

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕЛИНЕАРИЗУЕМЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

В. Ю. Мартынова

Пензенский государственный университет

e-mail: lunxbox@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2023 г., после доработки 31.10.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Рассматривается нелинейная задача на собственные значения для системы трёх уравнений с краевыми условиями первого рода, описывающая распространение электромагнитных волн в плоском нелинейном волноводе. Такая задача является двухпараметрической с одним спектральным параметром и вторым параметром, возникающим из-за дополнительного условия, связывающего постоянные интегрирования, которые появляются при нахождении первых интегралов системы. Доказывается существование нелинеаризуемых решений задачи.

Ключевые слова: двухпараметрическая задача на собственные значения, нелинеаризуемое решение, интегральное характеристическое уравнение, уравнения Максвелла, нелинейная диэлектрическая проницаемость.

DOI: 10.31857/S0374064124040035, EDN: PCSZEQ

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается двухпараметрическая задача нового типа. Особенность таких задач заключается в том, что искомыми в них являются два параметра, но лишь один из них спектральный, а второй ищется с учётом нетривиальности решения задачи. Двухпараметрические задачи этого типа описывают распространение электромагнитных волн в нелинейных волноводах. Указанный второй параметр возникает из постановки дополнительного условия, которое в данной задаче является локальным краевым условием и задаётся на одной из границ волновода. Впервые такие задачи были предложены в работе [1], где исследуются неполяризованные азимутально-симметричные гибридные электромагнитные волны в круглом цилиндрическом волноводе. Далее появился интерес к исследованию распространения подобных волн в плоских волноводных структурах. Результаты, полученные для неполяризованных симметричных гибридных электромагнитных волн, распространяющихся в нелинейном слое, представлены в статьях [2, 3]. Стоит отметить, что упомянутые неполяризованные азимутально-симметричные и симметричные гибридные электромагнитные волны могут быть представлены в виде суммы двух поляризованных ТЕ и ТМ волн [4–6], но не являются связанными ТЕ-ТМ волнами, как, например, в [7]. В работах [1–3] в качестве метода изучения использовался классический метод возмущения, позволяющий доказать существование решений нелинейной задачи в окрестности решения соответствующей линейной задачи.

Следующим шагом стало изучение волн другого типа, электромагнитных монохроматических ТЕ-ТЕ волн, которые можно рассматривать как частный случай связанных ТЕ-ТЕ волн [8]. Задача о распространении монохроматических связанных ТЕ-ТЕ волн также относится к двухпараметрическим задачам указанного выше типа. Заметим, что неполяризо-

ванные азимутально-симметричные и симметричные гибридные, а также электромагнитные монохроматические ТЕ-ТЕ волны могут существовать лишь в нелинейной среде, а в линейной распадаются на две волны (в случае неполяризованных гибридных волн на ТЕ и ТМ волны, а в случае монохроматических связанных ТЕ-ТЕ волн на две ТЕ-волны).

Для исследования электромагнитных монохроматических связанных ТЕ-ТЕ волн в работах [9, 10] был использован метод возмущения с модификацией, где в качестве невозмущённых использовались не линейные задачи, а более простые, но нелинейные задачи. Такой подход был предложен и развит в статье [11]. Его преимуществом является то, что он позволяет доказать существование нелинейных решений, которые не имеют аналогов в линейном случае.

В настоящей работе исследуется задача, которая является невозмущённой для задачи о неполяризованных симметричных гибридных электромагнитных волнах, распространяющихся в плоском нелинейном волноводе. Физическое обоснование такой задачи будет дано в п. 4. Доказательство существования решений рассматриваемой задачи позволит в дальнейшем установить разрешимость задачи о неполяризованных симметричных гибридных электромагнитных волнах. При этом разрешимость исследуемой в работе задачи будет доказана, подобно тому как это сделано в [12], с использованием метода интегрального характеристического уравнения, который предложен и развит в работах [13–15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем использовать следующие обозначения: $I = (0, h)$, $\bar{I} = [0, h]$, $h > 0$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Рассмотрим систему

$$u_1'' - \gamma^2 u_1 = -a u_1 - \alpha u_1^3, \quad \gamma^2 u_2 - \gamma u_3' = a u_2 + \alpha(u_2^2 + u_3^2)u_2, \quad -\gamma u_2' + u_3'' = -a u_3 - \alpha(u_2^2 + u_3^2)u_3 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1'|_{x=0} = A_1, \quad (2)$$

$$u_3|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = A_2, \quad (3)$$

$$u_1|_{x=h} = 0, \quad u_3|_{x=h} = 0, \quad (4)$$

где $x \in \bar{I}$, $a, \gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$, A_1 и A_2 — положительные постоянные, которые определяются из дополнительного условия, введённого ниже.

Используя результаты, полученные в работе [16], первый интеграл первого уравнения системы (1) запишем в виде

$$u_1'^2 + (a - \gamma^2)u_1^2 + 0.5\alpha u_1^4 = C_1^2, \quad (5)$$

где C_1^2 — постоянная интегрирования. Удобно выбрать именно C_1^2 , а не C_1 , поскольку при учёте условий (2) и (3) получим, что $C_1^2 = u_1'^2(0)$.

На основе результатов статьи [17] первый интеграл для второго и третьего уравнений системы (1) запишем как

$$(a + \alpha(u_2^2 + u_3^2))^2 u_2^2 + \gamma^2 a(u_2^2 + u_3^2) - 2\gamma^2(a + \alpha(u_2^2 + u_3^2))u_2^2 + 0.5\gamma^2 \alpha(u_2^2 + u_3^2)^2 = C_2^2, \quad (6)$$

где C_2^2 — постоянная интегрирования.

Считаем, что постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ связаны между собой соотношением

$$C_1^2 + C_2^2 = C^2, \quad (7)$$

где $C > 0$ — известная постоянная.

Вычислив (5) в точке $x=0$, получим

$$A_1^2 = C_1^2,$$

где $A_1 = u_1'(0)$. Учитывая положительность данных постоянных, имеем $A_1 = C_1$.

Вычисление (6) в точке $x=0$ даёт

$$(a - \gamma^2 + \alpha A_2^2)^2 A_2^2 + \gamma^2 (a - \gamma^2) A_2^2 + 0.5 \alpha \gamma^2 A_2^4 = C_2^2, \quad (8)$$

где $A_2 = u_2(0)$. В работе [17] доказано, что величина $A_2^2 > 0$ однозначно определяется из уравнения (8) при любом фиксированном значении $C_2^2 > 0$.

Таким образом, значения функций u_1' и u_2 в нуле, а именно положительные постоянные $A_1 = A_1(C_1)$ и $A_2 = A_2(C_2)$, однозначно определяются постоянными интегрирования C_1 и C_2 .

Теперь можем сформулировать задачу $\mathcal{P}$.

Определение. Задача $\mathcal{P}$ состоит в определении таких троек $(\gamma, C_1, C_2) = (\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$, для которых существуют нетривиальные функции $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям (2)–(4), где $A_1 = \bar{C}_1$, A_2 — единственное положительное решение уравнения (8) при некотором $C_2 = \bar{C}_2$, а постоянные $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ связаны соотношением (7), кроме того, u_1 , u_2 , u_3 дважды непрерывно дифференцируемы по $x \in \bar{I}$.

Замечание 1. Для полного решения задачи $\mathcal{P}$ необходимо найти три параметра: γ , C_1 , C_2 . Однако, учитывая связь между постоянными (7), можно говорить о том, что задача $\mathcal{P}$ является двухпараметрической. Первый искомый параметр — постоянная γ — спектральный, второй искомый параметр — одна из постоянных C_1 , C_2 . Для определённости вторым параметром будем считать постоянную C_1 , параметр C_2 тогда определяется по формуле

$$C_2(C_1) = \sqrt{C^2 - C_1^2} > 0. \quad (9)$$

Замечание 2. Несмотря на то что функции u_1 , u_2 , u_3 связаны условием (7), первое уравнение в (1) можно изучать отдельно от второго и третьего уравнений (1), и поэтому задача $\mathcal{P}$ разбивается на две: задача $\mathcal{P}_1$ для функции u_1 и параметров γ , C_1 ; задача $\mathcal{P}_2$ для функций u_2 , u_3 и параметров γ , $C_2 = C_2(C_1)$. Подчеркнём, что параметр γ входит как в задачу $\mathcal{P}_1$, так и в задачу $\mathcal{P}_2$, а параметр C_2 в задаче $\mathcal{P}_2$ определяется по формуле (9) через параметр C_1 , относящийся к задаче $\mathcal{P}_1$.

Для исследования задачи $\mathcal{P}$ будет модифицирован метод интегрального характеристического уравнения [16]. Для того чтобы записать систему интегральных характеристических уравнений для задачи $\mathcal{P}$ в п. 2 получим интегральное характеристическое уравнение (ИХУ) для задачи $\mathcal{P}_1$ и докажем ряд свойств данной задачи, в п. 3 найдём ИХУ для задачи $\mathcal{P}_2$ и докажем часть похожих свойств данной задачи, в п. 4, используя полученные результаты, исследуем основную задачу $\mathcal{P}$. В п. 5 будет представлено обоснование рассматриваемой задачи с физической точки зрения.

