя формулу (19) для решения последних N неоднородных уравнений системы (23) при заданных начальных условиях $\xi_k(0,\tau)$, $k=\overline{1,N}$, определяемых формулами (24), и полагая $v(t)=\varphi'(t)$, $\varphi(0)=\varphi_0$ при $t\in(l,0]$, имеем

$$\xi_k(t,\tau) = e^{t\mathbb{T}_k}\xi_k(0,\tau) + \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathbb{T}_k}R_k(\tau)Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds =$$

$$= \xi_k(0,\tau+t) + \int\limits_0^t R_k(\tau+t-s)Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_l^0 R_k(\tau+t-s)Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds + \int\limits_0^t R_k(\tau+t-s)Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds, \quad k=\overline{1,N}.$$

Таким образом, получаем следующие представления решений последних $N+1$ уравнений системы (23) с начальными условиями $\xi_k(0,\tau)$, $k=\overline{1,N}$, $\xi_0(0)$, определяемыми формулами (24), положив $v(t)=\varphi'(t)$, $\varphi(0)=\varphi_0$ при $t\in(l,0]$:

$$\xi_k(t,\tau)=\int\limits_l^t R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds,\quad k=\overline{1,N},\quad \xi_0(t)=\int\limits_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds+A_0^{1/2}\varphi(l).$$

Из первого уравнения системы (23) находим

$$\xi_0(t)+\sum_{k=1}^N Q_k^*\int\limits_0^{+\infty}\xi_k(t,\tau)\,d\tau\in D(A_0^{1/2}).$$

Подставив найденные выражения для $\xi_0(t)$ и $\xi_k(t,\tau)$ в первое уравнение системы (23), будем иметь

$$\int\limits_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds+A_0^{1/2}\varphi(l)+\sum_{k=1}^N Q_k^*\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_l^t R_k(\tau+t-s)Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds\,d\tau=$$

$$=\int\limits_l^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^N\left(\int\limits_l^{+\infty}R_k(\tau+t-s)\,d\tau\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds+A_0^{1/2}\varphi(l)\in D(A_0^{1/2}).$$

По условиям теоремы 2 вектор-функция $A_0\varphi(t)$ ограничена при $t\to l$ при фиксированном значении параметра l $(-\infty\leqslant l\leqslant 0)$, следовательно, $\varphi(l)\in H_1$, откуда получаем

$$\int\limits_l^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^N\left(\int\limits_l^{+\infty}R_k(\tau+t-s)\,d\tau\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds\in D(A_0^{1/2}).$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$-A_0^{1/2}\int\limits_l^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^N\left(\int\limits_0^{+\infty}R_k(\tau+t-s)\,d\tau\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds=$$

$$=-A_0\int\limits_l^t A_0^{-1/2}\left[I+\sum_{k=1}^N\left(\int\limits_0^{+\infty}R_k(\tau+t-s)\,d\tau\right)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2}v(s)\,ds,\quad t>0. \tag{25}$$

Из (25) следует, что

$$\int\limits_l^t A_0^{-1/2}\left[I+\sum_{k=1}^N\left(\int\limits_0^{+\infty}R_k(\tau+t-s)\,d\tau\right)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2}v(s)\,ds\in D(A_0). \tag{26}$$

Введём обозначение

$$R(t):=A_0^{-1/2}\left[\sum_{k=1}^N\left(\int\limits_0^{+\infty}R_k(\tau+t)\,d\tau\right)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2},\quad t>0.$$

Тогда вектор-функцию (26) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^t v(s)\,ds+\int\limits_0^t R(t-s)v(s)\,ds=:y(t)\in D(A_0). \tag{27}$$

После интегрирования по частям в (27) получаем следующее интегральное уравнение:

$$(I+R(0))\int_l^t v(s)\,ds+\int_l^t R'(t-s)\left(\int_l^s v(s)\,ds\right)ds=y(t),\quad y(t)\in C(\mathbb{R}_+,H_1),\tag{28}$$

где

$$R'(t)=-A_0^{-1/2}\left[\sum_{k=1}^N R_k(t)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2}=\sum_{k=1}^N R_k(t)A_0^{-1}A_k,$$

$$R(0)=A_0^{-1/2}\left[\sum_{k=1}^N M_k(0)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2}=\sum_{k=1}^N M_k(0)A_0^{-1}A_k,$$

