

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.4

ФОРМУЛА КРИСТОФФЕЛЯ–ДАРБУ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Е. Круглов

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

e-mail: viktorkruglov935@gmail.com

Поступила в редакцию 02.02.2024 г., после доработки 18.03.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

С помощью рекуррентных соотношений между любыми тремя последовательными полиномиальными собственными функциями линейных дифференциальных уравнений получена формула Кристоффеля–Дарбу для системы полиномиальных собственных функций этих уравнений.

Ключевые слова: полиномиальные собственные функции, формула Кристоффеля–Дарбу.

DOI: 10.31857/S0374064124040025, EDN: PEDXQP

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье [1] для каждого из дифференциальных уравнений

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - n(A_2 + (n-1)A_1)y = 0, \quad (1)$$

$$(B_1x + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - nA_2y = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad (2)$$

$$(A_1x^2 + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - n(A_2 + (n-1)A_1)y = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad (3)$$

где $n=0, 1, \dots$, построена система $y_0(x) \equiv 1, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$ полиномиальных собственных функций (ПСФ). При этом имеют место следующие рекуррентные соотношения для любых трёх последовательных ПСФ:

— с единичным старшим коэффициентом уравнения (1):

$$y_n(x) = (\alpha^{(n)} + x)y_{n-1}(x) + \beta^{(n)}y_{n-2}(x), \quad n=1, 2, \dots, \quad y_{-1}(x) \equiv 0, \quad (4)$$

$$\alpha^{(n)} = \frac{n(B_2 + (n-1)B_1)}{A_2 + (2n-2)A_1} - \frac{(n-1)(B_2 + (n-2)B_1)}{A_2 + (2n-4)A_1},$$

$$\begin{aligned} \beta^{(n)} = & \left[\frac{(n-1)(B_2 + (n-2)B_1)}{A_2 + (2n-4)A_1} \right]^2 - \frac{(n-1)(B_2 + (n-2)B_1)}{2(A_2 + (2n-4)A_1)} \left[\frac{n(B_2 + (n-1)B_1)}{A_2 + (2n-3)A_1} + \right. \\ & \left. + \frac{(n-2)(B_2 + (n-3)B_1)}{A_2 + (2n-5)A_1} \right] + \frac{(n-1)(A_2 + (n-3)A_1)}{(A_2 + (2n-5)A_1)(A_2 + (2n-3)A_1)} C_1; \end{aligned} \quad (5)$$

— со старшим коэффициентом, отличным от единицы, уравнения (2):

$$y_n(x) = (A_2x + B_2 + 2(n-1)B_1)y_{n-1}(x) - (n-1)[B_1B_2 - C_1A_2 + (n-2)B_1^2]y_{n-2}(x), \quad n=1, 2, \dots; \quad (6)$$

— со старшим коэффициентом, отличным от единицы, уравнения (3):

$$y_n(x) = (\alpha_1^{(n)}x + \alpha_2^{(n)})y_{n-1}(x) + \beta_1^{(n)}y_{n-2}(x), \quad n=1, 2, \dots, \quad (7)$$

где

$$\alpha_1^{(n)} = \frac{(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 + (2n-2)A_1)}{A_2 + (n-2)A_1}, \quad \alpha_2^{(n)} = \frac{B_2(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 - 2A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)},$$

$$\beta_1^{(n)} = \frac{(n-1)(A_2 + (2n-2)A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)} [A_1B_2^2 + C_1(A_2 + (2n-4)A_1)^2].$$

Также в [1] показано, что построение функций (4), (6), (7) равносильно выполнению соответствующих равенств при $n=1, 2, \dots$:

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'_{n-1} + (n-1) \left[-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (n-2)A_1B_1}{A_2 + (2n-4)A_1} \right] y_{n-1} -$$

$$- \beta^{(n)}(A_2 + (2n-3)A_1)y_{n-2} = 0; \quad (8)$$

$$(B_1x + C_1)y'_{n-1} - (n-1)B_1y_{n-1} + (n-1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (n-2)B_1^2)y_{n-2} = 0; \quad (9)$$

$$(A_1x^2 + C_1)y'_{n-1} - (n-1) \left(A_1x - \frac{B_2A_1}{A_2 + (2n-4)A_1} \right) y_{n-1} -$$

$$- (n-1) \left(\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2n-4)A_1} + (A_2 + (2n-4)A_1)C_1 \right) y_{n-2} = 0. \quad (10)$$

Формулы (8)–(10) названы в [1] *формулами дифференцирования ПСФ*.

2. ПРОВЕРКА ФОРМУЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПСФ

Каждое из равенств (8)–(10) требует проверки, так как только удостоверившись в выполнении каждого из них для любого натурального значения n можно утверждать о справедливости соответствующих формул (4), (6), (7).

