ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 4, с. 521–532

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.74

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЁРТКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. Н. Асхабов

Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова, г. Грозный
Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный
e-mail: askhabov@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.04.2023 г., после доработки 21.07.2023 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Получены двусторонние априорные оценки решения однородного вольтерровского интегро-дифференциального уравнения третьего порядка со степенной нелинейностью и разностным ядром. Показано, что нижняя априорная оценка, играющая роль весовой функции при построении метрики в конусе пространства непрерывных функций, неулучшаема. С помощью этих оценок методом весовых метрик (аналог метода А. Белицкого) доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения в классе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций начальной задачи для указанного интегро-дифференциального уравнения. Показано, что решение можно найти методом последовательных приближений, получена оценка скорости их сходимости к точному решению. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, нелинейность, свёртка, метод весовых метрик.

DOI: 10.31857/S0374064124040075, EDN: PAYTDQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения типа свёртки первого и второго порядков широко применяются в задачах теории инфильтрации и ударных волн [1], в моделях популяционной генетики и др. (см., например, [2, 3]). В работах [4, 5] были изучены такие уравнения в различных конусах пространства непрерывно-дифференцируемых функций. В данной статье рассматриваются вопросы, касающиеся существования, единственности, свойств и способа нахождения решений начальной задачи, для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свёртки третьего порядка

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x K(x-t)u'''(t)\,dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = \lim_{x\to+0} u'(x) = \lim_{x\to+0} u''(x) = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что ядро $K(x)$ удовлетворяет условию

$$K \in C^5[0,\infty), \quad K^{(5)}(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),$$
$$K(0)=K'(0)=K''(0)=K'''(0)=K^{(4)}(0)=0 \quad \text{и} \quad K^{(5)}(0)=p>0. \tag{3}$$

Показано, что начальная задача (1), (2) при некоторых дополнительных условиях эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u^\alpha(x)=\int\limits_0^x K'''(x-t)u(t)\,dt, \quad \alpha>1, \quad x>0. \tag{4}$$

Поскольку с теоретической и прикладной точек зрения интерес представляют неотрицательные непрерывные нетривиальные решения, то решение интегрального уравнения (4) разыскивается в конусе пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$:

$$Q_0=\{u(x)\colon\ u\in C[0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}.$$

Исследование основано на методе весовых метрик [1] — аналоге метода А. Белицкого (см., например, [6, гл. 3, п. 3.1.3]), позволяющем доказать глобальные теоремы о существовании, единственности и способе нахождения нетривиальных решений уравнений (1) и (4). Изучение интегро-дифференциального уравнения третьего порядка (1), по сравнению с уравнениями первого и второго порядков (ср. [4, 5]), вызвало дополнительные трудности, связанные, в частности, с получением точной нижней априорной оценки $F(x)$ решения $u(x)$ (лемма 2), оценки третьей производной ядра $K(x)$ (лемма 4) и с определением условий эквивалентности задачи (1), (2) и интегрального уравнения (4). Заметим, что получение точной оценки $F(x)$, играющей роль весовой функции при построении метрики, потребовало не только решения некоторого нелинейного дифференциального неравенства третьего порядка, не содержащего явно независимой переменной, дающего предварительную оценку решения $u(x)$, но и применения рекуррентной процедуры уточнения этой оценки.

Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты и показывающие, в частности, что найденные условия эквивалентности начальной задачи (1), (2) и интегрального уравнения (4) необходимы в определённом смысле (см. пример 4).

2. СВОЙСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Выясним сначала, какими свойствами обладают решения уравнения (4), если они существуют.

