

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЛЕНАМИ

В. Г. Романов

Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

e-mail: romanov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 01.02.2024 г., после доработки 01.02.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Для гиперболического уравнения второго порядка, содержащего два нелинейных члена, изучается обратная задача, заключающаяся в определении коэффициентов при нелинейностях. Рассматривается задача Коши с источником, сосредоточенным в точке $\mathbf{y}$. Эта точка является параметром задачи и пробегает последовательно некоторую сферическую поверхность S . Предполагается, что искомые коэффициенты отличны от нуля только в области, лежащей внутри S . Задаётся след решения задачи Коши на S для всевозможных значений $\mathbf{y}$ и для моментов времени, близких к приходу волны от источника в точки поверхности S , что позволяет свести рассматриваемую обратную задачу к двум последовательно решаемым задачам интегральной геометрии, для которых находятся оценки устойчивости решений.

Ключевые слова: обратная задача, нелинейное уравнение, интегральная геометрия, единственность, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0374064124040061, EDN: PBXEKR

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + \sigma(\mathbf{x})(u_t)^m + q(\mathbf{x})u^2 = \delta(x - y)H(t)r(t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (1)$$

в котором $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ — гладкие финитные функции; число $m > 1$; $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 0$ для $t < 0$ и $H(t) = 1$ для $t \geq 0$; $r(t)$ — функция такая, что $r(t) = at$ ($a > 0$) для $t \in [0, \epsilon]$, где ϵ — некоторое положительное число; δ — дельта-функция Дирака; Δ — оператор Лапласа. При $t > \epsilon$ функция $r(t)$ может быть задана произвольно. Под термином *гладкая функция* здесь и в дальнейшем понимается функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Пусть $B(R_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < R_0\}$ — шар с границей $S(R_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = R_0\}$. Предполагаем, что носитель коэффициентов $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ содержится в $B(R_0)$.

Далее считаем, что $\mathbf{y} \in S(R)$, $S(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = R\}$, $R > R_0$, и $\mathbf{y}$ — переменный параметр задачи. В связи с этим решение задачи (1) обозначим $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$.

Прямая задача. При заданных функциях $\sigma(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{x})$ найти функцию $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, являющуюся решением задачи (1).

Ниже мы будем рассматривать задачу, обратную к сформулированной выше. Она заключается в определении функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ в области $B(R_0)$. Для этого используется некоторая информация о решениях прямой задачи.

Определим $S(R, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in S(R) : \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) > 2(R^2 - R_0^2)\}$ — часть сферы $S(R)$, лежащая внутри конуса с вершиной в точке $\mathbf{y} \in S(R)$, образующие которого касаются сферы $S(R_0)$.

Обратная задача. Требуется найти функции $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ в области $B(R_0)$ по следующей информации о решениях прямой задачи:

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \quad \text{для любых } \mathbf{y} \in S(R) \text{ и } \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}), \quad t \in (|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \eta, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \eta),$$

где $\eta > 0$ — произвольное малое число.

Обратные задачи для квазилинейных волновых уравнений интенсивно изучаются в последнее время. В работах [1–12] исследованы задачи, в которых волновой оператор рассматривается на лоренцевом многообразии, а само уравнение является квазилинейным. При этом изучены задачи об определении либо лоренцевой метрики, либо коэффициентов при нелинейностях. В статьях [13, 14] изучены обратные задачи об определении коэффициента при младшем нелинейном члене волнового уравнения. В [15] рассмотрена задача об определении некоторой функции $f(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, входящей в волновое уравнение. Основой исследования этих задач являлось разложение решения прямой задачи в окрестности фронта волны.

В настоящей работе изучается поставленная выше обратная задача об определении коэффициентов $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$. Насколько известно автору, ранее она никем не рассматривалась. Как и в статьях [13–15], выписывается разложение решения прямой задачи в окрестности волнового фронта бегущей волны и на его основе исследуется обратная задача. Решение задачи об определении обеих функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ сводится к задачам интегральной геометрии на семействе прямых линий. Эти задачи состоят в определении функции через интегралы от неё с заданной весовой функцией вдоль всевозможных прямых линий, пересекающих область $B(R_0)$. Весовые функции в задачах определения $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ различны. Ниже найдены оценки устойчивости решений возникающих задач. Все результаты, полученные в статье, являются новыми и могут быть использованы для диагностики сред с нелинейным поглощением.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим асимптотическое разложение решения прямой задачи в окрестности характеристического конуса $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ по степеням $t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Так как точечный источник в уравнении отделён от носителя функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ на расстояние $R - R_0$, то решение задачи (1) в окрестности источника и для моментов времени $t \leq \varepsilon$, $\varepsilon = \min(R - R_0, \epsilon)$, имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{a}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0, \quad t \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Для неоднородной среды имеет место следующее утверждение о структуре решения задачи (1) в окрестности характеристического конуса.