2. ЗАДАЧА $\mathcal{P}_1$

Чтобы воспользоваться методом интегрального характеристического уравнения [16], введём следующие обозначения:

$$\tau_1 = u_1^2, \quad \eta_1 = \frac{u_1'}{u_1}, \quad (10)$$

где $\tau_1 \equiv \tau_1(x; \gamma, C_1)$, $\eta_1 \equiv \eta_1(x; \gamma, C_1)$.

Теперь первое уравнение системы (1) можно представить в виде

$$\tau_1' = 2\tau_1\eta_1, \quad \eta_1' = -(\eta_1^2 + a - \gamma^2 + \alpha\tau_1), \quad (11)$$

а первый интеграл (5) будет следующим:

$$0.5\alpha\tau_1^2 + (\eta_1^2 + a - \gamma^2)\tau_1 = C_1^2. \quad (12)$$

По определению $\tau_1 \geq 0$, тогда из (12) можно выразить τ_1 как

$$\tau_1 = \frac{-(\eta_1^2 + a - \gamma^2) + \sqrt{(\eta_1^2 + a - \gamma^2)^2 + 2\alpha C_1^2}}{\alpha}.$$

Используя последнее выражение, из второго уравнения системы (11) получаем

$$\eta_1' = -\sqrt{(\eta_1^2 + a - \gamma^2)^2 + 2\alpha C_1^2}. \quad (13)$$

Следовательно, $\eta_1' < 0$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_1 \in \mathbb{R}_+$. Тогда можно говорить о том, что функция $\eta_1(x)$ монотонно убывает при $x \in I$. Из определения η_1 (вторая формула в (10)) видно, что для непрерывности $\eta_1(x)$ необходимо, чтобы функция u_1 не обращалась в нуль. Если u_1 имеет $n_1 \geq 0$ нулей $x_{1,i} \in I$, $i = \overline{1, n_1}$, то $\eta_1(x)$ имеет n_1 точек разрыва $x_{1,i}$, $i = \overline{1, n_1}$. В случае когда функция u_1 не имеет нулей при $x \in I$, значение $n_1 = 0$.

Из классических результатов о (локальном) существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения следует, что если решение u_1 задачи Коши для первого уравнения системы (1) с начальными условиями (2) в какой-то точке обращается в нуль вместе со своей производной u_1' [18, с. 73], то $u_1(x) \equiv 0$. Отсюда можно заключить, что $u_1'(x_{1,i}) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n_1}$, при этом все точки разрыва являются точками разрыва второго рода.

Из условий (2), (3) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \tau_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \eta_1(x) = +\infty. \quad (14)$$

Учитывая монотонное убывание функции $\eta_1(x)$, получаем в точках разрыва условия

$$\lim_{x \rightarrow x_{1,i} \pm 0} \tau_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_{1,i} \pm 0} \eta_1(x) = \pm\infty, \quad i = \overline{1, n_1}. \quad (15)$$

Применив граничное условие (4), имеем

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \tau_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow h-0} \eta_1(x) = -\infty. \quad (16)$$

Подчеркнём, что равенства (16) выполняются только на решениях задачи $\mathcal{P}_1$.

Пусть $I_{1,i} = (x_{1,i}, x_{1,i+1})$, где $i = \overline{0, n_1}$, $x_{1,0} = 0$, $x_{1,n_1+1} = h$; если $n_1 = 0$, то $I_{1,0} = I$. Таким образом, на каждом интервале $I_{1,i}$ функции $\tau_1(x)$, $\eta_1(x)$ можно определить как решения уравнения (12) с подходящими условиями, выбранными из (14)–(16).

Для дальнейшего описания интегральной характеристической функции удобно использовать обозначение

$$T_1(\gamma, C_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \gamma, C_1)}, \quad (17)$$

где $w_1 \equiv w_1(\eta_1; \gamma, C_1)$ — правая часть уравнения (13), взятая с противоположным знаком, т.е.

$$w_1(\eta_1; \gamma, C_1) \equiv \sqrt{(\eta_1^2 + a - \gamma^2)^2 + 2\alpha C_1^2}.$$

Имеет место следующее

Утверждение 1. *Задача Коши для уравнения*

$$u_1'' - \gamma^2 u_1 = -a u_1 - \alpha u_1^3 \quad (18)$$

с начальными условиями (2) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, её (классическое) решение $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$ непрерывно зависит от точки $(x, \gamma, C_1) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и справедливо соотношение

$$n_1 T_1(\gamma, C_1) + \int_{\eta_1(h)}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \gamma, C_1)} = h, \quad (19)$$

где $n_1 \geq 0$ — число нулей функции $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$, лежащих в I .

Доказательство. Учтём, что $w_1(\eta_1; \gamma, C_1) > 0$. Тогда, интегрируя уравнение (13) при условиях (14), (15) на каждом интервале $I_{1,i}$, $i = \overline{1, n_1}$, получаем систему (выводится аналогично как в работе [16])

$$\begin{aligned} 0 < x_{1,1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{1,1}(s; \gamma, C_1)}, \quad 0 < x_{1,i} - x_{1,i-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{1,i}(s; \gamma, C_1)}, \quad i = \overline{2, n_1}; \\ 0 < h - x_{n_1} &= \int_{-\infty}^{\eta_1(h)} \frac{ds}{w_{1,n_1+1}(s; \gamma, C_1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Левые части в (20) конечны, поэтому и правые части в (20) конечны, а это означает сходимость всех несобственных интегралов в (20). Последнее влечет существование $\eta_1 \equiv \eta_1(x)$ на каждом интервале $I_{1,i}$, $i = \overline{1, n_1}$.

Из соотношений (12) следует, что при фиксированных γ, C_1 переменные u_1, u_1' ограничены.

Учитывая существование функции $\eta_1 \equiv \eta_1(x)$ и ограниченность функций u_1, u_1' , приходим к выводу, что функции u_1, u_1' определены для всех $x \in \bar{I}$. Другими словами, доказано, что решение $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$ задачи Коши (18), (2) существует и определено глобально при $x \in \bar{I}$. Единственность этого решения и его непрерывность (и дифференцируемость) по $x \in \bar{I}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_1 \in \mathbb{R}_+$ являются результатом гладкости уравнения (18) относительно u_1, γ, C_1 [19, с. 22; 20, с. 19].

Просуммировав уравнения в (20), получим

$$x_{1,1} + x_{1,2} - x_{1,1} + x_{1,3} - x_{1,2} + \dots + x_{1,n_1} - x_{1,n_1-1} + h - x_{1,n_1} = n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \gamma, C_1)} + \int_{\eta_1(h)}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \gamma, C_1)}.$$

Формула (19) легко выводится из найденных соотношений. Утверждение доказано.

Важно заметить, что в утверждении 1 значение $\eta_1(h)$ не обязательно равно $-\infty$.

Используя второе условие (16) для соотношения (19), получаем ИХУ, для которого справедлива

Теорема 1. *Пара $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1)$ является решением задачи $\mathcal{P}_1$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $\bar{n}_1 \geq 0$ такие, что $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$ удовлетворяют уравнению*

$$\Phi_1(\gamma, C_1; n_1) \equiv (n_1 + 1)T_1(\gamma, C_1) = h \quad (21)$$

при $n_1 = \bar{n}_1$. В этом случае собственная функция $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, соответствующая решению $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, имеет $\bar{n}_1$ простых нулей $x_{1,i} = iT_1(\gamma, \bar{C}_1) \in I$, $i = \overline{1, \bar{n}_1}$.

Доказательство. Выше было показано (см. второе уравнение (16)), что

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \eta_1(x) = -\infty.$$

Учитывая найденный предел, ИХУ (21) получается из формулы (19).

Из вычислений, проведённых при доказательстве утверждения 1, следует, что любое решение задачи $\mathcal{P}_1$ удовлетворяет (21) при некотором $n_1 = \bar{n}_1$. Тот факт, что любое решение $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$ уравнения (21) является решением $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1)$ задачи $\mathcal{P}_1$, доказывается аналогично тому, как это сделано в [15].

Формула для нулей $x_{1,i}$ собственной функции u_1 получается из формулы (20). Теорема доказана.

Для установления разрешимости основной задачи $\mathcal{P}$ необходимы результаты о свойствах функции T_1 , которые изложены ниже. Отметим, что чёрточки над символами ниже могут быть опущены.

Утверждение 2. Для любого фиксированного $C_1 \in \mathbb{R}_+$ справедливы свойства

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}_+} T_1(\gamma, C_1) = \delta_1, \quad (22)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} T_1(\gamma, C_1) = 0, \quad (23)$$

где $\delta_1 = \delta_1(C_1)$ является положительной величиной.

Доказательство. Начнём с обоснования формулы (22). Рассуждения выше показывают положительность w_1 . Тогда по определению T_1 , которое представлено формулой (17), подынтегральные выражения в T_1 также положительны. Следовательно, $T_1 > 0$ и можно найти его максимальное значение, которое обозначим через δ_1 . При этом заметим, что δ_1 непрерывно зависит от $C_1 \in (0, C)$.

Докажем формулу (23). Для этого сначала выясним поведение T_1 при $\gamma \rightarrow +\infty$; считаем, что $\gamma^2 > a + \sqrt{2\alpha}C_1$.