Лемма 1. *Пусть $\alpha>1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если функция $u(x)\in Q_0$ является решением интегрального уравнения (4), то она не убывает на промежутке $[0,\infty)$ и трижды непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что любое решение $u(x)$ из конуса Q_0 уравнения (4) не убывает на $[0,\infty)$. Так как $K^{(5)}(x)\geqslant K^{(5)}(0)>0$, то $K^{(4)}(x)$ не убывает на $[0,\infty)$. Значит, $K^{(4)}(x)\geqslant K^{(4)}(0)=0$ и, следовательно, $K'''(x)$ также не убывает на $[0,\infty)$. Поэтому для любых $x_1,x_2\in[0,\infty)$ таких, что $x_1<x_2$, из тождества (4) с учётом, что $u(x)\geqslant 0$ и неотрицательная функция $K'''(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, имеем

$$u^\alpha(x_2)-u^\alpha(x_1)=\int\limits_0^{x_1}[K'''(x_2-t)-K'''(x_1-t)]u(t)\,dt+\int\limits_{x_1}^{x_2}K'''(x_2-t)u(t)\,dt\geqslant 0,$$

откуда получаем $u(x_1)\leqslant u(x_2)$, т.е. $u(x)$ не убывает на луче $[0,\infty)$.

Докажем теперь, что $u \in C^3(0,\infty)$. Из тождества (4) с учётом $K'''(0)=0$ имеем

$$\alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x)=\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)u(t)\,dt, \tag{5}$$

откуда находим

$$u'(x)=\frac{1}{\alpha}u^{1-\alpha}(x)\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)u(t)\,dt. \tag{6}$$

Значит, функция $u''(x)$ существует и непрерывна на $(0,\infty)$ как производная произведения двух непрерывно дифференцируемых функций, поэтому возможно дифференцирование обеих частей тождества (5):

$$\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}(x)u'^2(x)+\alpha u^{\alpha-1}(x)u''(x)=\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)u(t)\,dt, \tag{7}$$

отсюда

$$u''(x)=\frac{1}{\alpha}u^{1-\alpha}(x)\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)u(t)\,dt-(\alpha-1)u^{-1}(x)u'^2(x). \tag{8}$$

Следовательно, $u'''(x)$ существует и непрерывна на $(0,\infty)$, поскольку непрерывно дифференцируема правая часть тождества (8). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\alpha>1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если функция $u(x)\in Q_0$ является решением интегрального уравнения (4), то она удовлетворяет неравенствам $F(x)\leqslant u(x)\leqslant G(x)$ для любого $x\in[0,\infty)$, где*

$$F(x)\equiv Cx^{3/(\alpha-1)}, \quad G(x)\equiv\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}K''(x)\right)^{1/(\alpha-1)}, \tag{9}$$

$$C=\left(\frac{p(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Доказательство. Дифференцируя трижды тождество (4) и учитывая, что $K^{(5)}(x)$ не убывает и, значит, $K^{(6)}(x)\geqslant 0$ почти всюду на $[0,\infty)$, получаем

$$(u^\alpha(x))'''=pu(x)+\int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)u(t)\,dt\geqslant pu(x). \tag{10}$$

Положим $u^\alpha(x)=v(x)$. Тогда соотношение (10) примет вид

$$v'''\geqslant pv^{1/\alpha}. \tag{11}$$

Для решения нелинейного дифференциального неравенства (11), не содержащего явно независимую переменную x, выполним замену $v'_x=R(v)$. Тогда $v''=RR'_v$, $v'''=R^2R''+RR'^2$ и из (11) будем иметь

$$R^2R''+R\,R'^2\geqslant pv^{1/\alpha}. \tag{12}$$

Так как в силу тождества (5) $R=v'_x=\alpha\,u^{\alpha-1}u'\geqslant 0$, то $R\,R'^2\leqslant 2R\,R'^2$. Поэтому из (12) следует, что

$$(R^2R')'_v\geqslant pv^{1/\alpha}. \tag{13}$$

Заметим, что $v(0)=u^\alpha(0)=0$. Так как в силу тождеств (5) и (7)

$$v'(x)=\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)u(t)\,dt \quad \text{и} \quad v''(x)=\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)u(t)\,dt,$$

то $v'(0)=0$ и $(RR_v')(0)=v''(0)=0$. И в результате интегрирования (13) в пределах от 0 до x получим

$$R^2R_v'\geqslant\frac{p\alpha}{\alpha+1}v^{1/\alpha+1},\quad \frac{1}{3}R^3\geqslant\frac{p\alpha^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}v^{1/\alpha+2}.$$