Теорема 1. Пусть $\sigma(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{x})$ — гладкие функции и выполнено условие

$$\sigma(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (3)$$

Тогда в окрестности характеристического конуса $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ решение задачи (1) представимо в виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) & \left[\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}{2!} + \right. \\ & \left. + \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^3}{3!} + \dots + \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^k}{k!} + \dots \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $j \in \mathbb{N}$, — гладкие функции, причём, согласно формуле (2), для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0$

$$\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a}{4\pi}, \quad \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (5)$$

а для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R - R_0$ они вычисляются по формулам

$$\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a}{4\pi} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi) ds \right)^{-1/(m-1)}, \quad (6)$$

$$\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \Delta_\xi \left(\frac{\alpha_1(\xi, \mathbf{y})}{|\xi - \mathbf{y}|} \right) ds, \quad (7)$$

$$\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \left\{ m(m-1) \sigma(\xi) [s^{1-m} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) + \right. \\ \left. + s^{2-m} \alpha_1^{m-2}(\xi, \mathbf{y}) \alpha_2^2(\xi, \mathbf{y})] + 2q(\xi) s^{-2} \alpha_1^2(\xi, \mathbf{y}) - \Delta_\xi \alpha_2(\xi, \mathbf{y}) \right\} ds, \quad (8)$$

$$\alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \left[\Delta_\xi \alpha_{k-1}(\xi, \mathbf{y}) - 2\sigma(\xi) P_k(\alpha_1(\xi, \mathbf{y}), \dots, \alpha_{k-1}(\xi, \mathbf{y}), s) - \right. \\ \left. - 2q(\xi) Q_k(\alpha_1(\xi, \mathbf{y}), \dots, \alpha_{k-1}(\xi, \mathbf{y}), s) \right] ds. \quad (9)$$

В этих формулах функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0$, а для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R - R_0$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp \left\{ \int_{R-R_0}^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left[s^{-2} + \frac{m}{2} s^{1-m} \sigma(\xi) \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) \right] ds \right\}. \quad (10)$$

Здесь $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — отрезок прямой линии, соединяющий точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, $\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $s \in [R - R_0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|]$, $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Доказательство. Вычислив главную часть дифференциального оператора на функции $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, определённой равенством (4), найдём, что при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ имеет место равенство

$$u_{tt} - \Delta u = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left\{ 2\nabla \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \right. \\ + \left[2\nabla (\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \Delta_{\mathbf{x}} \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \right] \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{1!} + \\ + \left[2\nabla (\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \Delta_{\mathbf{x}} \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}{2!} + \dots \\ \left. \dots + \left[2\nabla (\alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \Delta_{\mathbf{x}} (\alpha_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \right] \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right\}. \quad (11)$$

Кроме того,

$$(u_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}))^m = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^m + m \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{1!} + \right. \\ + \left[m \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + m(m-1) \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-2} \alpha_2^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}{2!} + \dots \\ \left. \dots + \left[m \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{k-1}}{(k-1)!} \right] + \dots \right\}, \quad (12)$$

где $P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ — некоторые полиномы по $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ и $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Для функции $u^2(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ справедливо представление

$$u^2(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left\{ 2 \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^2 \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}{2!} + \dots \right. \\ \left. \dots + Q_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^k}{k!} + \dots \right\}, \quad (13)$$

в котором $Q_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ также являются полиномами по тем же переменным.

Учитывая равенства (11)–(13) и уравнение (1), находим соотношения для вычисления коэффициентов α_k , $k \in \mathbb{N}$, разложения (4) в виде

$$2\nabla \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \sigma(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^m = 0, \quad (14)$$

$$2\nabla(\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \\ + m\sigma(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{x}} \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = 0, \quad (15)$$

$$2\nabla(\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + m\sigma(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \\ + m(m-1)\sigma(\mathbf{x}) \left[\left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-2} \alpha_2^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] + \\ + 2q(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^2 - \Delta_{\mathbf{x}} \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (16)$$

$$2(\alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + m\sigma(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \\ + \sigma(\mathbf{x}) P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + q(\mathbf{x}) Q_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \Delta_{\mathbf{x}} \alpha_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (17)$$

Проинтегрируем систему (14)–(17). Умножим равенство (14) на $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ и учтём, что

$$\Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \frac{2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (18)$$

Тогда уравнение для $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будет следующим:

$$2\nabla \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \sigma(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^m = 0. \quad (19)$$

Вдоль отрезка $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\xi \in \mathbb{R}^3: \xi = \mathbf{y} + s\nu\}$ уравнение (19) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Действительно, оно имеет вид

$$2 \frac{d}{ds} \alpha_1(\mathbf{y} + s\nu) + \sigma(\mathbf{y} + s\nu) s^{1-m} \alpha_1^m(\mathbf{y} + s\nu) = 0, \quad s \in (0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|]. \quad (20)$$