которое можно записать как

$$(I+R(0))\int_0^t v(s)\,ds+\int_0^t R'(t-s)\left(\int_0^s v(p)\,dp\right)ds=y(t)-\Phi(t),\tag{29}$$

где

$$\Phi(t):=(I+R(0))(\varphi(0)-\varphi(l))+\int_l^0 R'(t-s)(\varphi(s)-\varphi(l))\,ds+\int_0^t R'(t-s)(\varphi(0)-\varphi(l))\,ds,$$

$\Phi(t)\in D(A_0)$, так как заданная вектор-функция $A_0\varphi(t)\in C([l,0],H)$ по условию теоремы 2.

Введём вектор-функцию $w(t):=\int_0^t v(s)ds$, тогда уравнение (29) можно переписать в виде интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$(I+R(0))w(t)+\int_0^t R'(t-s)w(s)\,ds=y(t)-\Phi(t).\tag{30}$$

Покажем, что $R'(t)\in C(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(H_1))$. Действительно, для любого $z\in H_1$

$$\|R'(t)z\|_{H_1}=\left\|\left[\sum_{k=1}^N R_k(t)A_k\right]A_0^{-1}(A_0z)\right\|_H\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\sum_{k=1}^N R_k(t)A_kA_0^{-1}\right\|_H\|z\|_{H_1}\leqslant\left[\left(\sum_{k=1}^N R_k(t)\big\|A_kA_0^{-1}\big\|_H\right)\right]\|z\|_{H_1}.$$

Таким образом, $R'(t)\in\mathcal{B}(H_1)$ и $R'(t)\in C(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(H_1))$. Далее, из (30) получаем

$$w(t)=(I+R(0))^{-1}\left(y(t)-\Phi(t)-\int_0^t R'(t-s)w(s)\,ds\right)=:Lw(t),$$

где оператор $L\colon C(\mathbb{R}_+,H_1)\to C(\mathbb{R}_+,H_1)$. Покажем, что $\|L\|_{C(\mathbb{R}_+;\mathcal{B}(H_1))}<+\infty$.

Предложение 2. *Для любых $w_1(t),w_2(t)\in H_1$ и для любого $T>0$ при $t\in[0,T]$ имеет место оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|Lw_1(t)-Lw_2(t)\|_{H_1}\leqslant\kappa\sup_{t\in[0,T]}\|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1},$$

где $\kappa=\sum_{k=1}^N(M_k(0)A_k)(A+B)^{-1}<+\infty$, функции $M_k(t)$ $(k=\overline{1,N})$ определяются формулами (4).

Доказательство. Действительно, для любых $w_1(t),w_2(t)\in H_1$ при $t>0$ имеем

$$\|Lw_1(t)-Lw_2(t)\|_{H_1}=\left\|(I+R(0))^{-1}\int_0^t R'(t-s)(w_1(s)-w_2(s))\,ds\right\|_{H_1}.\tag{31}$$

Далее для любого $z\in H_1$ получаем

$$\big\|(I+R(0))^{-1}z\big\|_{H_1}=\big\|A_0(I+R(0))^{-1}A_0^{-1}(A_0z)\big\|_H=\big\|(A_0(I+R(0))A_0^{-1})^{-1}(A_0z)\big\|_H.$$

Нетрудно проверить, используя определение оператора A_0, что $A_0(I+R(0))A_0^{-1}=(A+B)A_0^{-1}$. Тогда

$$\big\|(A_0(I+R(0))A_0^{-1})^{-1}(A_0z)\big\|_H=\big\|A_0(A+B)^{-1}(A_0z)\big\|_H. \tag{32}$$

Подставляя в формулу (32) $z=\int_0^t R'(t-s)w(s)\,ds$, учитывая представление (31), для любого $T>0$ будем иметь соотношения

$$\sup_{t\in[0,T]}\big\|Lw_1(t)-Lw_2(t)\big\|_{H_1}=\sup_{t\in[0,T]}\Big\|A_0(A+B)^{-1}A_0\int\limits_0^t R'(t-s)(w_1(s)-w_2(s))\,ds\Big\|_H\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t\in[0,T]}\big\|w_1(t)-w_2(t)\big\|_{H_1}\Big\|A_0(A+B)^{-1}A_0\int\limits_0^t R'(t-s)A_0^{-1}\,ds\Big\|_H. \tag{33}$$