Из последнего неравенства с помощью обратной замены $R=v_x'$ имеем

$$v_x'\geqslant\left[\frac{3p\alpha^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}\right]^{1/3}v^{1/(3\alpha)+2/3}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{3\alpha}{\alpha-1}v^{(\alpha-1)/(3\alpha)}(x)\geqslant\left(\frac{3p\alpha^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}\right)^{1/3}x.$$

Так как $v=u^\alpha$, то из последнего неравенства запишем

$$u(x)\geqslant C_0x^{3/(\alpha-1)},\quad C_0=\left(\frac{p(\alpha-1)^3}{9\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}\right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{14}$$

Используя оценку (14) с учётом, что

$$K'''(x)=\int\limits_0^x K^{(5)}(t)(x-t)\,dt\geqslant K^{(5)}(0)\frac{x^2}{2}=\frac{p}{2}x^2 \tag{15}$$

и

$$\int\limits_0^x(x-t)^2t^{3/(\alpha-1)}\,dt=\frac{2(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)}x^{3\alpha/(\alpha-1)}=\frac{2}{p}\,\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}C_0^{\alpha-1}x^{3\alpha/(\alpha-1)}, \tag{16}$$

из (4) получаем

$$u^\alpha(x)\geqslant\frac{p}{2}C_0\int\limits_0^x(x-t)^2t^{3/(\alpha-1)}\,dt=\frac{p}{2}C_0\frac{2}{p}\,\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}C_0^{\alpha-1}x^{3\alpha/(\alpha-1)}=\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}C_0^{\alpha}x^{3\alpha/(\alpha-1)}$$

или

$$u(x)\geqslant C_0\left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}\right)^{1/\alpha}x^{3/(\alpha-1)}. \tag{17}$$

Аналогично, используя оценку (17) и равенство (16), из (4) находим

$$u^\alpha(x)\geqslant\left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}\right)^{1/\alpha}\frac{p}{2}C_0\int\limits_0^x(x-t)^2t^{3/(\alpha-1)}\,dt=\left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}\right)^{1/\alpha}C_0^{\alpha}\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}x^{3\alpha/(\alpha-1)}$$

или

$$u(x)\geqslant C_0\left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}\right)^{1/\alpha+1/\alpha^2}x^{3/(\alpha-1)}.$$

Продолжив неограниченно этот процесс, окончательно получим

$$u(x)\geqslant C_0\left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}\right)^{1/\alpha+1/\alpha^2+\ldots+1/\alpha^n+\ldots}x^{3/(\alpha-1)}=C_0\left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2}\right)^{1/(\alpha-1)}x^{3/(\alpha-1)}\equiv F(x).$$

Докажем теперь оценку $u(x)\leqslant G(x)$. Так как $K'''(x)$ не убывает (см. доказательство леммы 1) на множестве $[0,\infty)$, то в силу интегрального неравенства Чебышёва (см., например, [4]) из тождества (4) получаем

$$u^\alpha(x)\leqslant\int\limits_0^x K'''(t)u(t)\,dt,$$

откуда

$$u(x)\leqslant\biggl(\int\limits_0^x K'''(t)u(t)\,dt\biggr)^{1/\alpha},\quad x\in[0,\infty),\tag{18}$$

или, что то же самое,

$$u(t)\leqslant\biggl(\int\limits_0^t K'''(s)u(s)\,ds\biggr)^{1/\alpha},\quad t\in[0,\infty),$$

а с учётом того что $K'''(x)>0$ при всех $x>0$, имеем

$$K'''(t)\,u(t)\biggl(\int\limits_0^t K'''(s)u(s)\,ds\biggr)^{-1/\alpha}\leqslant K'''(t),\quad t\in(0,\infty).$$

Проинтегрировав последнее неравенство в пределах от 0 до x, получим

$$\biggl(\int\limits_0^x K'''(s)u(s)\,ds\biggr)^{(\alpha-1)/\alpha}\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x K'''(t)\,dt=\frac{\alpha-1}{\alpha}K''(x)$$

или

$$\biggl(\int\limits_0^x K'''(t)u(t)\,dt\biggr)^{1/\alpha}\leqslant\biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}K''(x)\biggr)^{1/(\alpha-1)}\equiv G(x).$$

Тогда в силу неравенства (18) $u(x)\leqslant G(x)$. Лемма доказана.