Заметим, что появление сингулярности s^{1-m} при $s=0$ в этом уравнении не играет никакой роли, так как функция $\sigma(\xi)$ равна нулю для $s \in [0, R - R_0]$. Согласно формуле (2)

$$\alpha_1(\mathbf{y} + s\nu, \mathbf{y}) = \frac{a}{4\pi} =: \alpha_1^0, \quad s \in [0, R - R_0].$$

Интегрируя уравнение (20) с учётом этого условия, приходим к соотношению

$$\alpha_1^{1-m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\alpha_1^0)^{1-m} = \frac{m-1}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi) ds, \quad (21)$$

в котором ξ — переменная точка интегрирования, определяемая равенством $\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Из (21) получаем формулу (6) для вычисления функции $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая является гладкой ввиду условия (3) и финитности $\sigma(\mathbf{x})$ в $B(R_0)$.

Рассмотрим уравнение (15). В силу формулы (2) функция $\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0$. Учитывая равенство (18), запишем уравнение для $\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вдоль $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в виде

$$2 \frac{d\alpha_2}{ds} + \alpha_2 \left[\frac{2}{s^2} + ms^{1-m} \sigma(\xi) \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) \right] - \Delta_\xi \left(\frac{\alpha_1(\xi, \mathbf{y})}{|\xi - \mathbf{y}|} \right) = 0, \quad s > R - R_0, \quad (22)$$

в котором $\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. С помощью функции $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определённой формулой (10), уравнение (22) можно записать как

$$2 \frac{d}{ds} (\alpha_2(\xi, \mathbf{y}) \Phi(\xi, \mathbf{y})) = \Phi(\xi, \mathbf{y}) \Delta_\xi \left(\frac{\alpha_1(\xi, \mathbf{y})}{|\xi - \mathbf{y}|} \right). \quad (23)$$

Интегрируя это равенство по промежутку $[R - R_0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|]$, получаем

$$\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \Delta_\xi \left(\frac{\alpha_1(\xi, \mathbf{y})}{|\xi - \mathbf{y}|} \right) ds, \quad (24)$$

где в силу первого равенства в (5) учтено, что

$$\Delta_{\mathbf{x}} \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = 0, \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0.$$

Формула (24) совпадает с формулой (7). Очевидно, что здесь функция $\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является гладкой.

Проинтегрируем уравнение (16). С учётом формулы (18) запишем его в виде

$$\begin{aligned} & 2 \frac{d\alpha_3}{ds} + \alpha_3 \left[\frac{2}{s^2} + ms^{1-m} \sigma(\xi) \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) \right] + \\ & + m(m-1) \sigma(\xi) [s^{1-m} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) + s^{2-m} \alpha_1^{m-2}(\xi, \mathbf{y}) \alpha_2^2(\xi, \mathbf{y})] + \\ & + 2q(\xi) s^{-2} \alpha_1^2(\xi, \mathbf{y}) - \Delta_\xi \alpha_2(\xi, \mathbf{y}) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Умножив равенство (25) на $\Phi(\xi, \mathbf{y})$, представим его в виде, аналогичном (23):

$$\begin{aligned} & 2 \frac{d}{ds} (\alpha_3(\xi, \mathbf{y}) \Phi(\xi, \mathbf{y})) + \Phi(\xi, \mathbf{y}) \left\{ m(m-1) \sigma(\xi) [s^{1-m} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) + \right. \\ & \left. + s^{2-m} \alpha_1^{m-2}(\xi, \mathbf{y}) \alpha_2^2(\xi, \mathbf{y})] + 2q(\xi) s^{-2} \alpha_1^2(\xi, \mathbf{y}) - \Delta_\xi \alpha_2(\xi, \mathbf{y}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Интегрируя уравнение (26) и учитывая, что $\alpha_3(\xi, \mathbf{y}) = 0$ для $|\xi - \mathbf{y}| \leq R - R_0$, получаем формулу (8).

Интегрирование уравнения (17) выполняется по аналогичной схеме: уравнение умножается на $\Phi(\xi, \mathbf{y})$ и затем интегрируется по переменной s на отрезке $[0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|]$, в результате чего получается формула (9).

3. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ К ДВУМ ЗАДАЧАМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Из теоремы 1 следует, что

$$\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = u_t|_{t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0},$$

поэтому функция $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может быть вычислена по данным обратной задачи на том же множестве, на котором заданы эти данные, а именно,

$$\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| F_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|_{t=|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0}, \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}).$$

Воспользуемся формулой (6), чтобы получить уравнение для функции $\sigma(\mathbf{x})$ в виде

$$\int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rho_1(\xi, \mathbf{y}) \sigma(\xi) ds = v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}), \quad (27)$$

где весовая функция и правая часть определяются как

$$\rho_1(\xi, \mathbf{y}) = |\xi - \mathbf{y}|^{1-m}, \quad \xi \in B(R_0), \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad (28)$$

$$v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2(4\pi)^{m-1}}{(m-1)a^{m-1}} \left[\left(\frac{a}{4\pi\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right)^{m-1} - 1 \right].$$

Заметим, что

$$\rho_1(\xi, \mathbf{y}) \geq (R - R_0)^{1-m}, \quad \xi \in B(R_0), \quad \mathbf{y} \in S(R),$$

так как интегрирование в формуле (28) фактически проводится только по той части отрезка $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая лежит в области $B(R_0)$, где $\sigma(\mathbf{x})$ отлична от нуля. Таким образом, задача о нахождении коэффициента $\sigma(\mathbf{x})$ сводится к решению интегрального уравнения (28). Возникающая задача носит название *задачи интегральной геометрии*. Ниже будет показано, что для неё имеет место теорема единственности, а при некотором дополнительном условии на геометрию области наблюдения и оценка устойчивости решения этой задачи.

Предположим теперь, что решение уравнения (28) найдено. Тогда функции $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ могут быть вычислены по формулам (6), (7) для любых значений $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Это позволяет построить уравнение для отыскания коэффициента $q(\mathbf{x})$. Действительно, из представления (4) следует, что

$$\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial^3 u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial t^3} \Big|_{t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0},$$

поэтому функция $\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может быть вычислена по данным обратной задачи для всех $\mathbf{y} \in S(R)$, $\mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y})$. Тогда из формулы (8) находим уравнение

$$\int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rho_2(\xi, \mathbf{y}) q(\xi) ds = v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}), \quad (29)$$

в котором весовая функция $\rho_2(\xi, \mathbf{y})$ определена равенством

$$\rho_2(\xi, \mathbf{y}) = |\xi - \mathbf{y}|^{-2} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \alpha_1^2(\xi, \mathbf{y}), \quad \xi \in B(R_0), \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad (30)$$

а правая часть вычисляется по формуле

$$v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \\ - \frac{1}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \left\{ m(m-1) \sigma(\xi) [s^{1-m} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) + s^{2-m} \alpha_1^{m-2}(\xi, \mathbf{y}) \alpha_2^2(\xi, \mathbf{y})] - \Delta_\xi \alpha_2(\xi, \mathbf{y}) \right\} ds.$$

Следовательно, для определения коэффициента $q(\mathbf{x})$ опять возникает задача интегральной геометрии, но с другой весовой функцией. В обоих случаях для искомой функции известны интегралы от неё по всевозможным прямым, пересекающим область $B(R_0)$. В техническом отношении удобно рассматривать интегралы по всевозможным прямым, исходящим из точки $\mathbf{y}$. Используя предположение о финитности искомым функций, продолжим правые части уравнений (27) и (29), определив их нулём для всех $\mathbf{x} \in S(R) \setminus S(R, \mathbf{y})$, т.е. положим

$$\widehat{v}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} v_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}), \\ 0, & \mathbf{x} \in S(R) \setminus S(R, \mathbf{y}), \end{cases} \quad k = 1, 2,$$

и будем в дальнейшем рассматривать уравнения (27) и (29) для всех $\mathbf{x} \in S(R) \times S(R)$. Более того, каждая из рассматриваемых задач сводится к серии соответствующих двумерных задач в плоскостях $\Sigma(z) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = z\}$, $z \in (-R_0, R_0)$. Для этого достаточно в уравнениях (27) и (29) положить $\mathbf{y} \in \Sigma(z) \cap S(R)$, $\mathbf{x} \in \Sigma(z) \cap S(R)$. Возникающие проблемы являются несколько более общими, чем хорошо известная проблема томографии. Исследования различных вариантов подобных проблем были выполнены в 70-х годах прошлого века. Ниже мы воспользуемся некоторыми результатами этих исследований для вывода утверждений, связанных с задачами для уравнений (27) и (29).

4. АНАЛИЗ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим двумерную задачу об отыскании функции $\sigma(\mathbf{x})$ в плоскости $\Sigma(z)$ для уравнения (27). Заметим, что семейство отрезков $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ прямых линий, лежащих в двумерной области $\Sigma(z) \cap B(R_0)$, и весовая функция $\rho_1(\xi, \mathbf{y})$ инвариантны относительно вращений в плоскости $\Sigma(z)$ относительно точки $(0, 0, z)$. Такая задача для семейства кривых, инвариантного относительно вращений вокруг центра круга, была исследована в работе [16, с. 35–40]. Свойство инвариантности уравнения относительно вращений позволяет свести задачу к серии одномерных интегральных уравнений типа Абеля для коэффициентов Фурье функции $\sigma(\mathbf{x})$ по угловой переменной. Отсюда следуют метод построения этой функции и теорема единственности.