Теорема 1. *Равенства (8)–(10) справедливы для любого натурального значения n .*

Доказательство. Используя метод математической индукции, подробно проведём проверку равенства (8); равенства (9) и (10) проверяются аналогично.

Пусть $n=2$ (для $n=1$ при $y_0(x) \equiv 1$, $y_{-1}(x) \equiv 0$ равенство (8) тривиально) левая часть равенства (8) имеет следующий вид:

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'_1 + \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2}{A_2} \right) y_1 - \beta^{(2)}(A_2 + A_1)y_0. \quad (11)$$

Учитывая, что

$$y_1(x) = x + \frac{B_2}{A_2}, \quad y_0(x) \equiv 1, \quad \beta^{(2)} = \left(\frac{B_2}{A_2} \right)^2 - \frac{B_2(B_2 + B_1)}{A_2(A_2 + A_1)} + \frac{C_1}{A_2 + A_1},$$

получаем, что выражение (11) равно нулю. Следовательно, функция $y_2(x) = (\alpha^{(2)} + x)y_1(x) + \beta^{(2)}y_0(x)$ — ПСФ уравнения (1) при $n=2$.

Пусть равенство (8) справедливо для $n = k$, где $k > 2$, $k \in \mathbb{N}$. Докажем его для $n = k + 1$, т.е. покажем, что будет иметь место равенство

$$I_{k+1} = (A_1x^2 + B_1x + C_1)y'_k + k \left[-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1}{A_2 + (2k-2)A_1} \right] y_k - \beta^{(k+1)}(A_2 + (2k-1)A_1)y_{k-1} = 0. \quad (12)$$

Так как ПСФ (4) при $n = k$ является решением уравнения (1), то используем функцию $y_k(x)$ для доказательства равенства (12). Подставим её в выражение для I_{k+1} , затем в полученном выражении, использовав равенство (8) при $n = k$ и $n = k - 1$, удалим y'_{k-1} и y'_{k-2} , а вместо $y_{k-3}(x)$ подставим выражение

$$\beta^{(k-1)}y_{k-3}(x) = y_{k-1} - (\alpha^{(k-1)} + x)y_{k-2}(x).$$

Окончательно в выражении для I_{k+1} сохранятся только ПСФ $y_{k-1}(x)$ и $y_{k-2}(x)$, т.е.

$$I_{k+1} = Q_1y_{k-1}(x) + Q_2y_{k-2}(x),$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1x^2 + B_1x + C_1 + (\alpha_1^{(k)} + x) \left[k \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1}{A_2 + (2k-2)A_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (k-1) \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-2)A_1B_1}{A_2 + (2k-4)A_1} \right) \right] - \beta^{(k+1)}(A_2 + (2k-1)A_1) + \beta^{(k)}(A_2 + (2k-5)A_1); \\ Q_2 &= \beta^{(k)} \left[(\alpha^{(k)} + x)(A_2 + (2k-3)A_1) + k \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1}{A_2 + (2k-2)A_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (k-2) \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-3)A_1B_1}{A_2 + (2k-6)A_1} \right) - (\alpha^{(k-1)} + x)(A_2 + (2k-5)A_1) \right]. \end{aligned}$$

Покажем, что $Q_1 \equiv Q_2 \equiv 0$.

В Q_1 в выражении $(\alpha^{(k)} + x)[\dots]$ соберём слагаемые, содержащие x^2 и x . В результате будет выделен двучлен $-A_1x^2 - B_1x$; параметр C_1 содержится только в $\beta^{(k+1)}$ и $\beta^{(k)}$, т.е. при C_1 имеем

$$\frac{(k-1)(A_2 + (k-3)A_1)(A_2 + (2k-5)A_1)}{(A_2 + (2k-5)A_1)(A_2 + (2k-3)A_1)} - \frac{k(A_2 + (k-2)A_1)(A_2 + (2k-1)A_1)}{(A_2 + (2k-1)A_1)(A_2 + (2k-3)A_1)} = -1,$$

следовательно, трёхчлен $A_1x^2 + B_1x + C_1$ в Q_1 удалён.