Пример 1. Функция

$$u^*(x)=\biggl(\frac{40(\alpha-1)^3}{\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)}\biggr)^{1/(\alpha-1)}x^{3/(\alpha-1)}$$

является решением уравнения (4) при $K(x)=x^5$, т.е. интегрального уравнения

$$u^\alpha(x)=60\int\limits_0^x(x-t)^2u(t)\,dt,\quad \alpha>1.$$

При $\alpha=2$ функция $u^*(x)=x^3$ является и решением задачи (1), (2) с $K(x)=x^5$ в уравнении (1).

Заметим, что $u^*(x)\equiv F(x)$ при $K(x)=x^5$, что свидетельствует о точности нижней априорной оценки, полученной в лемме 2. Что касается априорной оценки сверху, то в данном случае

$$G(x)=\biggl(\frac{20(\alpha-1)}{\alpha}\biggr)^{1/(\alpha-1)}x^{3/(\alpha-1)}.$$

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Из леммы 2 вытекает, что решение уравнения (4) естественно искать в классе

$$P=\bigl\{u(x)\colon\ u\in C[0,\infty)\ \text{ и }\ F(x)\leqslant u(x)\leqslant G(x)\bigr\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в (9).

Лемма 3. *Пусть $\alpha>1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Тогда оператор*

$$(Tu)(x)=\left(\int_0^x K'''(x-t)u(t)\,dt\right)^{1/\alpha}$$

переводит класс P в себя.

Доказательство. Пусть $u\in P$. Очевидно, что $(Tu)(x)\in C[0,\infty)$. Докажем, что $(Tu)(x)\leqslant G(x)$. Так как $u(x)\leqslant G(x)$ и $K'''(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то, применив интегральное неравенство Чебышёва, получим

$$[(Tu)(x)]^\alpha=\int_0^x K'''(x-t)u(t)\,dt\leqslant\int_0^x K'''(x-t)G(t)\,dt=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\int_0^x K'''(x-t)[K''(t)]^{1/(\alpha-1)}dt\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\int_0^x K'''(t)[K''(t)]^{1/(\alpha-1)}dt=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}[K''(x)]^{\alpha/(\alpha-1)}\frac{\alpha-1}{\alpha}\equiv[G(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x)\leqslant G(x)$.

Осталось доказать, что $(Tu)(x)\geqslant F(x)$. Так как $u(x)\geqslant F(x)\equiv Cx^{3/(\alpha-1)}$, то, применив трижды формулу интегрирования по частям, с учётом условия (3) будем иметь

$$\big[(Tu)(x)\big]^\alpha\geqslant C\int_0^x K'''(x-t)t^{3/(\alpha-1)}\,dt=C\frac{\alpha-1}{\alpha+2}\int_0^x K'''(x-t)\,dt^{(\alpha+2)/(\alpha-1)}=$$

$$=C\frac{\alpha-1}{\alpha+2}\int_0^x K^{(4)}(x-t)\,t^{(\alpha+2)/(\alpha-1)}dt=C\frac{\alpha-1}{\alpha+2}\,\frac{\alpha-1}{2\alpha+1}\int_0^x K^{(4)}(x-t)\,dt^{(2\alpha+1)/(\alpha-1)}=$$

$$=C\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(2\alpha+1)}\int_0^x K^{(5)}(x-t)\,t^{(2\alpha+1)/(\alpha-1)}\,dt\geqslant C\frac{p(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(2\alpha+1)}\int_0^x t^{(2\alpha+1)/(\alpha-1)}\,dt=$$

$$=C\frac{p(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)}x^{3\alpha/(\alpha-1)}=C^\alpha x^{3\alpha/(\alpha-1)}\equiv[F(x)]^\alpha.$$

Следовательно, $(Tu)(x)\geqslant F(x)$. Лемма доказана.