Теорема 2. *Задача о нахождении функции $\sigma(\mathbf{x})$ из уравнения (27) может иметь не более одного решения.*

В принципе, используя тот же метод, можно получить и оценку устойчивости решения для уравнения (27), но она качественно проигрывает оценке, которая следует из результатов статей [17, 18]. Ниже мы воспользуемся теоремой об оценке устойчивости для трёхмерного пространства из работы [18], так как в ней даны точные значения константы в этой оценке. Сформулируем в качестве леммы утверждение, которое вытекает из упомянутой теоремы и адаптировано к описанным выше задачам.

Пусть $f(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — гладкие функции и носитель $f(\mathbf{x})$ содержится в шаре $B(R_0)$. Требуется найти $f(\mathbf{x})$ в $B(R_0)$ по заданным интегралам

$$\int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rho(\xi, \mathbf{y}) f(\xi) ds = v(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S(R) \times S(R).$$

Обозначим

$$\nu = \nu(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

$$s^*(\mathbf{x}, \nu) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = (\mathbf{x} \cdot \nu) + \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi).$$

Для функции $g(\nu(\theta, \varphi))$ обозначим

$$\nabla_{\theta, \varphi} g = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right), \quad |\nabla_{\theta, \varphi} g|^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Лемма. Пусть весовая функция $\rho(\xi, \mathbf{y})$ удовлетворяет условиям

$$\rho(\xi, \mathbf{y}) \geq \rho_0 > 0, \quad (\xi, \mathbf{y}) \in B(R_0) \times S(R), \quad (31)$$

$$|\nabla_{\theta, \varphi} \ln \rho[\xi, \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)]| / 2 \leq \kappa < 1, \quad (\xi, \mathbf{y}) \in B(R_0) \times S(R), \quad (32)$$

с некоторыми положительными числами ρ_0 и κ . Тогда справедлива оценка

$$\int_{B(R_0)} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{4\pi\rho_0^2(1-\kappa)} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S(R)} |\nabla_{\theta, \varphi} v(\mathbf{x}, \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi))|^2 dS \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (33)$$

в которой $\mathbb{S}^2$ — единичная сфера, dS — элемент площади поверхности $S(R)$.

Воспользуемся этой леммой для получения оценок устойчивости решений уравнений (27) и (29).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и неравенство

$$\frac{m-1}{2(R-R_0)} = \kappa_1 < 1. \quad (34)$$

Тогда для решения задачи (27) имеет место оценка

$$\int_{B(R_0)} \sigma^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{(R-R_0)^{2(m-1)}}{4\pi(1-\kappa_1)} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S(R)} |\nabla_{\theta, \varphi} \widehat{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi))|^2 dS \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (35)$$

Доказательство. Согласно формуле (28) весовая функция в этом случае равна $\rho_1(\xi, \mathbf{y}) = |\xi - \mathbf{y}|^{1-m}$. Так как $\xi \in B(R_0)$, а $\mathbf{y} \in S(R)$, то

$$\rho_1(\xi, \mathbf{y}) \geq \frac{1}{(R-R_0)^{m-1}} =: \rho_{10}. \quad (36)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ \rho_1(\xi, \mathbf{y}) |_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \}| &= \frac{m-1}{2} |\nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ |\xi - \mathbf{y}| |_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \}| = \\ &= \frac{m-1}{2} |\nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ (|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |\xi - \mathbf{x}|) |_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \}| = \\ &= \frac{m-1}{2} |\nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - |\xi - \mathbf{x}| \}| = \frac{m-1}{2(s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - |\xi - \mathbf{x}|)} |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))|. \end{aligned}$$

Вычисляя $|\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))|$, находим

$$|\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))| = \frac{[(\mathbf{x} \cdot \nu_\theta)^2 + (\mathbf{x} \cdot \nu_\varphi)^2 / \sin^2 \theta]^{1/2}}{[(\mathbf{x} \cdot \nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2]^{1/2}} \leq 1.$$

В итоге

$$\frac{1}{2} \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ \rho_1(\xi, \mathbf{y}) \}_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right| \leq \frac{m-1}{2(R-R_0)} =: \kappa_1. \quad (37)$$

Из формул (36), (37) и условия (34) следует, что неравенства (31) и (32) леммы выполнены при $\rho_0 = \rho_{10}$ и $\kappa = \kappa_1$, поэтому из неравенства (33) вытекает оценка (35).

Замечание 1. При фиксированных $m > 1$ и R_0 неравенство (34) представляет собой условие на выбор числа R , т.е. сферы, в точках которой прикладываются источники возмущений и проводятся измерения решений задачи (1).