Далее можно установить следующую оценку:

$$\sup_{t\in[0,T]}\Big\|A_0(A+B)^{-1}A_0\int\limits_0^t R'(t-s)A_0^{-1}\,ds\Big\|_H=$$

$$=\sup_{t\in[0,T]}\big\|A_0(A+B)^{-1}A_0(R(t)-R(0))A_0^{-1}\big\|_H\leqslant\big\|A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}\big\|_H. \tag{34}$$

Нетрудно проверить, используя определение оператора A_0, что

$$\big\|A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}\big\|_H=\Big\|\sum_{k=1}^N(M_k(0)A_k)(A+B)^{-1}\Big\|_H<+\infty, \tag{35}$$

где операторы A_k определяются формулами (6). Действительно, справедлива цепочка равенств

$$A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}=A_0(A+B)^{-1}A_0\sum_{k=1}^N M_k(0)A_0^{-1}A_kA_0^{-1}=$$

$$=A_0(A+B)^{-1}\sum_{k=1}^N M_k(0)A_kA_0^{-1}=A_0(A+B)^{-1}(A+B-A_0)A_0^{-1}=$$

$$=A_0(A+B)^{-1}((A+B)A_0^{-1}-I)=I-A_0(A+B)^{-1}=$$

$$=I-\Big(A+B-\sum_{k=1}^N(M_k(0)A_k)\Big)(A+B)^{-1}=\sum_{k=1}^N(M_k(0)A_k)(A+B)^{-1}.$$

Из установленных оценок (33)–(35) получаем

$$\sup_{t\in[0,T]}\big\|Lw_1(t)-Lw_2(t)\big\|_{H_1}\leqslant\big\|(M_1(0)A+M_2(0)B)(A+B)^{-1}\big\|_H\sup_{t\in[0,T]}\big\|w_1(t)-w_2(t)\big\|_{H_1}=$$

$$=\kappa\sup_{t\in[0,T]}\big\|w_1(t)-w_2(t)\big\|_{H_1},$$

где $\kappa=\big\|\sum_{k=1}^N(M_k(0)A_k)(A+B)^{-1}\big\|_H<+\infty$, что завершает доказательство предложения 2.

Отсюда следует, что для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\sup_{t\in[0,T]}\big\|L^n w_1(t)-L^n w_2(t)\big\|_{H_1}\leqslant\frac{\kappa^n T^n}{n!}\sup_{t\in[0,T]}\big\|w_1(t)-w_2(t)\big\|_{H_1}. \tag{36}$$

В неравенстве (36) значение n можно выбрать настолько большим, что $\kappa^n T^n/n!<1$. Следовательно, $\|L^n\|_{C([0,T];\mathcal{B}(H_1))}<1$, т.е. отображение $L^n\colon C([0,T],H_1)\to C([0,T],H_1)$ является сжимающим и уравнение (30) имеет единственное решение $w(t)\in C([0,T],H_1)$. В силу произвольности выбора $T>0$ отсюда получаем, что решение $w(t)\in C([0,+\infty),H_1)$. Таким образом,

$$\int_l^t v(s)\,ds=\int_l^0 v(s)\,ds+\int_0^t v(s)\,ds=\int_l^0\varphi'(s)\,ds+w(t)=\varphi(0)-\varphi(l)+w(t)\in C([0,+\infty),H_1).$$

Рассмотрим первое уравнение системы (23) с учётом $\int_l^t v(s)\,ds\in C([0,+\infty),H_1)$. Справедливы следующие равенства:

$$-A_0^{1/2}\bigg[\xi_0(t)+\sum_{k=1}^N Q_k^*\int_0^{+\infty}\xi_k(t,\tau)\,d\tau\bigg]+f(t)-\sum_{k=1}^N M_k(t-l)A_k\varphi(l)=$$

$$=-A_0^{1/2}\bigg[\int_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds+A_0^{1/2}\varphi_0+\sum_{k=1}^N Q_k^*\int_0^{+\infty}\int_l^t R_k(\tau+t-s)Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds\,d\tau\bigg]+$$