Далее к уравнению (4) применим метод весовых метрик. Введём в связи с этим класс

$$P_b=\big\{u(x):\ u(x)\in C[0,b]\ \text{ и }\ F(x)\leqslant u(x)\leqslant G(x)\big\},$$

где $F(x)$ и $G(x)$ определены в (9), а $b>0$ — любое фиксированное число.

Определим в этом классе метрику ρ, положив

$$\rho(u,v)=\sup_{0<x\leqslant b}\frac{|u(x)-v(x)|}{x^{3/(\alpha-1)}e^{\beta x}},\tag{19}$$

где $\beta>0$ — любое (пока) число.

Точно так же как и в лемме 4 [4] доказывается полнота метрического пространства P_b.

Выберем достаточно малое число $c\in(0,b)$ таким, чтобы выполнялось условие

$$K^{(5)}(c)<\alpha p,\quad p>0.\tag{20}$$

Ясно, что такое число c существует, так как функция $K^{(5)}(x)$ непрерывна на множестве $[0,\infty)$, $K^{(5)}(0)=p$ и $\alpha>1$.

Положим

$$\beta = \frac{1}{p} \sup_{c \leqslant x \leqslant b} \frac{K^{(5)}(x) - p}{x},$$

где $c > 0$ определено в условии (20).

Лемма 4. *Пусть выполнено условие (3). Тогда для любого $x \in [0, b]$ справедливо неравенство*

$$K'''(x)\, e^{-\beta x} \leqslant \frac{1}{2} K^{(5)}(c)\, x^2. \tag{21}$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$K^{(5)}(x) e^{-\beta x} \leqslant K^{(5)}(c). \tag{22}$$

Если $x \in [0, c]$, то неравенство (22) очевидно. Пусть $x \in [c, b]$. Тогда

$$K^{(5)}(x) = p + px \frac{1}{p} \frac{K^{(5)}(x) - p}{x} \leqslant p + px\beta = p(1 + \beta x) \leqslant K^{(5)}(c) e^{\beta x},$$

что равносильно выполнению неравенства (22) и при $x \in [c, b]$.

В силу равенства из (15)

$$K'''(x) = \int_0^x K^{(5)}(t)(x-t)\, dt \leqslant K^{(5)}(x) \int_0^x (x-t)\, dt = \frac{1}{2} K^{(5)}(x) x^2,$$

а с учётом неравенства (22) окончательно получим

$$K'''(x) e^{-\beta x} \leqslant \frac{1}{2} K^{(5)}(x) e^{-\beta x} x^2 \leqslant \frac{1}{2} K^{(5)}(c) x^2.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнено условие (3). Тогда интегральное уравнение (4) имеет в конусе Q_0 (и в пространстве P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение можно найти в P_b при любом $b < \infty$ методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, причём справедлива оценка скорости их сходимости*

$$\rho(u_n, u^*) \leqslant \frac{q^\alpha}{1-q}\, \rho(Tu_0, u_0), \tag{23}$$

где $q = K^{(5)}(c)/(\alpha\, p)$, $u_0 \in P_b$ — начальное приближение.

Доказательство. Запишем уравнение (4) в операторном виде $u = Tu$. Покажем сначала, что уравнение (4) имеет единственное решение в P_b при любом $b > 0$ и что это решение можно найти методом последовательных приближений с оценкой скорости их сходимости (23). Из леммы 3 следует, что оператор T действует из P_b в P_b, поэтому достаточно доказать, что он является сжимающим. Пусть $u, v \in P_b$ — произвольные функции. Очевидно, что

$$|u(x) - v(x)| = x^{3/(\alpha-1)} e^{\beta x} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{3/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \leqslant x^{3/(\alpha-1)} e^{\beta x}\, \rho(u, v).$$