Далее нам необходимо неравенство

$$\frac{1}{|a_1| + a_2} \leq \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{|a_1| + a_2}, \quad a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \in \mathbb{R}_+. \quad (24)$$

Используя (24) и формулу (17), получаем следующую оценку для T_1 :

$$2\bar{T}_1(\gamma, C_1) \leq T_1(\gamma, C_1) \leq 2\sqrt{2}\bar{T}_1(\gamma, C_1), \quad (25)$$

где

$$\bar{T}_1(\gamma, C_1) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + a - \gamma^2| + \sqrt{2\alpha}C_1}. \quad (26)$$

Введём обозначение для точки $s_* = \sqrt{\gamma^2 - a}$. Тогда интеграл $\bar{T}_1(\gamma, C_1)$, определяемый формулой (26), можно записать в виде

$$\bar{T}_1(\gamma, C_1) = \int_0^{s_*} \frac{ds}{\gamma^2 - a + \sqrt{2\alpha}C_1 - s^2} + \int_{s_*}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\gamma^2 - a - \sqrt{2\alpha}C_1)} = I_1 + I_2$$

и справедливо соотношение

$$2(I_1 + I_2) \leq T_1(\gamma, C_1) \leq 2\sqrt{2}(I_1 + I_2) \quad (27)$$

при условии $\gamma^2 > a + \sqrt{2\alpha}C_2$.

Далее вычислим интегралы I_1 и I_2 :

$$I_1 = \int_0^{s_*} \frac{ds}{\gamma^2 - a + \sqrt{2\alpha C_1} - s^2} = \frac{2 \ln \left(\sqrt{\gamma^2 - a + \sqrt{2\alpha C_1}} + \sqrt{\gamma^2 - a} \right) - \ln(\sqrt{2\alpha C_1})}{2\sqrt{\gamma^2 - a + \sqrt{2\alpha C_1}}}, \quad (28)$$

$$I_2 = \int_{s_*}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\gamma^2 - a - \sqrt{2\alpha C_1})} = \frac{2 \ln \left(\sqrt{\gamma^2 - a - \sqrt{2\alpha C_1}} + \sqrt{\gamma^2 - a} \right) - \ln(\sqrt{2\alpha C_1})}{2\sqrt{\gamma^2 - a - \sqrt{2\alpha C_1}}}. \quad (29)$$

Учитывая (28) и (29), приходим к оценкам

$$I_1 = O\left(\frac{\ln \gamma}{\gamma}\right) \quad \text{и} \quad I_2 = O\left(\frac{\ln \gamma}{\gamma}\right) \quad (30)$$

для достаточно больших положительных γ . Ясно, что $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} I_1 = 0$ и $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} I_2 = 0$.

Оценки для интегралов I_1 и I_2 (30) и неравенства (27) доказывают справедливость формулы (23) при $\gamma \rightarrow +\infty$. Утверждение доказано.

Используя утверждение 2, можно получить

Утверждение 3. Для любого $C_1 \in \mathbb{R}_+$ существует целое число $n_1^0 \geq 0$ такое, что уравнение (21) имеет хотя бы одно положительное решение $\gamma = \bar{\gamma}_{n_1}$ для каждого $n_1 = n_1^0, n_1^0 + 1, \dots$, где $\bar{\gamma}_{n_1}$ зависит от C_1 и n_1 . Кроме того,

$$\lim_{n_1 \rightarrow +\infty} \bar{\gamma}_{n_1} = +\infty.$$

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно использовать свойства, описанные в утверждении 2. Действительно, всегда найдётся такое целое число n_1^0 , что для заданного положительного значения h справедливо неравенство $(n_1 + 1)\delta_1 > h$ при $n_1 = n_1^0, n_1^0 + 1, \dots$ (см. формулу (22)). В свою очередь, формула (23) приводит к тому, что $(n_1 + 1)T_1(\gamma, C_1) \rightarrow +0$ при $\gamma \rightarrow +\infty$ для любых $n_1 = n_1^0, n_1^0 + 1, \dots$. Утверждение доказано.

На рис. 1 при $j = 1$ представлена геометрическая интерпретация рассуждений, описанных при доказательстве утверждения 3.

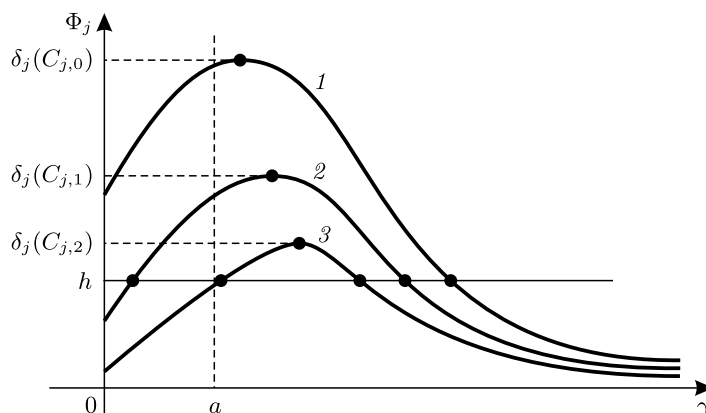


Рис. 1. Графики зависимости Φ_j от γ для различных значений C_j : 1 — $C_j = C_{j,0}$, 2 — $C_j = C_{j,1}$, 3 — $C_j = C_{j,2}$, $0 < C_{j,0} < C_{j,1} < C_{j,2} < C$. Значение $n_j, j = 1, 2$, фиксировано.

Установим ещё некоторые свойства интеграла $T_1(\gamma, C_1)$.

Утверждение 4. Пусть $\delta_1(C_1) = \max_{\gamma \in \mathbb{R}_+} T_1(\gamma, C_1)$, где $C_1 \in \mathbb{R}_+$. Справедливо следующее свойство:

$$\lim_{C_1 \rightarrow +0} \delta_1(C_1) = +\infty. \quad (31)$$

Доказательство. Начнём доказательство с того, что зафиксируем значение $\gamma = \sqrt{a}$. При этом справедливо условие $T_1(\sqrt{a}, C_1) \leq \delta_1(C_1)$. Учитывая (25) и вычисляя T_1 и $\bar{T}_1$ при $\gamma = \sqrt{a}$, получаем

$$2\bar{T}_1(\sqrt{a}, C_1) \leq T_1(\sqrt{a}, C_1) \leq \delta_1(C_1), \quad (32)$$

где

$$\bar{T}_1(\sqrt{a}, C_1) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{2a}C_1} = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}\sqrt{C_1}}. \quad (33)$$

Из (33) следует, что $\lim_{C_1 \rightarrow +0} \bar{T}_1(\sqrt{a}, C_1) = +\infty$. Из формул (32) и (33) вытекает требуемое свойство (31). Утверждение доказано.

Продолжим изучение задачи $\mathcal{P}_1$. Рассмотрим функцию $\gamma \equiv \gamma(C_1; n_1)$. Важно установить поведение решения $\gamma \equiv \gamma(C_1; n_1)$ уравнения $\bar{\Phi}_1(\gamma, C_1; n_1) = h$ при $C_1 \rightarrow +0$.

Утверждение 5. Пусть $\gamma \equiv \gamma(C_1; n_1)$ — решение уравнения $\bar{\Phi}_1(\gamma, C_1; n_1) = h$. Существует целое число $n'_1 \geq 0$ такое, что справедлива формула

$$\lim_{C_1 \rightarrow +0} \gamma(C_1; n_1) = +\infty \quad (34)$$

для каждого $n_1 = n'_1, n'_1 + 1, \dots$

Доказательство. Воспользуемся результатами, полученными при доказательстве утверждения 2, в частности, оценками (25) и (27) интеграла $T_1(\gamma, C_1)$, где интегралы I_1 и I_2 , содержащиеся в оценке (27), были вычислены явно в виде (28) и (29). Результаты расчётов показывают, что значения I_1 и I_2 увеличиваются при уменьшении $C_1 > 0$, следовательно, снижение значения C_1 влечёт рост значения γ . Важно отметить, что C_1 и γ при этом остаются положительными. Проведённые рассуждения доказывают свойство (34). Утверждение доказано.

3. ЗАДАЧА $\mathcal{P}_2$

Введём новые переменные

$$\tau_2 = u_2^2 + u_3^2, \quad \eta_2 = (a + \alpha\tau_2) \frac{u_2}{u_3}, \quad (35)$$

где $\tau_2 \equiv \tau_2(x; \gamma, C_2)$, $\eta_2 \equiv \eta_2(x; \gamma, C_2)$.