$$+f(t)-\sum_{k=1}^N M_k(t-l)A_k\varphi(l)=$$

$$=-\bigg[\int_l^t A_0\frac{d}{ds}u(s)\,ds+A_0\varphi_0+\sum_{k=1}^N\int_0^{+\infty}\int_l^t R_k(\tau+t-s)A_k\frac{d}{ds}u(s)\,ds\,d\tau\bigg]+f(t)-\sum_{k=1}^N M_k(t-l)A_k\varphi(l)=$$

$$=-\bigg[A_0u(t)+\sum_{k=1}^N\int_l^t\bigg(\int_0^{+\infty}R_k(\tau+t-s)\,d\tau\bigg)A_k\frac{d}{ds}u(s)\,ds\bigg]+f(t)-\sum_{k=1}^N A_k\varphi(l)\int_{t-l}^{+\infty}R_k(s)\,ds=$$

$$=-A_0u(t)-\sum_{k=1}^N\bigg[\bigg(A_ku(s)\int_{t-s}^{+\infty}R_k(p)\,dp\bigg)\bigg|_l^t-\int_l^t R_k(t-s)A_ku(s)\,ds\bigg]+f(t)-\sum_{k=1}^N A_k\varphi(l)\int_{t-l}^{+\infty}R_k(s)\,ds=$$

$$=-A_0u(t)+\sum_{k=1}^N\bigg[-A_ku(t)\int_0^{+\infty}R_k(p)\,dp+A_ku(l)\int_{t-l}^{+\infty}R_k(p)\,dp+\int_l^t R_k(t-s)A_ku(s)\,ds\bigg]+$$

$$+f(t)-\sum_{k=1}^N A_k\varphi(l)\int_{t-l}^{+\infty}R_k(s)\,ds=$$

$$=\bigg(-1+\sum_{k=1}^N\bigg(a_k\int_0^{+\infty}R_k(s)\,ds\bigg)\bigg)Au(t)+\bigg(-1+\sum_{k=1}^N\bigg(b_k\int_0^{+\infty}R_k(s)\,ds\bigg)\bigg)Bu(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^N\bigg[-(a_kA+b_kB)u(t)\int_0^{+\infty}R_k(p)\,dp+\int_l^t R_k(t-s)(a_kA+b_kB)u(s)\,ds\bigg]+f(t)=$$

$$=-(A+B)u(t)+\sum_{k=1}^N\int_l^t R_k(t-s)(a_kA+b_kB)u(s)\,ds+f(t).$$

Таким образом, полученное уравнение совпадает с уравнением (1) при выполнении условий $u(+0)=\varphi_0$, $u'(+0)=\varphi_1$, $u(t)=\varphi(t)$, $t\in[l,0]$, $-\infty\leqslant l\leqslant 0$, где $\varphi(0)=\varphi_0$, $\varphi'(0)=\varphi_1$. Следовательно, $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2). Более того, выполнение условий теоремы 2 обеспечивает выполнение условий теоремы 6 и тогда оценки (14), (15) следуют из оценок (21), (22), соответственно.

Замечание 3. Условие $A_0^{1/2}A_k\varphi_0\in H$ эквивалентно условию $\varphi_0\in H_{3/2}$.

Теорема 2 доказана.

Доказательства теорем 3, 4 проводятся аналогично доказательству теоремы 2.

5.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1

Условие (13) равносильно выполнению следующих условий:

$$A_0^{1/2}\varphi_0+\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty Q_k^*\biggl(\int_{-\infty}^{0}R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\biggr)d\tau\in D(A_0^{1/2}),$$

$$\int_{-\infty}^{0}R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\in\Omega_k,\quad \int_{-\infty}^{0}R_k'(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\in\Omega_k,\quad k=1,2.$$

По условию теоремы 4 $\varphi_0\in H_1$ и $\varphi'(t)\in C((-\infty,0],H_1)$. Отсюда, используя неравенство Гёльдера, получаем оценки