Поэтому, используя неравенство (21), имеем

$$\left| \int_0^x K'''(x-t)[u(t) - v(t)]\, dt \right| \leqslant \rho(u, v) \int_0^x K'''(x-t) e^{-\beta(x-t)} e^{\beta x} t^{3/(\alpha-1)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} K^{(5)}(c) e^{\beta x} \rho(u, v) \int_0^x (x-t)^2 t^{3/(\alpha-1)}\, dt = \frac{1}{2} K^{(5)}(c) e^{\beta x} \rho(u, v) \frac{2(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} x^{3\alpha/(\alpha-1)}.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 2 [4], применим теорему Лагранжа и получим

$$|(Tu)(x)-(Tv)(x)|\leqslant\frac{1}{\alpha}\left|\int\limits_0^x K'''(x-t)[u(t)-v(t)]\,dt\right|[F(x)]^{1-\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha}K^{(5)}(c)e^{\beta x}\rho(u,v)\frac{(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)}x^{3\alpha/(\alpha-1)}\left(\frac{p(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)}x^3\right)^{-1}=$$

$$=\frac{K^{(5)}(c)e^{\beta x}\rho(u,v)}{\alpha p}x^{3/(\alpha-1)},$$

откуда

$$\rho(Tu,Tv)\leqslant\frac{K^{(5)}(c)}{\alpha\,p}\,\rho(u,v). \tag{24}$$

Из неравенства (24) в силу условия (20) вытекает, что оператор T является сжимающим в полном метрическом пространстве P_b. Следовательно, уравнение (4) имеет единственное решение $u^*\in P_b$ и справедлива оценка (23).

То, что $u^*(x)$ является единственным решением уравнения (4) и во всём классе Q_0, доказывается так же как и в теореме 3 [4].

Решение задачи (1), (2) будем искать в классе

$$Q_0^3=\big\{u(x)\colon\ u\in C[0,\infty)\cap C^3(0,\infty),\ \ u(0)=0\ \text{ и }\ u(x)>0\ \text{ при }\ x>0\big\}.$$

Лемма 5. *Пусть $\alpha>1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u\in Q_0^3$ является решением начальной задачи (1), (2), то $u\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4). Обратно, если $u\in Q_0$ является решением интегрального уравнения (4) и выполнены условия*

$$\lim_{x\to+0}x^{-3(2\alpha-1)/(\alpha-1)}\left(\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)\,[K''(t)]^{1/(\alpha-1)}dt\right)^2=0, \tag{25}$$

$$\lim_{x\to+0}x^{-3}\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\,[K''(t)]^{1/(\alpha-1)}dt=0, \tag{26}$$

то $u\in Q_0^3$ и является решением начальной задачи (1), (2).

Доказательство. Докажем сначала первую часть леммы. Пусть $u\in Q_0^3$ — решение начальной задачи (1), (2). Тогда очевидно, что $u\in Q_0$, и в силу формулы интегрирования по частям из тождества (1) с учётом условий (2) и (3) имеем

$$u^\alpha(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x K(x-t)\,du''(t)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x u''(t)K'(x-t)\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x K'(x-t)\,du'(t)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x u'(t)K''(x-t)\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x K'''(x-t)u(t)\,dt=\int\limits_0^x K'''(x-t)u(t)\,dt,$$

т.е. $u(x)$ является решением интегрального уравнения (4).

Докажем теперь вторую часть леммы. Пусть $u\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4). Тогда по лемме 1 $u\in C^3(0,\infty)$ и, значит, $u\in Q_0^3$.

Покажем, что $u(x)$ удовлетворяет начальным условиям (2). Воспользуемся тождеством (5). Поскольку правая часть тождества (5) неотрицательна, то его левая часть также неотрицательна, а значит, $u'(x)\geqslant 0$ при любом $x>0$. Поэтому из (5) с учётом тождества (4) и леммы 2 получим

$$0\leqslant u'(x)=\alpha^{-1}\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)u(t)\,dt\,u^{1-\alpha}(x)\leqslant \alpha^{-1}\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)\,G(t)\,dt\,F^{1-\alpha}(x)=$$
$$=\alpha^{-1}C^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}x^{-3}\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)[K''(t)]^{1/(\alpha-1)}\,dt\to 0\quad\text{при}\quad x\to+0$$

(в силу условия (26)), так как $K^4(x)\leqslant xK^{(5)}(x)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+0}u'(x)=0. \tag{27}$$