Далее, учитывая структуру $\alpha^{(k)}$, выделим сначала в Q_1 следующие группы S_1 и S_2 слагаемых:

$$\begin{aligned} S_1 &= \beta^{(k)}(A_2 + (2k-5)A_1) + \frac{(k-1)^2(B_2 + (k-2)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-2)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-4)A_1)^2} = \\ &= \frac{k(k-1)(B_2 + (k-2)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-2)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-4)A_1)(A_2 + (2k-3)A_1)}, \\ S_2 &= -\beta^{(k+1)}(A_2 + (2k-1)A_1) + \frac{k^2(B_2 + (k-1)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)^2} = \\ &= \frac{k(k-1)(B_2 + (k-1)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-3)A_1)}, \end{aligned}$$

а затем, присоединяя к S_1 и S_2 оставшиеся от $\alpha^{(k)}$ слагаемые, получаем

$$Q_1 = S_1 - \frac{k(k-1)(B_2 + (k-2)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)} + \\ + S_2 - \frac{k(k-1)(B_2 + (k-1)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-2)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)}.$$

После приведения к общему знаменателю получим дробь, числитель которой равен нулю, т.е. $Q_1 \equiv 0$.

В выражении для Q_2 коэффициент при x , как легко заметить, равен нулю. Далее

$$\alpha^{(k)}(A_2 + (2k-3)A_1) - \alpha^{(k-1)}(A_2 + (2k-5)A_1) = \\ = 2B_1 - \frac{kA_1(B_2 + (k-1)B_1)}{A_2 + (2k-2)A_1} + \frac{(k-2)A_1(B_2 + (k-3)B_1)}{A_2 + (2k-6)A_1},$$

и так как

$$\frac{(k-2)A_1(B_2 + (k-3)B_1)}{A_2 + (2k-6)A_1} - \frac{(k-2)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-3)A_1B_1)}{A_2 + (2k-6)A_1} = (k-2)B_1, \\ \frac{k(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1)}{A_2 + (2k-2)A_1} - \frac{kA_1(B_2 + (k-1)B_1)}{A_2 + (2k-2)A_1} = -kB_1,$$

то сумма всех дробей, записанных в квадратных скобках выражения для Q_2 , равна нулю.

Итак, доказано, что $I_{k+1} = 0$ для любого натурального k .

Равенства (9) и (10) для $n=2$ очевидны (в обоих случаях $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x) = A_2x + B_2$). Далее, пусть каждое из равенств (9) и (10) справедливо для $n=k$, $k > 2$, $k \in \mathbb{N}$. Необходимо доказать для равенств (9) и (10), соответственно, что

$$I_{k+1}^{(1)} = (B_1x + C_1)y'_k - kB_1y_k + k(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-1)B_1^2)y_{k-1} = 0, \\ I_{k+1}^{(2)} = (A_1x^2 + C_1)y'_k - k\left(A_1x - \frac{B_2A_1}{A_2 + (2k-2)A_1}\right)y_k - \\ - k\left(\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2k-2)A_1} + (A_2 + (2k-2)A_1)C_1\right)y_{k-1} = 0.$$

Используя те же рассуждения, что и при преобразовании выражения для I_{k+1} , получаем

$$I_{k+1}^{(1)} = Q_1^{(1)}y_{k-1} + Q_2^{(1)}y_{k-2}, \quad I_{k+1}^{(2)} = Q_1^{(2)}y_{k-1} + Q_2^{(2)}y_{k-2},$$

где

$$Q_1^{(1)} = A_2(B_1x + C_1) - B_1k(A_2x + B_2 + 2(k-1)B_1) + k(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-1)B_1^2) + \\ + B_1(k-1)(A_2x + B_2 + 2(k-1)B_1) - (k-1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2), \\ Q_2^{(1)} = k(k-1)B_1(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2) - (k-1)(A_2x + B_2 + 2(k-1)B_1) \times \\ \times (B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2) - (k-1)(k-2)B_1(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2) + \\ + (k-1)(A_2x + B_2 + 2(k-2)B_1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2).$$

Элементарные преобразования приводят к тождествам $Q_1^{(1)} \equiv Q_2^{(1)} \equiv 0$. Итак, $I_{k+1}^{(1)} = 0$.

Далее,

$$Q_1^{(2)} = \alpha_1^{(k)}(A_1x^2 + C_1) + (\alpha_1^{(k)}x + \alpha_2^{(k)}) \left[\frac{A_1B_2(A_2 - 2A_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)} - A_1x \right] - \\ - k \left[\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2k-2)A_1} + (A_2 + (2k-2)A_1)C_1 \right] + \beta_1^{(k)} \frac{A_2 + (k-3)A_1}{A_2 + (2k-4)A_1}.$$

Если учесть, что

$$(k-1) \left[\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2k-4)A_1} + (A_2 + (2k-4)A_1)C_1 \right] = \beta_1^{(k)} \frac{A_2 + (k-2)A_1}{A_2 + (2k-2)A_1},$$