Используя переменные (35), перепишем второе и третье уравнения системы (1) в виде

$$\tau'_2 = 2 \frac{(a + \alpha\tau_2)^2(2\gamma^2 - a - \alpha\tau_2)\tau_2\eta_2}{\gamma(a + \alpha\tau_2)((a + \alpha\tau_2)^2 + \eta_2^2) + 2\alpha\tau_2\eta_2^2}, \quad \eta'_2 = \frac{\gamma(a + \alpha\tau_2)^2 + \gamma^{-1}(a - \gamma^2 + \alpha\tau_2)\eta_2^2}{a + \alpha\tau_2}, \quad (36)$$

а первый интеграл (6) как

$$\eta_2^2 = \frac{(a + \alpha\tau_2)^2(0.5\alpha\gamma^2\tau_2^2 + a\gamma^2\tau_2 - C_2^2)}{(a + \alpha\tau_2)(2\gamma^2 - (a + \alpha\tau_2))\tau_2 - (0.5\alpha\gamma^2\tau_2^2 + a\gamma^2\tau_2 - C_2^2)}. \quad (37)$$

Строгая положительность функции η'_2 при $0 < \gamma^2 \leq a$ очевидна. Чтобы доказать её при всех $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_2 \in \mathbb{R}_+$, необходимо показать, что η'_2 не обращается в нуль в какой-либо точке. Предположим противное, тогда из второго уравнения в (36) получим

$$\eta_2^2 = -\gamma^2 \frac{(a + \alpha\tau_2)^2}{a - \gamma^2 + \alpha\tau_2}.$$

Подставив это выражение в (37) и преобразовав, найдём $C_2^2 = -0.5\alpha\gamma^2\tau_2^2$. Учитывая, что $\alpha > 0$, получаем противоречие, следовательно, $\eta'_2 > 0$ при любых $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_2 \in \mathbb{R}_+$.

Строгая положительность функции η'_2 влечёт монотонное возрастание $\eta_2(x)$ при $x \in I$, при этом точки разрыва функции $\eta_2(x)$ совпадают с нулями функции $u_3(x)$ по определению η_2 , данному во второй формуле (35), и с учётом непрерывности решений u_2 и u_3 при $x \in I$. В то же время все точки разрыва являются точками разрыва второго рода. Если u_3 имеет $n_2 \geq 0$ нулей $x_{2,i} \in I$, $i = \overline{1, n_2}$, то $\eta_2(x)$ имеет n_2 точек разрыва $x_{2,i}$, $i = \overline{1, n_2}$. В случае когда функция u_3 не имеет нулей при $x \in I$, значение $n_2 = 0$.

Из условий (2), (3) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \tau_2(x) = A_2^2, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \eta_2(x) = -\infty. \quad (38)$$

Учитывая монотонное возрастание функции $\eta_2(x)$, получаем следующие условия в точках разрыва:

$$\lim_{x \rightarrow x_{2,i} \pm 0} \eta_2(x) = \mp \infty, \quad i = \overline{1, n_1}. \quad (39)$$

Применив граничное условие (4), имеем

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \eta_2(x) = +\infty. \quad (40)$$

Отметим, как и в случае задачи $\mathcal{P}_1$, что равенство (40) выполняется только на решениях задачи $\mathcal{P}_2$.

Пусть $I_{2,i} = (x_{2,i}, x_{2,i+1})$, где $i = \overline{0, n_2}$, $x_{2,0} = 0$, $x_{2,n_2+1} = h$; если $n_2 = 0$, то $I_{2,0} = I$.

Таким образом, на каждом интервале $I_{2,i}$ функции $\tau_2(x)$, $\eta_2(x)$ можно определить как решения уравнения (37) с подходящими условиями, выбранными из (38)–(40).

Аналогично тому как это сделано для задачи $\mathcal{P}_1$, будем использовать обозначение

$$T_2(\gamma, C_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_2(s; \gamma, C_2)},$$

где $w_2 \equiv w_2(\tau_2, \eta_2; \gamma, C_2)$ — правая часть второго уравнения в (36), т.е.

$$w_2(\tau_2, \eta_2; \gamma, C_2) = \frac{\gamma(a + \alpha\tau_2)^2 + \gamma^{-1}(a - \gamma^2 + \alpha\tau_2)\eta_2^2}{a + \alpha\tau_2}, \quad (41)$$

где η_2 и τ_2 связаны выражением (37).

Имеет место следующее

Утверждение 6. *Задача Коши для системы*

$$\gamma^2 u_2 - \gamma u'_3 = a u_2 + \alpha(u_2^2 + u_3^2) u_2, \quad -\gamma u'_2 + u''_3 = -a u_3 - \alpha(u_2^2 + u_3^2) u_3 \quad (42)$$

с начальными условиями (3) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, её (классическое) решение $u_2 \equiv u_2(x; \gamma, C_2)$, $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$ непрерывно зависит от точки $(x, \gamma, C_2) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и справедливо соотношение

$$n_2 T_2(\gamma, C_2) + \int_{-\infty}^{\eta_2(h)} \frac{ds}{w_2(s; \gamma, C_2)} = h, \quad (43)$$

где $n_2 \geq 0$ — число нулей функции $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$, лежащих в I .

Доказательство. Примем во внимание, что $w_2(\eta_2; \gamma, C_2) > 0$. Тогда, интегрируя второе уравнение в (36) при условиях (38), (39) на каждом интервале $I_{2,i}$, $i = \overline{1, n_2}$, получаем систему (выводится аналогично как в работе [17])

$$\begin{aligned} 0 < x_{2,1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{2,1}(s; \gamma, C_2)}, \quad 0 < x_{2,i} - x_{2,i-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{2,i}(s; \gamma, C_2)}, \quad i = \overline{2, n_2}; \\ 0 < h - x_{n_2} &= \int_{\eta_2(h)}^{+\infty} \frac{ds}{w_{2,n_2+1}(s; \gamma, C_2)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Дальнейшие рассуждения подобны приведённым при доказательстве утверждения 1. Левые части в (44) конечны, поэтому и правые части в (44) конечны, что означает сходимость всех несобственных интегралов в (44). Последнее влечёт за собой существование $\eta_2 \equiv \eta_2(x)$ на каждом интервале $I_{2,i}$, $i = \overline{1, n_2}$.

Из соотношения (37) следует, что при фиксированных γ , C_2 переменные u_2 , u_3 ограничены.

Учитывая существование функции $\eta_2 \equiv \eta_2(x)$ и ограниченность функций u_2 , u_3 , приходим к выводу, что функции u_2 , u_3 определены для всех $x \in \bar{I}$. Другими словами, доказано, что решение $u_2 \equiv u_2(x; \gamma, C_2)$, $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$ задачи Коши (42), (3) существует и определено глобально при $x \in \bar{I}$. Единственность этого решения и его непрерывность (и дифференцируемость) по $x \in \bar{I}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_2 \in \mathbb{R}_+$ являются результатом гладкости уравнений в (1) относительно u_2 , u_3 , γ , C_2 [19, с. 22; 20, с. 19].

Просуммировав уравнения в (44), имеем

$$x_{2,1} + x_{2,2} - x_{2,1} + x_{2,3} - x_{2,2} + \dots + x_{2,n_2} - x_{2,n_2-1} + h - x_{2,n_2} = n_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_2(s; \gamma, C_2)} + \int_{-\infty}^{\eta_2(h)} \frac{ds}{w_2(s; \gamma, C_2)}.$$

Формула (43) легко получается из последнего соотношения. Утверждение доказано.

Важно отметить, что в утверждении 6 значение $\eta_2(h)$ не обязательно равно $+\infty$.

Используя условие (40) для соотношения (43), получаем ИХУ, для которого справедлива

Теорема 2. Пара $(\bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ является решением задачи $\mathcal{P}_2$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $\bar{n}_2 \geq 0$ такие, что $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_2 = \bar{C}_2$ удовлетворяют уравнению

$$\Phi_2(\gamma, C_2; n_2) \equiv (n_2 + 1)T_2(\gamma, C_2) = h \quad (45)$$

при $n_2 = \bar{n}_2$. В этом случае собственная функция $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, соответствующая решению $(\bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, имеет $\bar{n}_2$ простых нулей $x_{2,i} = iT_2(\gamma, \bar{C}_2) \in I$, $i = \overline{1, \bar{n}_2}$.

Доказательство. Рассуждения ниже подобны приведённым при доказательстве теоремы 1. Выше было показано (см. (40)), что

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \eta_2(x) = +\infty.$$

Учитывая найденный предел, ИХУ (45) получается из формулы (43).

Из вычислений, проведённых при доказательстве утверждения 6, следует, что любое решение задачи $\mathcal{P}_2$ удовлетворяет (45) при некотором $n_2 = \bar{n}_2$.

Тот факт, что любое решение $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_2 = \bar{C}_2$ уравнений (21) является решением $(\bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ задачи $\mathcal{P}_2$, доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [17].

Формулы для нулей $x_{2,i}$ собственной функции u_3 получаются из формулы (44). Теорема доказана.

Для установления разрешимости основной задачи $\mathcal{P}$ необходимы результаты о свойствах функции T_2 , подобные указанным в утверждениях 2 и 3 для функции T_1 .

Утверждение 7. Для любого фиксированного $C_2 \in \mathbb{R}_+$ справедливы свойства

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}_+} T_2(\gamma, C_2) = \delta_2, \quad (46)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} T_2(\gamma, C_2) = 0, \quad (47)$$

где $\delta_2 = \delta_2(C_2)$ является положительной величиной.

Доказательство. Начнём с обоснования формулы (46). Поскольку $w_2 > 0$, то и подинтегральное выражение в T_2 также положительно. Следовательно, $T_2 > 0$ и можно найти его максимальное значение, которое обозначим через δ_2 . При этом заметим, что δ_2 непрерывно зависит от $C_2 \in (0, C)$.

Докажем формулу (47), применяя подход, отличающийся от использованного при доказательстве формулы (23) в утверждении 2.