Для задачи, связанной с решением уравнения (29), имеет место следующая

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_0, \quad |\nabla \sigma(\mathbf{x})| \leq \sigma_1, \quad \mathbf{x} \in B(R_0), \\ \rho_{20} = \frac{a^2}{(4\pi)^2} \left(1 + (m-1) \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{R_0 \sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} \right)^{-2/(m-1)}, \\ \kappa_2 = \kappa_{21} + \kappa_{22} + \kappa_{23} < 1, \end{aligned} \quad (38)$$

где числа κ_{2j} , $j = 1, 2, 3$, определены ниже формулами (40)–(42). Тогда для решения уравнения (29) справедлива оценка устойчивости, аналогичная оценке (35):

$$\int_{B(R_0)} q^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{4\pi \rho_{20}^2 (1 - \kappa_2)} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S(R)} |\nabla_{\theta, \varphi} \widehat{v}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi))|^2 dS \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (39)$$

Доказательство. Используем формулы (6), (10) и (30) для оценки весовой функции $\rho_2(\xi, \mathbf{y})$. Из формул (6), (10) и неотрицательности $\sigma(\mathbf{x})$ следует, что

$$\frac{a}{4\pi} \left(1 + (m-1) \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{R_0 \sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} \right)^{-1/(m-1)} \leq \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{a}{4\pi}, \quad \Phi(\xi, \mathbf{y}) \geq 1.$$

Тогда

$$\rho_2(\xi, \mathbf{y}) \geq \frac{a^2}{(4\pi)^2} \left(1 + (m-1) \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{R_0 \sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} \right)^{-2/(m-1)} = \rho_{20}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \rho_2(\xi, \mathbf{y}) \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} &= \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \left\{ |\xi - \mathbf{y}| \right\}_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right| + \\ &+ \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \left\{ \alpha_1(\xi, \mathbf{y}) \right\}_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right| + \frac{1}{2} \left| \nabla_{\theta, \varphi} \int_{R-R_0}^{s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - |\xi - \mathbf{x}|} \left[s^{-2} + \frac{m}{2} s^{1-m} \sigma(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi)) \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times (\alpha_1)^{m-1}(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi), \mathbf{y}) \right] ds \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Заметим, что подобное первому из них уже было оценено выше при доказательстве теоремы 3. Имеем

$$I_1 = \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \left\{ |\xi - \mathbf{y}| \right\}_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right| \leq \frac{1}{R-R_0} =: \kappa_{21}. \quad (40)$$

Для оценки второго слагаемого используем формулу (6):

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \left\{ \alpha_1(\xi, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right\} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \int_{L(\xi, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi) ds \right)^{-(m+1)/(m-1)} \times \\ &\quad \times \left| \nabla_{\theta, \varphi} \left\{ \int_{R-R_0}^{|\xi-\mathbf{y}|} s^{1-m} \sigma(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi)) ds \right\} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\sigma(\mathbf{x}) \geq 0$, и заменим функцию $\sigma(\mathbf{x})$ нулём в первом сомножителе. Тогда, вычислив $\nabla_{\theta, \varphi}$, получим неравенство

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \left[|\xi - \mathbf{y}|^{1-m} \sigma(\xi) \left| \nabla_{\theta, \varphi} \left\{ |\xi - \mathbf{y}| \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right\} \right| + \right. \\ &+ \left. \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s^{1-m} |\nabla \sigma(\xi)| \left\{ 2(s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - s)^2 + |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))|^2 \right\}^{1/2} ds \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \left[\frac{\sigma_0}{(R-R_0)^m} + \frac{2R_0\sigma_1}{(R-R_0)^{m-1}} (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \frac{1}{(R-R_0)^m} \left[\sigma_0 + 2R_0\sigma_1(R-R_0)(2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} \right] =: \kappa_{22}. \end{aligned} \quad (41)$$

Оценим I_3 :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \left| \nabla_{\theta, \varphi} \int_{R-R_0}^{s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - |\xi - \mathbf{x}|} \left[s^{-2} + \frac{m}{2} s^{1-m} \sigma(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi)) \alpha_1^{m-1}(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi), \mathbf{y}) \right] \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(R-R_0)^2} + \frac{m}{4} \left[|\xi - \mathbf{y}|^{1-m} \sigma(\xi) \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))| + \right. \\ &+ \left. \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s^{1-m} |\nabla \sigma(\xi)| \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) \left(2(s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - s)^2 + |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))|^2 \right)^{1/2} ds + \right. \\ &+ \left. \int_{R-R_0}^{|\xi-\mathbf{y}|} s^{1-m} \sigma(\xi) \left\{ |\nabla_{\xi} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| (2(s^*(\theta, \varphi) - s)^2 + |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\theta, \varphi)|^2)^{1/2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\nabla_{\mathbf{y}} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| \right\} \Big|_{\xi=\mathbf{x}+(s-s^*(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} ds \right]. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$|\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\theta, \varphi)| \leq 1, \quad (2(s^*(\theta, \varphi) - s)^2 + |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\theta, \varphi)|^2)^{1/2} \leq (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2},$$