Далее, из тождества (7) находим

$$0\leqslant(\alpha-1)\,\frac{u'^2(x)}{u(x)}+u''(x)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\,u(t)\,dt\,u^{1-\alpha}(x). \tag{28}$$

В силу леммы 2 справедливы соотношения

$$0\leqslant\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\,u(t)\,dt\,u^{1-\alpha}(x)\leqslant\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\,G(t)\,dt\,F^{1-\alpha}(x)=$$
$$=C^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}x^{-3}\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\,\left[K''(t)\right]^{1/(\alpha-1)}\,dt\to 0\quad\text{при}\ x\to+0$$

(с учётом условия (26)). Следовательно,

$$\lim_{x\to+0}\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\,u(t)\,dt\,u^{1-\alpha}(x)=0. \tag{29}$$

Аналогично из равенства (6), используя тождество (4) и лемму 2, получаем

$$0\leqslant\frac{u'^2(x)}{u(x)}=\frac{1}{\alpha^2}\,u^{2-2\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)\,u(t)\,dt\right)^2u^{-1}(x)=$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}\left(\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)\,u(t)\,dt\right)^2[u(x)]^{1-2\alpha}\leqslant\frac{1}{\alpha^2}\left(\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)\,G(t)\,dt\right)^2[F(x)]^{1-2\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha-1)}{\alpha}\right)^{2/(\alpha-1)}C^{1-2\alpha}x^{-3(2\alpha-1)/(\alpha-1)}\left(\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)\,[K''(t)]^{1/(\alpha-1)}dt\right)^2\to 0\quad\text{при}\ x\to+0$$

(в силу условия (25)). Тогда

$$\lim_{x\to+0}\frac{u'^2(x)}{u(x)}=0. \tag{30}$$

Переходя к пределу при $x\to+0$ в неравенстве (28), с учётом (29) и (30) будем иметь

$$\lim_{x\to+0}u''(x)=0. \tag{31}$$

Таким образом, в силу равенств (27) и (31) любое решение уравнения (4) в классе Q_0 удовлетворяет начальным условиям (2). Осталось доказать, что оно является решением интегро-дифференциального уравнения (1).

Используя формулу интегрирования по частям, из тождества (4) с учётом условия (3), равенств (27) и (31) получаем

$$u^\alpha(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x K'''(x-t)\,u(t)\,dt = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x u(t)\,dK''(x-t) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x K''(x-t)\,u'(t)\,dt = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x u'(t)\,dK'(x-t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x K'(x-t)\,u''(t)\,dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x u''(t)\,dK(x-t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x K(x-t)\,u'''(t)\,dt = \int\limits_0^x K(x-t)\,u'''(t)\,dt,$$

т.е. $u(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1). Лемма доказана.

Из леммы 5 и теоремы 1 непосредственно вытекает основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть $\alpha>1$ и выполнены условия (3), (25) и (26). Тогда начальная задача (1), (2) в конусе Q_0^3 (и в пространстве P_b при любом $b>0$) имеет единственное решение $u^*(x)$. Это решение удовлетворяет неравенствам $F(x)\leqslant u^*(x)\leqslant G(x)$ и его можно найти методом последовательных приближений по формуле $u_n=Tu_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, которые сходятся к нему по метрике (19) при любом $b<\infty$, причём справедлива оценка скорости их сходимости (23).*

Приведём несколько примеров, показывающих, в частности, что чем выше порядок интегро-дифференциального уравнения вида (1), тем больше ограничений не только на ядро $K(x)$, но и на показатель α.

Пример 2. Начальная задача

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x (x-t)\,u'(t)\,dt, \quad 1<\alpha<\infty, \quad u(0)=0$$

имеет в классе Q_0^1 (см. [4]) единственное решение

$$u(x) = C_1 x^{1/(\alpha-1)}, \quad C_1 = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Пример 3. Начальная задача

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x (x-t)^3 u''(t)\,dt, \quad 1<\alpha<3, \quad u(0)=u'(+0)=0$$

имеет в классе Q_0^2 (см. [5]) единственное решение

$$u(x) = C_2 x^{2/(\alpha-1)}, \quad C_2 = \left(\frac{3(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha+1)}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Ограничение $1<\alpha<3$ необходимо для выполнения начального условия $u'(+0)=0$, поскольку $u'(x)=2C_2(\alpha-1)^{-1}x^{(3-\alpha)/(\alpha-1)}$, а также для выполнения условия (14) из статьи [5] при $K(x)=x^3$.