Из формулы (37) очевидна чётность функции $\tau_2(\eta_2; \gamma, C_2)$ относительно η_2 , следовательно, $T_2(\gamma, C_2) = 2 \int_0^{+\infty} ds/w_2(s; \gamma, C_2)$, где $T_2(\gamma, C_2)$ определена для всех $\gamma, C_2 > 0$. Кроме того, $T_2(\gamma, C_2)$ непрерывно зависит от $\gamma, C_2 > 0$, поскольку функция w_2^{-1} непрерывна по $\gamma, C_2 > 0$, где $w_2 \equiv w_2(\tau_2, s; \gamma, C_2)$ и $\tau_2 \equiv \tau_2(s; \gamma, C_2)$ определены формулами (41) и (37) соответственно.

Далее в формулах (41), (37) удобно ввести следующую замену: $\bar{\tau}_2 = \gamma^{-2}(a + \alpha\tau_2)$, $\bar{s} = \gamma^{-2}s$. Тогда

$$w_2(\bar{s}; \gamma, C_2) = \gamma^3 \frac{\bar{\tau}_2^2 + (\bar{\tau}_2 - 1)\bar{s}^2}{\bar{\tau}_2}, \quad (48)$$

где $\bar{\tau}_2 \equiv \bar{\tau}_2(\bar{s})$, и

$$\bar{s}^2 = \frac{\bar{\tau}_2^2 (\bar{\tau}_2^2 - (\bar{C}_2 + \bar{a}^2))}{2\bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - (\bar{\tau}_2^2 - (\bar{C}_2 + \bar{a}^2))}; \quad (49)$$

здесь $\bar{C}_2 = 2\alpha C_2 \gamma^{-6}$, $\bar{a} = a\gamma^{-2}$.

Подставив $\bar{s}^2$ из (49) в (48), получим

$$w_2(\bar{s}; \gamma, C_2) = \gamma^3 \bar{\tau}_2 \frac{(2 - \bar{\tau}_2)(2\bar{\tau}_2(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - \bar{\tau}_2^2 + \bar{C}_2 + \bar{a}^2)}{2\bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - (\bar{\tau}_2^2 - \bar{C}_2 - \bar{a}^2)}.$$

Пусть $Q = \bar{\tau}_2^2 - (\bar{C}_2 + \bar{a}^2)$, $q = \bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(\bar{\tau}_2 - \bar{a})$, тогда

$$d\bar{s} = \frac{1}{2\bar{s}} \left(\frac{\bar{\tau}_2^2 Q}{2q - Q} \right)' d\bar{\tau}_2,$$

где $(\cdot)' = d/d\bar{\tau}_2$. Учитывая введённые обозначения и то, что

$$\left(\frac{\bar{\tau}_2^2 Q}{2q - Q} \right)' = 2\bar{\tau}_2 \frac{(Q + \bar{\tau}_2^2)(2q - Q) - \bar{\tau}_2 Q(q' - \bar{\tau}_2)}{(2q - Q)^2},$$

интеграл T_2 можно записать в виде

$$T_2(\gamma, C_2) = \frac{2}{\gamma} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{(Q + \bar{\tau}_2^2)(2q - Q) - \bar{\tau}_2 Q(q' - \bar{\tau}_2)}{\bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(2\bar{\tau}_2(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - Q) \sqrt{Q} \sqrt{2q - Q}} d\bar{\tau}_2,$$

где $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_-$ — (единственное) положительное решение уравнения $Q = 0$, равное $\sqrt{\bar{C}_2 + \bar{a}^2}$, а $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_+$ — максимальное положительное решение уравнения $2q - Q = 0$. Выбор максимального

решения во втором случае обусловлен тем, что подкоренные выражения в $T_2(\gamma, C_2)$ должны оставаться положительными.

Далее необходимо найти асимптотики $\bar{\tau}_-$ и $\bar{\tau}_+$ при больших значениях γ .

Для вычисления $\bar{\tau}_+$ сначала перейдём к пределу при $\gamma \rightarrow \infty$ в $2q - Q$. Получим уравнение

$$\bar{\tau}_2^2(3 - 2\bar{\tau}_2) = 0,$$

максимальное решение которого $\bar{\tau}_2 = 3/2$ можно рассматривать как первое приближение к $\bar{\tau}_+$. Таким образом,

$$\bar{\tau}_- = a\gamma^{-2} + O(\gamma^{-4}) \quad \text{и} \quad \bar{\tau}_+ = 3/2 + O(\gamma^{-2}).$$

Перепишем полученный интеграл в следующем виде:

$$T_2(\gamma, C_2) = \frac{2}{\gamma} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2)}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} d\bar{\tau}_2,$$

где

$$g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2) = \frac{(Q + \bar{\tau}_2^2)(2q - Q) - \bar{\tau}_2 Q(q' - \bar{\tau}_2)}{\bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(2\bar{\tau}_2(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - Q)\sqrt{2q - Q}}.$$

Заметим, что

$$g_0(\bar{\tau}_2) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2) = \frac{3 - \bar{\tau}_2}{(2 - \bar{\tau}_2)\sqrt{3 - 2\bar{\tau}_2}} \quad \text{и} \quad g_0(\bar{\tau}_-) = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\gamma^{-2}).$$

Далее получим

$$T_2(\gamma, C_2) = \frac{2}{\gamma} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2) - g_0(\bar{\tau}_-)}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} d\bar{\tau}_2 + \frac{2}{\gamma} g_0(\bar{\tau}_-) \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{d\bar{\tau}_2}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} = \frac{2}{\gamma} I_3 + \frac{2}{\gamma} g_0(\bar{\tau}_-) I_4. \quad (50)$$

Сначала оценим интеграл I_3 :

$$I_3 = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{g(\bar{\tau}_2; \gamma) - g_0(\bar{\tau}_-)}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} d\bar{\tau}_2 + O(\gamma^{-r}),$$

где $r > 0$. Первое слагаемое в последней формуле даёт

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2) - g_0(\bar{\tau}_-)}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} d\bar{\tau}_2 &= \int_0^{3/2} \frac{g_0(\bar{\tau}_2) - g_0(0)}{\bar{\tau}_2} d\bar{\tau}_2 = \\ &= \int_0^{3/2} \frac{1}{\bar{\tau}_2} \left(\frac{3 - \bar{\tau}_2}{(2 - \bar{\tau}_2)\sqrt{3 - 2\bar{\tau}_2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) d\bar{\tau}_2 = \sqrt{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Интеграл I_4 вычисляется точно в виде

$$I_4 = \ln(\bar{\tau}_+ + \sqrt{\bar{\tau}_+^2 - \bar{\tau}_-^2}) - \ln \bar{\tau}_- = 2 \ln \gamma + \ln 3 - \ln a + O(\gamma^{-2}).$$

Учитывая полученные результаты для интегралов I_3 , I_4 и формулу (50), имеем

$$T_2(\gamma, C_2) = 2\sqrt{3} \frac{\ln \gamma}{\gamma} + O(\gamma^{-1}). \quad (51)$$

Из формулы (51) следует, что (47) справедливо при $\gamma \rightarrow +\infty$. Утверждение доказано.

Используя утверждение 7, аналогично тому как это было сделано для утверждения 3, можно получить

Утверждение 8. Для любого $C_2 \in \mathbb{R}_+$ существует целое число $n_2^0 \geq 0$ такое, что уравнение (45) имеет хотя бы одно положительное решение $\gamma = \bar{\gamma}_{n_2}$ для каждого $n_2 = n_2^0, n_2^0 + 1, \dots$, где $\bar{\gamma}_{n_2}$ зависит от C_2 и n_2 . Кроме того,

$$\lim_{n_2 \rightarrow +\infty} \bar{\gamma}_{n_2} = +\infty.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно использовать свойства, описанные в утверждении 7. Действительно, всегда найдётся такое целое число n_2^0 , что для заданного положительного значения h будет справедливо неравенство $(n_2 + 1)\delta_2 > h$ при $n_2 = n_2^0, n_2^0 + 1, \dots$ (см. формулу (46)). В свою очередь, формула (47) приводит к тому, что $(n_2 + 1)T_2(\gamma, C_2) \rightarrow +0$ при $\gamma \rightarrow +\infty$ для любых $n_2 = n_2^0, n_2^0 + 1, \dots$. Утверждение доказано.

При $j = 2$ на рис. 1 представлена геометрическая интерпретация описанных при доказательстве утверждения 8 рассуждений, аналогичная случаю $j = 1$.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ $\mathcal{P}$

В пп. 2, 3 задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ были исследованы независимо друг от друга, но, вообще говоря, они связаны условием (7). Вернёмся теперь к задаче $\mathcal{P}$.

Имеет место следующее

Утверждение 9. Задача Коши (1)–(3) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, её (классическое) решение $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$, $u_2 \equiv u_2(x; \gamma, C_2)$, $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$ непрерывно зависит от точки $(x, \gamma, C_j) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $j = 1, 2$, и справедливы соотношения (19), (43), где $n_1 \geq 0$ — число нулей функции $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$, лежащих в I , $n_2 \geq 0$ — число нулей функции $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$, лежащих в I .

Для доказательства утверждения 9 достаточно объединить рассуждения, данные при доказательстве утверждений 1 и 6.

Объединив полученные ранее ИХУ (21) и (45) в систему с учётом условия (7), сформулируем следующий результат.