приходим к промежуточной оценке

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{(R-R_0)^2} + \frac{m}{4} \left[\left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{\sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} + \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{2R_0\sigma_1}{(R-R_0)^{m-1}} (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} \int_{R-R_0}^{|\xi-\mathbf{y}|} \left\{ |\nabla_{\xi} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} + |\nabla_{\mathbf{y}} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| \right\} \Big|_{\xi=\mathbf{y}+s\nu(\theta, \varphi)} ds \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) = \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \int_{R-R_0}^{|\xi-\mathbf{y}|} s^{1-m} \sigma(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi)) ds\right)^{-1},$$

то

$$\begin{aligned} |\nabla_{\xi} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| &= \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{2(m-1)} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \int_{L(\xi, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi') ds\right)^{-2} \times \\ &\quad \times |\xi - \mathbf{y}|^{1-m} \sigma(\xi) |\nabla_{\xi} |\xi - \mathbf{y}|| \leq \frac{(m-1)\sigma_0}{2(R-R_0)^{m-1}} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{2(m-1)}, \\ |\nabla_{\mathbf{y}} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| &= \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{2(m-1)} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \int_{L(\xi, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi') ds\right)^{-2} \times \\ &\quad \times \left\{ |\xi - \mathbf{y}|^{1-m} \sigma(\xi) |\nabla_{\mathbf{y}} |\xi - \mathbf{y}|| + \int_{L(\xi, \mathbf{y})} s^{1-m} |\nabla \sigma(\xi')| ds \right\} \leq \frac{m-1}{2(R-R_0)^{m-1}} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{2(m-1)} (\sigma_0 + 2R_0\sigma_1). \end{aligned}$$

С учётом последних оценок имеем

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{(R-R_0)^2} + \frac{m}{4} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \frac{1}{(R-R_0)^{m-1}} \left[\sigma_0 + 2R_0\sigma_1 (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1)\sigma_0}{2(R-R_0)^{m-1}} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{(m-1)} \left\{ \sigma_0 (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} + \sigma_0 + 2R_0\sigma_1 \right\} \right] =: \kappa_{23}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из полученных выше оценок и условия (38) следует, что для задачи (29) выполняются условия леммы с $\rho_0 = \rho_{20}$ и $\kappa = \kappa_2$. Отсюда вытекает оценка (39).

Замечание 2. Условие (38) теоремы 4 выглядит довольно сложным. Однако оно всегда может быть выполнено при проведении эксперимента с целью получить данные обратной задачи. Действительно, формула (40) показывает, что число κ_{21} можно сделать малым за счёт выбора достаточно большого R . Из формул (41), (42) следует, что числа κ_{22} и κ_{23} малы, если R велико, а число a достаточно малое. Выбор чисел R и a , т.е. условий эксперимента, определяется экспериментатором, поэтому условие (38) представляется достаточно естественным.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurylev, Y. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations / Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann // Invent. Math. — 2018. — V. 212. — P. 781–857.
2. Lassas, M. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds / M. Lassas, G. Uhlmann, Y. Wang // Commun. Math. Phys. — 2018. — V. 360. — P. 555–609.

3. Lassas, M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations / M. Lassas // Proc. Int. Congress Math. — 2018. — V. 3. — P. 3739–3760.
4. Hintz, P. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets / P. Hintz, G. Uhlmann // Int. Math. Res. Notices. — 2019. — V. 22. — P. 6949–6987.
5. Hintz, P. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds / P. Hintz, G. Uhlmann, J. Zhai // Int. Math. Res. Notices. — 2022. — V. 17. — P. 3181–3211.
6. Uniqueness, reconstruction and stability for an inverse problem of a semi-linear wave equation / M. Lassas, T. Liimatainen, L. Potenciano-Machado, T. Tyni // J. Differ. Equat. — 2022. — V. 337. — P. 395–435.
7. Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity / X. Chen, M. Lassas, L. Oksanen, G.P. Paternain // J. Eur. Math. Soc. — 2022. — V. 24, № 7. — P. 2191–2232.
8. Wang, Y. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations / Y. Wang, T. Zhou // Commun. Partial Differ. Equat. — 2019. — V. 44, № 11. — P. 1140–1158.
9. Barreto, A.S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions / A.S. Barreto // Inverse Probl. Imaging. — 2020. — V. 14, № 6. — P. 1057–1105.
10. Uhlmann, G. On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation / G. Uhlmann, J. Zhai // J. Math. Pures Appl. — 2021. — V. 153. — P. 114–136.
11. Barreto, A.S. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime / A.S. Barreto, P. Stefanov // Commun. Math. Phys. — 2022. — V. 392. — P. 25–53.
12. Wang, Y. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations / Y. Wang, T. Zhou // Commun. Partial Differ. Equat. — 2019. — V. 44, № 11. — P. 1140–1158.
13. Романов, В.Г. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения / В.Г. Романов, Т.В. Бугуева // Сибирский журн. индустр. математики. — 2022. — Т. 25, № 3. — С. 154–169.
14. Романов, В.Г. Обратная задача для полулинейного волнового уравнения / В.Г. Романов // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 504, № 1. — С. 36–41.
15. Романов, В.Г. Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением / В.Г. Романов // Сибирский мат. журн. — 2023. — Т. 64, № 3. — С. 635–652.
16. Романов, В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа / В.Г. Романов. — Новосибирск : Наука, 1972. — 164 с.
17. Мухометов, Р.Г. Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия / Р.Г. Мухометов // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 232, № 1. — С. 32–35.
18. Романов, В.Г. Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики / В.Г. Романов // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 241, № 2. — С. 290–293.