$$\biggl\|A_0^{1/2}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{+\infty}Q_k^*\biggl(\int_{-\infty}^{0}R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\biggr)d\tau\biggr\|_H\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N}\int_0^{+\infty}\biggl(\int_{-\infty}^{0}R_k(\tau-s)\biggl\|A_0^{1/2}Q_1^*Q_1A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H ds\biggr)d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N}\int_0^{+\infty}\biggl(\int_{-\infty}^{0}(R_k(\tau-s))^2\,ds\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{-\infty}^{0}\biggl\|A_k\frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H^2ds\biggr)^{1/2}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N}\biggl[\int_0^{+\infty}\biggl(\int_\tau^{+\infty}(R_k(\xi))^2d\xi\biggr)^{1/2}d\tau\biggl(\int_{-\infty}^{0}\biggl\|A_k\frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H^2ds\biggr)^{1/2}\biggr]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N}\biggl[\biggl(\int_0^{+\infty}\sqrt{R_k(\tau)}\,d\tau\biggr)\biggl(\int_0^{+\infty}R_k(\xi)\,d\xi\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{-\infty}^{0}\biggl\|A_k\frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H^2ds\biggr)^{1/2}\biggr]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N}\biggl[\biggl(\int_0^{+\infty}\sqrt{R_k(\tau)}\,d\tau\biggr)\sqrt{M_k(0)}\biggl(\int_{-\infty}^{0}\biggl\|A_k\frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H^2ds\biggr)^{1/2}\biggr],$$

поскольку $A_0^{1/2}Q_k^*Q_kA_0^{1/2}=A_k$ и $M_k(0)$ определяется формулой (4). Справедливы следующие оценки:

$$\biggl\|\int_{-\infty}^{0}R_k(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\biggr\|_{\Omega_k}^2=\int_0^{+\infty}\frac{1}{R_k(\tau)}\biggl\|\int_{-\infty}^{0}R_k(\tau-s)A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\biggr\|_H^2d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{R_k(\tau)}\biggl(\int_{-\infty}^{0}R_k(\tau-s)\biggl\|A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|ds\biggr)_H^2d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}(R_k(\tau-s))^2\,ds\right)d\tau \int\limits_{-\infty}^{0}\left\|A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\right\|_H^2 ds =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)}\left(\int\limits_{\tau}^{+\infty}(R_k(\xi))^2\,d\xi\right)d\tau \int\limits_{-\infty}^{0}\left\|A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\right\|_H^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{R_k(\tau)}\left(\int\limits_{\tau}^{+\infty}\sqrt{R_k(\xi)}\,d\xi\right)d\tau \int\limits_{-\infty}^{0}\left\|A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\right\|_H^2 ds \leqslant \left(\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{R_k(\tau)}\,d\tau\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{0}\left\|A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\right\|_H^2 ds,$$

так как $Q_kA_0^{1/2}=A_k^{1/2}$;

$$\left\|\int\limits_{-\infty}^{0}R_k'(\tau-s)Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\right\|_{\Omega_k}^2 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{R_k(\tau)}\left\|\int\limits_{-\infty}^{0}R_k'(\tau-s)A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\right\|_H^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{R_k(\tau)}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}R_k'(\tau-s)\left\|A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\right\|_H ds\right)^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}(R_k'(\tau-s))^2\,ds\right)d\tau \int\limits_{-\infty}^{0}\left\|A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\right\|_H^2 ds =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)}\left(\int\limits_{\tau}^{+\infty}(R_k'(\xi))^2\,d\xi\right)d\tau \int\limits_{-\infty}^{0}\left\|A_k^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\right\|_H^2 ds.$$

Таким образом, условия (16), (17) являются достаточными для выполнения условия (13). Предложение 1 доказано.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект 23-Ш05-17) (теоремы 2, 3) и при частичной финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 (теорема 4, предложение 1).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин, А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. — М. : Наука, 1970. — 280 с.
2. Christensen, R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction / R.M. Christensen — New York ; London : Academic Press, 1971. — 245 p.
3. Георгиевский, Д.В. Модели теории вязкоупругости / Д.В. Георгиевский. — М. : Ленанд, 2023. — 144 с.
4. Amendola, G. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications / G. Amendola, M. Fabrizio, J.M. Golden. — New York ; Dordrecht ; Heidelberg ; London : Springer, 2012. — 576 p.
5. Gurtin, M.E., General theory of heat conduction with finite wave speed / M.E. Gurtin, A.C. Pipkin // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — V. 31. — P. 113–126.