Теорема 3. Тройка $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ является решением задачи $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $\bar{n}_1 \geq 0$, $\bar{n}_2 \geq 0$ такие, что $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$ и $C_2 = \bar{C}_2(\bar{C}_1)$ (где $\bar{C}_2$ зависит от $\bar{C}_1$, см. (9)) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\Phi_1(\gamma, C_1; n_1) \equiv (n_1 + 1)T_1(\gamma, C_1) = h, \quad \Phi_2(\gamma, C_2; n_2) \equiv (n_2 + 1)T_2(\gamma, C_2) = h \quad (52)$$

при $n_1 = \bar{n}_1$, $n_2 = \bar{n}_2$. В этом случае собственные функции $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, соответствующие решению $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$, имеют $\bar{n}_j$ простых нулей

$$x_{j,i} = iT_j(\gamma, \bar{C}_j) \in I, \quad i = \overline{1, \bar{n}_j}, \quad j = 1, 2.$$

Справедливость теоремы 3 следует из теорем 1 и 2 с учётом условия (7).

Теперь можно доказать основной результат данной работы о разрешимости задачи $\mathcal{P}$.

Теорема 4 (о разрешимости задачи $\mathcal{P}$). Для любого заданного конечного целого числа $n > 0$ существует не менее n решений $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ задачи $\mathcal{P}$, где $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ определяется формулой (9).

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ — решение первого уравнения системы (52) при $n_1 = \bar{n}_1$, а $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ — минимальное и максимальное значения $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ при $C_1 \in (0, C)$. В утверждении 5 было представлено свойство функции $\gamma \equiv \gamma(C_1; n_1)$ (34), из которого следует, что $\gamma_{\max} = +\infty$. Заметим, что функция $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ не обязательно непрерывна относительно C_1 для всех $C_1 \in (0, C)$ и, кроме того, может не существовать для некоторых интервалов $(C'_1, C''_1) \subset (0, C)$. Все это можно установить из рис. 1.

Выше было показано, что $\gamma_{\max} = +\infty$, следовательно, $\gamma'_{\min}$ можно выбрать из следующих соображений. Пусть $(0, C_*)$ — максимальный интервал, на котором функция $\gamma(C_1; \bar{n}_1)$ непрерывна относительно $C_1 \in (0, C_*)$, где $C_* \leq C$, тогда считаем, что $\gamma'_{\min}$ — минимальное значение $\gamma(C_1; \bar{n}_1)$ при $C_1 \in (0, C_*)$. Важно отметить, что существование C_* всегда возможно. Пусть также (C^*, C) — максимальный интервал, для которого функция $\gamma(C_1; \bar{n}_1)$ непрерывна относительно $C_1 \in (C^*, C)$, где $C_* \leq C^*$, тогда считаем, что $\gamma'_{\max}$ — максимальное значение $\gamma(C_1; \bar{n}_1)$ при $C_1 \in (C^*, C)$ (рис. 2). Интервал $\Lambda^- = (\gamma_{\min}, \gamma'_{\max})$ всегда остаётся ограниченным, интервал $\Lambda^+ = (\gamma'_{\min}, \gamma_{\max})$ можно сделать сколь угодно большим.

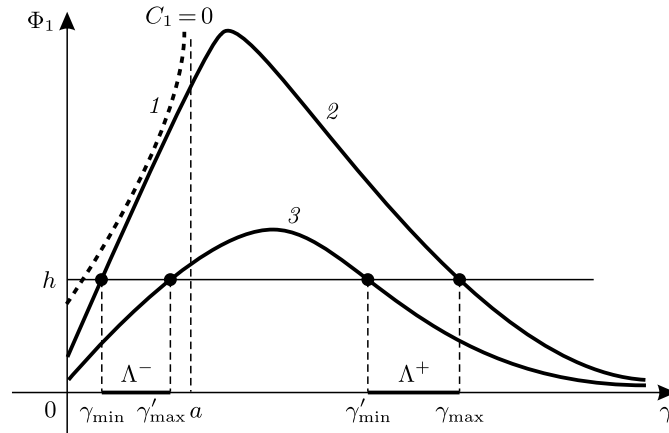


Рис. 2. Графики зависимости Φ_1 от γ для различных значений C_1 : 1 — $C_1 = 0$; 2 — C_1 вблизи 0; 3 — $C_1 = C$. Значение n_1 фиксировано.

Далее необходимо показать, что существуют $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ и $C_2 = C_2(C_1)$, удовлетворяющие (7), такие, что выполняется второе уравнение в системе (52) при некотором $n_2 = \bar{n}_2$.

Подставив $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ и $C_2 = C_2(C_1)$, где C_2 определяется по формуле (9) и $C_1 \in (0, C_*)$, в $T_2 = T_2(\gamma(C_1; \bar{n}_1), C_2(C_1))$, оценим его минимальное и максимальные значения.

Итак, пусть

$$T_{\min} = \min_{C_2(C_1)} T_2(\gamma(C_1; \bar{n}_1), C_2(C_1)) \text{ и } T_{\max} = \max_{C_2(C_1)} T_2(\gamma(C_1; \bar{n}_1), C_2(C_1)) \quad (53)$$

при $C_1 \in (0, C_*)$; в данном случае $\gamma(C_1; \bar{n}_1) \in (\gamma'_{\min}, \gamma_{\max})$.

Прежде всего заметим, что всегда $T_{\min} < h$. Для доказательства данного факта используем свойство (47) из утверждения 7, из которого следует, что при достаточно больших $\gamma = \gamma(C_1, n_1)$ можно получить достаточно малые значения $T_{\min}$. В утверждении 5 было представлено свойство (34) функции $\gamma(C_1, n_1)$, показывающее стремление $\gamma = \gamma(C_1, n_1)$ к $+\infty$ при достаточно малых C_1 . Однако в этом случае C_1 не стремится к нулю. Тогда получаем, что при достаточно больших γ функция T_1 будет меньше h .

Далее необходимо отдельно рассмотреть два возможных случая. Во-первых, возможно, что $T_{\min} < h < T_{\max}$. Тогда из непрерывной зависимости γ и C_2 от C_1 и непрерывной зависимости T_2 от γ и C_2 вытекает, что существует $\bar{C}_1 \in (0, C_*)$ такое, что для $\bar{\gamma} = \gamma(\bar{C}_1; \bar{n}_2)$ и $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ верно, что $T_2(\bar{\gamma}, \bar{C}_1) = h$. Следовательно, существует решение $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ системы (21) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = 0$. Во-вторых, возможно, что $T_{\max} < h$. Тогда найдётся целое число $\bar{n}_2$ такое, что

$$(\bar{n}_2 + 1)T_{\min} < h < (\bar{n}_2 + 1)T_{\max}.$$

Существование значения $\bar{C}_1 \in (0, C_*)$ такого, что для $\bar{\gamma} = \gamma(\bar{C}_1; \bar{n}_1)$ и $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ справедливо равенство $(\bar{n}_2 + 1)T_2(\bar{\gamma}, \bar{C}_2) = h$, следует из аналогичных первому случаю рассуждений. Таким образом, получаем решение $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ системы (21) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = \bar{n}_2$.

На рис. 3 видно, что Φ_2 изменяется от $h_{\min}$ до $h_{\max}$ при изменении C_2 от $C_2 = C_2|_{C_1=C}$ до $C_2 = C_2|_{C_1=0}$, где $h_{\max} = (\bar{n}_2 + 1)T_{\max}$ и $h_{\min} = (\bar{n}_2 + 1)T_{\min}$ (см. формулы (53)). В этом случае значение γ относительно C_1 меняется с $\gamma'_{\min}$ на $\gamma_{\max}$. Теорема доказана.

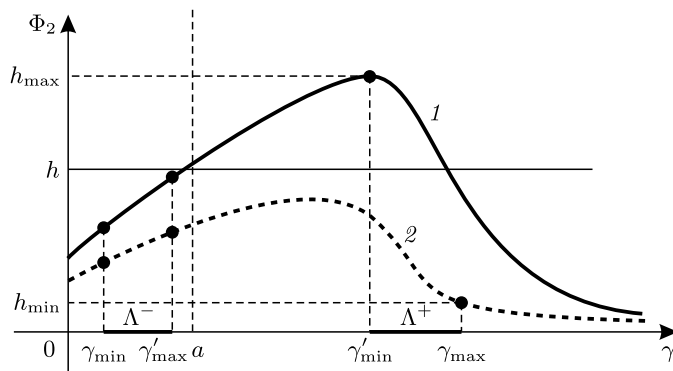


Рис. 3. Графики зависимости Φ_2 от γ для фиксированного n_2 : 1 — минимально возможное значение $C_2 = C_2|_{C_1=C_*}$; 2 — максимально возможное значение $C_2 = C_2|_{C_1=0}$.

В классической (линейной) теории Штурма–Лиувилля широко используется понятие характеристической функции [21, с. 35]. В случае задачи $\mathcal{P}$ характеристическая функция может быть введена аналогичным образом.

Имеем следующее

Утверждение 10. Любая тройка $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ при $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}_+$, $\bar{C}_1, \bar{C}_2 \in (0, C)$ является решением задачи $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда тройка $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$, $C_2 = \bar{C}_2$ удовлетворяет системе

$$u_1(h; \gamma, C_1) = 0, \quad u_3(h; \gamma, C_2) = 0, \quad (54)$$

где $u_1(x; \gamma, C_1)$, $u_3(x; \gamma, C_2)$ являются решениями задачи Коши (1)–(3), а $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ определяется по формуле (9).