AN INVERSE PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH TWO NONLINEAR TERMS

V. G. Romanov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
e-mail: romanov@math.nsc.ru

An inverse problem for a hyperbolic equation of the second order containing two nonlinear terms is studied. It consists in recovering coefficients under nonlinearities. The Cauchy problem with a point source located at point $\mathbf{y}$ is considered. This point is a parameter of the problem and runs an spherical surface S successively. It is supposed that unknown coefficients are differed from zero in domain be situated inside of S only. The trace of a solution of the Cauchy problem is given on S for all values of $\mathbf{y}$ and for all times closed to moments of arriving of the wave from $\mathbf{y}$ to points of S . It is proved that this information allows to reduce the inverse problem to two problems of the integral geometry solving successively. For latter problems stability estimates are stated.

Keywords: inverse problem, nonlinear equation, integral geometry, uniqueness, stability.

FUNDING

This work was carried out within the framework of the state assignment for Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, project no. FWNF-2022-0009.

REFERENCES

1. Kurylev, Y., Lassas, M., and Uhlmann, G., Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations, *Invent. Math.*, 2018, vol. 212, pp. 781–857.
2. Lassas, M., Uhlmann, G., and Wang, Y., Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds, *Commun. Math. Phys.*, 2018, vol. 360, pp. 555–609.
3. Lassas, M., Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations, *Proc. Int. Congress Math.*, 2018, vol. 3, pp. 3739–3760.
4. Hintz, P. and Uhlmann, G., Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets, *Int. Math. Res. Notices*, 2019, vol. 22, pp. 6949–6987.
5. Hintz, P., Uhlmann, G., and Zhai, J., An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds, *Int. Math. Res. Notices*, 2022, vol. 17, pp. 3181–3211.
6. Lassas, M., Liimatainen, T., Potenciano-Machado, L., and Tyni, T., Uniqueness, reconstruction and stability for an inverse problem of a semi-linear wave equation, *J. Differ. Equat.*, 2022, vol. 337, pp. 395–435.
7. Chen, X., Lassas, M., Oksanen, L., and Paternain, G.P., Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity, *J. Eur. Math. Soc.*, 2022, vol. 24, no. 7, pp. 2191–2232.
8. Wang, Y. and Zhou, T., Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations, *Commun. Partial Differ. Equat.*, 2019, vol. 44, no. 11, pp. 1140–1158.
9. Barreto, A.S., Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions, *Inverse Probl. Imaging*, 2020, vol. 14, no. 6, pp. 1057–1105.
10. Uhlmann, G. and Zhai, J., On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation, *J. Math. Pures Appl.*, 2021, vol. 153, pp. 114–136.
11. Barreto, A.S. and Stefanov, P., Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime, *Commun. Math. Phys.*, 2022, vol. 392, pp. 25–53.
12. Wang, Y. and Zhou, T., Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations, *Commun. Partial Differ. Equat.*, 2019, vol. 44, no. 11, pp. 1140–1158.
13. Romanov, V.G. and Buguyeva, T.V., The problem of determining the coefficient of the nonlinear term in a quasilinear wave equation, *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, vol. 16, no. 3, pp. 550–562.
14. Romanov, V.G., An inverse problem for a semilinear wave equation, *Dokl. Math.*, 2022, vol. 105, no. 3, pp. 166–170.
15. Romanov, V.G., An inverse problem for the wave equation with nonlinear damping, *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 3, pp. 670–685.
16. Romanov, V.G., *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Berlin: Springer Verlag, 1974.
17. Muhometov, R.G., The reconstruction problem of a two-dimensional Riemannian metric and integral geometry, *Sov. Math. Dokl.*, 1977, vol. 18, no. 1, pp. 27–31.
18. Romanov, V.G., Integral geometry on the geodesics of an isotropic Riemannian metric, *Sov. Math. Dokl.*, 1978, vol. 19, no. 4, pp. 847–851.