6. Власов, В.В. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М. : МАКС Пресс, 2016. — 488 с.
7. Ivanov, S. Heat equations with memory: lack of controllability to the rest / S. Ivanov, L. Pandolfi // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — V. 355, № 1. — P. 1–11.
8. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.
9. Паленсия, Э.С. Неоднородные среды и теория колебаний / Э.С. Паленсия ; пер. В.В. Жиков ; ред. О.А. Олейник. — М. : Мир, 1984. — 472 с.
10. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. — М. : Наука, 1977. — 384 с.
11. Власов, В.В. О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса / В.В. Власов, Н.А. Раутиан // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 4. — С. 536–551.
12. Vlasov, V.V. Investigation of integro-differential equations by methods of spectral theory / V.V. Vlasov, N.A. Rautian // J. Math. Sci. — 2024. — V. 278, № 1. — P. 55–81.
13. Раутиан, Н.А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / Н.А. Раутиан // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 9. — С. 1226–1244.
14. Раутиан, Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса / Н.А. Раутиан // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1255–1272.
15. Раутиан, Н.А. Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / Н.А. Раутиан // Уфимский мат. журн. — 2021. — Т. 13, № 4. — С. 65–81.
16. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като ; пер. с англ. Г.А. Воропаевой и др. ; под ред. В.П. Маслова. — М. : Мир, 1972. — 740 с.
17. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.
18. Engel, K.J. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K.J. Engel, R. Nagel. — New York : Springer-Verlag, 2000. — 589 p.

CORRECT SOLVABILITY OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ARISING IN VISCOELASTICITY THEORY

D. V. Georgievskii[1], N. A. Rautian[2]

[1,2]Lomonosov Moscow State University, Russia
[1,2]Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Russia
e-mail: [1]georgiev@mech.math.msu.su, [2]nadezhda.rautian@math.msu.ru

We discuss the issues of correct solvability and exponential stability of solutions of abstract integro-differential equations with kernels of integral operators of general type from the space of functions integrable on the positive semiaxis. The abstract integro-differential equations are studied in this paper are operator models of viscoelasticity theory problems. The proposed approach to the study of these integro-differential equations is related to the application of the semigroups theory and can also be used to study other integro-differential equations containing integral terms of Volterra convolution type.

Keywords: Volterra integro-differential equation, linear differential equation, Hilbert space, operator semigroup, viscoelasticity.

FUNDING

This work was carried out with support of MSU Program of Development (project no. 23-SCH05-17) (Theorems 2, 3), and with the partial financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284 (Theorem 4, Statement 1).

REFERENCES

1. Il'yushin, A.A. and Pobedrya, B.E., *Osnovy matematicheskoi teorii termovyazkouprugosti* (Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity), Moscow: Nauka, 1970.
2. Christensen, R.M., *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*, New York–London: Academic Press, 1971.
3. Georgievskii, D.V., *Modeli teorii vyazkouprugosti* (Models of viscoelasticity theory), Moscow: Lenand, 2023.
4. Amendola, G., Fabrizio, M., and Golden, J.M., *Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications*, New York–Dordrecht–Heidelberg–London: Springer, 2012.
5. Gurtin, M.E. and Pipkin, A.C., General theory of heat conduction with finite wave speed, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1968, vol. 31, pp. 113–126.
6. Vlasov, V.V. and Rautian, N.A., *Spektral'nyi analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Spectral Analysis of Functional Differential Equations), Moscow: MAKS Press, 2016.
7. Ivanov, S. and Pandolfi, L., Heat equations with memory: lack of controllability to the rest, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, vol. 355, pp. 1–11.
8. Lykov, A.V. *Teoriya teploprovodnosti* (Thermal Conduction Theory), Moscow: Vysshaya shkola, 1967.
9. Sanchez-Palencia, E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1980.
10. Rabotnov, Yu.N., *Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel* (Elements of Hereditary Mechanics of Solids), Moscow: Nauka, 1977.
11. Vlasov, V.V. and Rautian, N.A., On Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 517–532.
12. Vlasov, V.V. and Rautian N.A., Investigation of integro-differential equations by methods of spectral theory, *J. Math. Sci.*, 2024, vol. 278, no 1. pp. 55–81.
13. Rautian, N.A., Semigroups generated by Volterra integro-differential equations, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 9, pp. 1193–1211.
14. Rautian, N.A., On the properties of semigroups generated by Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 9, pp. 1231–1248.
15. Rautian N.A., Exponential stability of semigroups generated by Volterra integro-differential equations, *Ufa Math. J.*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 65–81.
16. Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Berlin: Springer, 1966.
17. Krein, S.G., *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Boston: Birkhauser, 1982.
18. Engel, K.J. and Nagel, R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, New York: Springer-Verlag, 2000.