Пример 4. Начальная задача

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x (x-t)^5 u'''(t)\,dt, \quad 1<\alpha<2.5, \quad u(0)=u'(+0)=u''(+0)=0$$

имеет в классе Q_0^3 единственное решение

$$u(x)=C_3x^{3/(\alpha-1)}, \quad C_3=\left(\frac{40(\alpha-1)^3}{\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Ограничение $1<\alpha<2.5$ необходимо как для выполнения условия $u''(+0)=0$, поскольку $u''(x)=3C_3(4-\alpha)(\alpha-1)^{-2}x^{(5-2\alpha)/(\alpha-1)}$, так и (что важно) для выполнения условий (25) и (26) при $K(x)=x^5$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FEGS-2020-0001).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Okrasinski, W. Nonlinear Volterra equations and physical applications / W. Okrasinski // Extracta Math. — 1989. — V. 4, № 2. — P. 51–74.
2. Askhabov S.N. Nonlinear convolution type equations / S.N. Askhabov, M.A. Betilgiriev // Semin. Anal., Oper. Equat. Numer. Anal. 1989/90. — Berlin : Karl-Weierstrass-Institut für Mathematik, 1990. — P. 1–30.
3. Brunner, H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications / H. Brunner. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2017. — 402 p.
4. Асхабов, С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части / С.Н. Асхабов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 786–795.
5. Askhabov, S.N. On a second-order integro-differential equation with difference kernels and power nonlinearity / S.N. Askhabov // Bulletin of the Karaganda University. Math. Series. — 2022. — № 2 (106). — P. 38–48.
6. Эдвардс, Р. Функциональный анализ: теория и приложения / Р. Эдвардс ; пер. с англ. Г.Х. Бермана, И.Б. Раскиной ; под ред. В.Я. Лина. — М. : Мир, 1969. — 1071 с.

INITIAL PROBLEM FOR A THIRD ORDER NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE

S. N. Askhabov

Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia
Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia
e-mail: askhabov@yandex.ru

The article obtains two-sided a priori estimates for the solution of a homogeneous third-order Volterra integro-differential equation with power-law nonlinearity and a difference kernel. It is shown that the lower a priori estimate, which plays the role of a weight function when constructing a metric in the cone of the space of continuous functions, is unimprovable. Using these estimates, using the method of weight metrics (analogous to A. Bielecki's method), a global theorem on the existence, uniqueness and method of finding a nontrivial solution to the initial problem for the specified integro-differential equation in the class of non-negative continuous functions on the positive half-axis is proved. It is shown that the solution can be found by the method of successive approximations and an estimate of the rate of their convergence to the exact solution is obtained. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: integro-differential equation, nonlinearity, convolution, weight metrics method.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FEGS-2020-0001).

REFERENCES

1. Okrasinski, W., Nonlinear Volterra equations and physical applications, *Extracta Math.*, 1989, vol. 4, no. 2, pp. 51–74.
2. Askhabov, S.N. and Betilgiriev, M.A., Nonlinear convolution type equations, *Semin. Anal., Oper. Equat. Numer. Anal., 1989/90*, Berlin: Karl–Weierstrass–Institut für Mathematik, 1990, pp. 1–30.
3. Brunner, H., *Volterra Integral Equations: an Introduction to the Theory and Applications*, Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
4. Askhabov, S.N., Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 775–784.
5. Askhabov, S.N., On a second-order integro-differential equation with difference kernels and power nonlinearity, *Bulletin of the Karaganda University. Math. Series*, 2022, no. 2 (106), pp. 38–48.
6. Edwards, R.E., *Functional Analysis: Theory and Applications*, New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1965.