Доказательство. Пусть $u_1 = u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_2 = u_2(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, $u_3 = u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ — решение задачи Коши (1)–(3), где $C_2 = \bar{C}_2$ определяется из формулы (9) при $C_1 = \bar{C}_1$. Если тройка $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$, $C_2 = \bar{C}_2(\bar{C}_1)$ удовлетворяет (54), то тройка $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2(\bar{C}_1))$ является решением задачи $\mathcal{P}$ и $u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_2(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, $u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ — собственные функции.

Пусть тройка $\gamma = \bar{\gamma}^* \in \mathbb{R}_+$, $C_1 = \bar{C}_1^* \in (0, C)$, $C_2 = \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*)$ — решение (54). Рассмотрим задачу Коши (1)–(3), где $\gamma = \bar{\gamma}^*$, $C_1 = \bar{C}_1^*$; $C_2 = \bar{C}_2^*$ определяется из (9) при $C_1 = \bar{C}_1^*$. Согласно утверждению 1 нетривиальное решение $u_1 = u_1(x; \bar{\gamma}^*, \bar{C}_1^*)$, $u_2 = u_2(x; \bar{\gamma}^*, \bar{C}_2^*)$, $u_3 = u_3(x; \bar{\gamma}^*, \bar{C}_2^*)$ задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от точки $(x, \gamma, C_1) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \times (0, C)$. Если (54) выполняется для $\gamma = \bar{\gamma}^*$, $C_1 = \bar{C}_1^*$, $C_2 = \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*)$, то тройка $(\bar{\gamma}^*, \bar{C}_1^*, \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*))$ является решением задачи $\mathcal{P}$. Предположим, что для этого решения задачи Коши система (54) не выполняется при $\gamma = \bar{\gamma}^*$, $C_1 = \bar{C}_1^*$, $C_2 = \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*)$. Следовательно, существует неединственное решение задачи Коши (1)–(3), где $\gamma = \bar{\gamma}^*$, $C_1 = \bar{C}_1^*$, $C_2 = \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*)$; для одного из них (54) выполняется, а для другого нет. Этот вывод противоречит утверждению 1, поэтому предположение о существовании решения задачи Коши (1)–(3), для которого (54) не выполняется, неверно. Утверждение доказано.

Из теоремы 3 и утверждения 10 вытекает

Следствие 1. Любое решение $\gamma = \bar{\gamma} \in \mathbb{R}_+$, $C_j = \bar{C}_j \in (0, C)$, $j = 1, 2$, системы ИХУ (52), где $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ определяется из (9), является решением (54) и наоборот.

Объединяя утверждения 2, 4, 5, 7, теорему 4 и следствие 1, получаем

Следствие 2. Для любого целого числа $n > 0$ задача $\mathcal{P}$ имеет не менее n решений $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$, удовлетворяющих условиям

$$u_1(h; \bar{\gamma} - \delta, \bar{C}_1) u_1(h; \bar{\gamma} + \delta, \bar{C}_1) < 0, \quad u_3(h; \bar{\gamma} - \delta, \bar{C}_2) u_3(h; \bar{\gamma} + \delta, \bar{C}_2) < 0,$$

где $u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ являются решениями задачи Коши (1)–(3), $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ определяется из (9) и $\delta > 0$ — достаточно малая постоянная такая, что интервал $(\bar{\gamma} - \delta, \bar{\gamma} + \delta)$ не содержит какого-либо другого решения $\bar{\gamma}$.

5. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЗАДАЧИ $\mathcal{P}$

Задача $\mathcal{P}$ описывает распространение электромагнитной волны в плоском экранированном диэлектрическом нелинейном волноводе

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 < x < h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Введём электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, которое представляет собой неполяризованную симметричную гибридную ТЕ-ТМ волну, распространяющуюся в волноводе Σ , где $\omega > 0$ — круговая частота, и

$$\mathbf{E} = (E_x(x) \ E_y(x) \ E_z(x))^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_x(x) \ H_y(x) \ H_z(x))^T e^{i\gamma z},$$

γ — вещественная постоянная распространения волн, τ — знак транспонирования.

Диэлектрическая проницаемость внутри волновода Σ описывается диагональным тензором (который соответствует тензорной нелинейности Керра [4])

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon + \beta_1 |E_x^2| + \beta_2 |E_y^2| + \beta_1 |E_z^2| & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon + \beta_2 |E_x^2| + \beta_1 |E_y^2| + \beta_2 |E_z^2| & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon + \beta_1 |E_x^2| + \beta_2 |E_y^2| + \beta_1 |E_z^2| \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 1$, $\beta_1, \beta_2 > 0$ — вещественные постоянные. Стоит отметить, что нелинейность Керра в скалярном случае широко используется в нелинейной оптике [22, 23] и встречается в других областях нелинейной математической физики [24, 25]. Выбор тензорной нелинейности (и, в частности, расположения коэффициентов нелинейности β_1, β_2) связан с особенностью рассматриваемой задачи. Неполяризованная симметричная гибридная ТЕ-ТМ волна может распространяться в рассматриваемой структуре только когда оба коэффициента нелинейности не равны нулю. В линейном случае ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) симметричная гибридная ТЕ-ТМ волна распадается на две поляризованные электромагнитные волны ТЕ и ТМ типов. Особый интерес вызывает случай, относящийся к задаче $\mathcal{P}$, когда $\beta_1 > 0$, $\beta_2 = 0$, поскольку при таких коэффициентах нелинейности электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$ представляет собой сумму поляризованных ТЕ и ТМ волн $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, распространяющихся в волноводе Σ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (0 \ E_y(x) \ 0)^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{E}_2 = (E_x(x) \ 0 \ E_z(x))^T e^{i\gamma z}, \\ \mathbf{H}_1 &= (H_x(x) \ 0 \ H_z(x))^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H}_2 = (0 \ H_y(x) \ 0)^T e^{i\gamma z}, \end{aligned} \quad (55)$$

а волноводная структура Σ все ещё заполнена нелинейной средой керровского типа, тензор нелинейности имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon + \beta_1(|E_x^2| + |E_z^2|) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon + \beta_1|E_y^2| & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon + \beta_1(|E_x^2| + |E_z^2|) \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H},$$

где $\hat{\varepsilon}$ описывается формулой (56), $\varepsilon_0 > 0$ — диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mu_0 > 0$ — магнитная проницаемость вакуума. Заметим, что наличие у плоского диэлектрического волновода Σ идеально проводящих экранов на его границах ($x = 0$, $x = h$) приводит к тому, что касательные компоненты электромагнитного поля $E_y(x)$, $E_z(x)$ обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = h$.

Подставив (55) в уравнения Максвелла (56), получим

$$\begin{aligned} \gamma^2 iE_x - \gamma E'_z &= k_0^2(\varepsilon + \beta_1(|E_x^2| + |E_z^2|))iE_x, & \gamma^2 E_y - E''_y &= k_0^2(\varepsilon + \beta_1|E_y^2|)E_y, \\ \gamma iE'_x - E''_z &= k_0^2(\varepsilon + \beta_1(|E_x^2| + |E_z^2|))E_z, \end{aligned} \quad (57)$$

где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$,

$$H_x = -\gamma(\omega\mu_0)^{-1}E_y, \quad H_y = (i\omega\mu_0)^{-1}(i\gamma E_x - E'_z), \quad H_z = (i\omega\mu_0)^{-1}E'_y.$$

Кроме того, имеем следующие граничные условия:

$$E_y|_{x=0} = 0, \quad E_z|_{x=0} = 0, \quad E'_y|_{x=0} = A_1, \quad E_x|_{x=0} = -iA_2, \quad E_y|_{x=h} = 0, \quad E_z|_{x=h} = 0,$$

где постоянные $A_1, A_2 > 0$ выбраны специальным образом.

Обозначив $u_1 = E_y$, $u_2 = iE_x$, $u_3 = E_z$, $a = k_0^2\varepsilon$, $\alpha = k_0^2\beta_1$, из (57) получим систему (1). Сформулированная физическая задача о распространении волн эквивалентна задаче $\mathcal{P}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказано существование решений задачи $\mathcal{P}$, отвечающей распространению электромагнитных поляризованных ТЕ и ТМ волн в плоском закрытом нелинейном волноводе, связанных дополнительным условием. Для доказательства использовался подход, аналогичный тому, что применялся при доказательстве разрешимости задачи, отвечающей распространению электромагнитных поляризованных ТЕ волн в плоском закрытом нелинейном волноводе [12]. Стоит отметить, что в данной работе задача $\mathcal{P}_1$, соответствующая распространению ТЕ волны, и задача $\mathcal{P}_2$, соответствующая распространению ТМ волны, не взаимозаменяемы при доказательстве разрешимости задачи $\mathcal{P}$, как это было в [12], где обе задачи соответствуют распространению ТЕ волн. В дальнейшем интерес может представлять доказательство свойств задачи $\mathcal{P}_2$, которые аналогичны свойствам задачи $\mathcal{P}_1$, описанным в утверждениях 4 и 5.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-71-00020).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smirnov, Y. On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular dielectric waveguide filled with nonlinear isotropic homogeneous medium / Y. Smirnov, E. Smolkin // *Wave Motion*. — 2018. — V. 77. — P. 77–90.
2. Kurseeva, V.Yu. Electromagnetic non-polarized symmetric hybrid wave propagation in a plane waveguide with nonlinear anisotropic permittivity / V.Yu. Kurseeva // *Lobachevskii J. of Math.* — 2018. — V. 39, № 8. — P. 1075–1089.
3. Smirnov, Y. The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguide / Y. Smirnov, E. Smolkin, V. Kurseeva // *Applicable Analysis*. — 2019. — V. 98, № 3. — P. 483–498.
4. Third-order nonlinear electromagnetic TE and TM guided waves / A.D. Boardman, P. Egan, F. Lederer [et al.] // *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena* / Eds. H.-E. Ponath and G.I. Stegeman. — Amsterdam ; London ; New York ; Tokyo : Elsevier, 1991. — P. 73–287.
5. Schürmann, H.W. On the theory of TE-polarized waves guided by a nonlinear three-layer structure / H.W. Schürmann // *Zeitschrift für Physik B*. — 1995. — Bd. 97, № 4. — S. 515–522.
6. Nonlinear TM-polarized waves in non-Kerr media / U. Langbein, F. Lederer, D. Mihalache, D. Mazilu // *Physica B+C*. — 1987. — V. 145, № 3. — P. 377–385.
7. Smirnov, Y.G. Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity / Y.G. Smirnov, D.V. Valovik // *J. Math. Phys.* — 2012. — V. 53. — Art. 123530.
8. Smirnov, Y.G. Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation / Y.G. Smirnov, D.V. Valovik // *J. Math. Phys.* — 2013. — V. 54. — Art. 083502.
9. Мартынова, В.Ю. Распространение гибридных ТЕ-ТЕ-волн в плоском закрытом волноводе, заполненном нелинейной средой / В.Ю. Мартынова // *Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки*. — 2021. — Т. 60, № 4. — С. 27–45.
10. Martynova, V. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics / V. Martynova, D. Valovik // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2023. — V. 46, № 12. — Art. 13205–13225.
11. Valovik, D.V. Perturbation method in the theory of propagation of two-frequency electromagnetic waves in a nonlinear waveguide I: TE-TE waves / D.V. Valovik // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2021. — V. 61, № 1. — P. 103–117.
12. Валовик, Д.В. Об одной неклассической задаче на собственные значения, имеющей нелинеаризуемые решения / Д.В. Валовик, В.Ю. Мартынова // *Дифференц. уравнения*. — 2023. — Т. 59, № 3. — С. 303–313.
13. Valovik, D.V. Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem / D.V. Valovik // *Nonlin. Anal. Real World Appl.* — 2014. — V. 20, № 12. — P. 52–58.
14. Smirnov, Yu.G. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity / Yu.G. Smirnov, D.V. Valovik // *Phys. Rev. A*. — 2015. — V. 91, № 1. — Art. 013840.
15. Валовик, Д.В. Исследование одной нелинейной задачи на собственные значения методом интегрального характеристического уравнения / Д.В. Валовик // *Дифференц. уравнения*. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 175–189.
16. Kurseeva, V.Yu. Asymptotical analysis of a nonlinear Sturm–Liouville problem: linearisable and non-linearisable solutions / V.Yu. Kurseeva, M.A. Moskaleva, D.V. Valovik // *Asymptot. Anal.* — 2020. — V. 119, № 1–2. — P. 39–59.
17. Валовик, Д.В. О существовании бесконечного числа собственных значений в одной нелинейной задаче теории волноводов / Д.В. Валовик, С.В. Тихов // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. — 2018. — Т. 58, № 10. — С. 1658–1667.
18. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский ; под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник ; 7-е изд., испр. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 296 с.

19. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. — М. : Физматгиз, 1961. — 331 с.
20. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман ; пер. с англ. И.Х. Сабитова и Ю.В. Егорова ; под ред. В.М. Алексеева. — М. : Мир, 1970. — 720 с.
21. Марченко, В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 330 с.
22. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. — М. : Наука, 1982. — 621 с.
23. Boyd, R.W. Nonlinear Optics / R.W. Boyd. — New York ; London : Academic Press, 2003. — 578 p.
24. Fibich, G. The Nonlinear Schrödinger Equation / G. Fibich. — Cham ; Heidelberg ; New York ; Dordrecht ; London : Springer, 2015. — 862 p.
25. Cazenave, T. Semilinear Schrödinger Equations / T. Cazenave. — New York ; Providence : American Math. Society, 2003. — 323 p.

ON THE EXISTENCE OF NONLINEARIZABLE SOLUTIONS IN A NONCLASSICAL TWO-PARAMETER NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM

V. Yu. Martynova

*Penza State University, Russia
e-mail: lynxbax@mail.ru*

A nonlinear eigenvalue problem for a system of three equations with boundary conditions of the first kind, describing the propagation of electromagnetic waves in a plane nonlinear waveguide, is considered. This problem is two-parameter problem with one spectral parameter and a second parameter arising from an additional condition. This condition connects the constants of integration that arise when finding the first integrals of the system. The existence of nonlinearizable solutions to the problem is proven.

Keywords: two-parameter eigenvalue problem, nonlinearizable solution, integral characteristic equation, Maxwell's equations, nonlinear permittivity.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-71-00020).

REFERENCES

1. Smirnov, Y. and Smolkin, E. On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular dielectric waveguide filled with nonlinear isotropic homogeneous medium, *Wave Motion*, 2018, vol. 77, pp. 77–90.
2. Kurseeva, V.Yu., Electromagnetic non-polarized symmetric hybrid wave propagation in a plane waveguide with nonlinear anisotropic permittivity, *Lobachevskii J. of Math.*, 2018, vol. 39, no. 8, pp. 1075–1089.
3. Smirnov, Y., Smolkin, E., and Kurseeva, V., The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguide, *Applicable Analysis*, 2019, vol. 98, no. 3, pp. 483–498.
4. Boardman, A.D., Egan, P., Lederer, F., Langbein, U., and Mihalache, D., Third-order nonlinear electromagnetic TE and TM guided waves, in: *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, Eds. H.-E. Ponath and G.I. Stegeman, Amsterdam; London; New York; Tokyo: Elsevier, 1991, pp. 73–287.
5. Schürmann, H.W., On the theory of TE-polarized waves guided by a nonlinear three-layer structure, *Zeitschrift für Physik B*, 1995, bd. 97, no. 4, s. 515–522.
6. Langbein, U., Lederer, F., Mihalache, D., and Mazilu, D., Nonlinear TM-polarized waves in non-Kerr media, *Physica B+C*, 1987, vol. 145, no. 3, pp. 377–385.
7. Smirnov, Y.G. and Valovik, D.V., Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity, *J. Math. Phys.*, 2012, vol. 53, art. 123530.

8. Smirnov, Y.G. and Valovik, D.V., Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation // *J. Math. Phys.*, 2013, vol. 54, art. 083502.
9. Martynova, V.Yu., Hybrid TE-TE-wave propagation in closed plane waveguide filled with nonlinear medium, *Izv. vuzov. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki* (Univ. proceedings. Volga region. Phys. and Math. Sci.), 2021, vol. 60, no. 4, pp. 27–45.
10. Martynova, V. and Valovik, D. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023, vol. 46, no. 12, art. 13205–13225.
11. Valovik, D.V., Perturbation method in the theory of propagation of two-frequency electromagnetic waves in a nonlinear waveguide I: TE-TE waves, *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 1, pp. 103–117.
12. Valovik, D.V. and Martynova, V.Yu. On a nonclassical eigenvalue problem with nonlinearizable solutions, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 301–311.
13. Valovik, D.V., Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem, *Nonlin. Anal. Real World Appl.*, 2014, vol. 20, no. 12, pp. 52–58.
14. Smirnov, Yu.G. and Valovik, D.V., Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity, *Phys. Rev. A*, 2015, vol. 91, no. 1, art. 013840.
15. Valovik, D.V., Study of a nonlinear eigenvalue problem by the integral characteristic equation method, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 171–184.
16. Kurseeva, V.Yu., Moskaleva, M.A., and Valovik, D.V., Asymptotical analysis of a nonlinear Sturm–Liouville problem: linearisable and non-linearisable solutions, *Asymptot. Anal.*, 2020, vol. 119, no. 1–2, pp. 39–59.
17. Valovik, D.V. and Tikhov, S.V., On the existence of an infinite number of eigenvalues in one nonlinear problem of waveguide theory, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 10, pp. 1600–1609.
18. Petrovskii, I.G., *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations), Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta (MSU Press), 1984.
19. Pontryagin, L.S., *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya* (Ordinary Differential Equations), Moscow: Fizmatgiz, 1961.
20. Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1964.
21. Marchenko, V.A. *Operatory Shturma–Liuvillya i ikh prilozheniya* (Sturm–Liouville Operators and Applications), Kiev: Naukova Dumka, 1977.
22. Landau, L.D. and Livshits, E.M., *Elektrodinamika sploshnykh sred* (Electrodynamics of Continuous Media), Moscow: Nauka, 1982.
23. Boyd, R.W., *Nonlinear Optics*, New York–London: Academic Press, 2003.
24. Fibich, G., *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Cham–Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2015.
25. Cazenave, T., *Semilinear Schrödinger Equations*, New York; Providence: American Math. Society, 2003.