то

$$Q_2^{(2)} = \beta_1^{(k)} \left[\frac{2A_1B_2(A_2 - 2A_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)} - 2A_1x + (\alpha_1^{(k)}x + \alpha_2^{(k)}) \frac{A_2 + (k-2)A_1}{A_2 + (2k-2)A_1} - \right. \\ \left. - (\alpha_1^{(k-1)}x + \alpha_2^{(k-1)}) \frac{A_2 + (k-3)A_1}{A_2 + (2k-4)A_1} \right].$$

Легко проверить, что в $Q_1^{(2)}$ коэффициенты при x^2 , x и C_1 равны нулю, а сумма оставшихся слагаемых равна

$$\frac{A_1B_2^2}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)(A_2 + (k-2)A_1)} [(A_2 - 2A_1)^2(A_2 + (2k-3)A_1) + \\ + (k-1)(A_2 + (k-3)A_1)(A_2 + (2k-2)A_1)^2 - k(A_2 + (k-3)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)^2].$$

После преобразований получаем, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Итак, $Q_1^{(2)} \equiv 0$.

Учитывая выражения для $\alpha_i^{(k)}$ и $\alpha_i^{(k-1)}$, $i = 1, 2$, легко получить, что $Q_2^{(2)} \equiv 0$. Таким образом, $I_{k+1}^{(2)} \equiv 0$. Теорема доказана.

3. ФОРМУЛА КРИСТОФФЕЛЯ–ДАРБУ ДЛЯ ПСФ

Известны формулы Кристоффеля–Дарбу для ортогональных полиномов [2, § 6.4] и для ортонормированных полиномов [3, теорема 1.5].

Объединим рекуррентные формулы для ПСФ дифференциальных уравнений (1)–(3) следующим образом:

$$y_{n+1}(x) = (\alpha_1^{(n+1)}x + \alpha_2^{(n+1)})y_n(x) + \beta^{(n+1)}y_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Теорема 2. Для системы ПСФ (13) $y_0(x) = 1$, $y_1(x)$, $\dots$, $y_{n+1}(x)$ имеет место формула Кристоффеля–Дарбу

$$\frac{y_{n+1}(x)y_n(t) - y_{n+1}(t)y_n(x)}{x - t} = \\ = \alpha_1^{(n+1)}y_n(x)y_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \beta^{(n+1)} \dots \beta^{(k+2)} \alpha_1^{(k+1)} y_k(x)y_k(t). \quad (14)$$

Доказательство. В равенстве (13) заменим переменную x на переменную t : $y_{n+1}(t) = (\alpha_1^{(n+1)}t + \alpha_2^{(n+1)})y_n(t) + \beta^{(n+1)}y_{n-1}(t)$, затем умножим полученное равенство на $y_n(x)$, а равенство (13) — на $y_n(t)$ и вычтем их:

$$y_{n+1}(x)y_n(t) - y_{n+1}(t)y_n(x) = \alpha_1^{(n+1)}(x-t)y_n(x)y_n(t) + \beta^{(n+1)}(y_{n-1}(x)y_n(t) - y_{n-1}(t)y_n(x)). \quad (15)$$

Обозначив

$$R_{n+1}(x, t) = y_{n+1}(x)y_n(t) - y_{n+1}(t)y_n(x),$$

соотношение (15) можно записать в рекуррентном виде

$$R_{n+1}(x, t) = \alpha_1^{(n+1)}(x-t)y_n(x)y_n(t) - \beta^{(n+1)}R_n(x, t), \quad n = 0, 1, \dots$$

Используя это равенство, имеем

$$R_n(x, t) = \alpha_1^{(n)}(x-t)y_{n-1}(x)y_{n-1}(t) - \beta^{(n)}R_{n-1}(x, t),$$

значит,

$$R_{n+1}(x, t) = \alpha_1^{(n+1)}(x-t)y_n(x)y_n(t) - \beta^{(n+1)}\alpha_1^{(n)}(x-t)y_{n-1}(x)y_{n-1}(t) + \beta^{(n+1)}\beta^{(n)}R_{n-1}(x, t).$$

Продолжая этот процесс для $n := n-1$, $n := n-2$, ..., $n=0$ и учитывая, что

$$R_1(x, t) = \alpha_1^{(1)}(x-t)y_0(x)y_0(t), \quad \beta^{(1)} = 0,$$

получаем

$$R_{n+1}(x, t) = (x-t) \left[\alpha_1^{(n+1)}y_n(x)y_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \beta^{(n+1)} \dots \beta^{(k+2)} \alpha_1^{(k+1)} y_k(x)y_k(t) \right].$$

Теорема доказана.

Запишем теперь формулу Кристоффеля–Дарбу для ПСФ каждого из дифференциальных уравнений (1)–(3).

1. Для дифференциального уравнения (1) с ПСФ, имеющими единичный старший коэффициент $\alpha_1^{(n)} \equiv 1$. По формуле (5)

$$\begin{aligned} \beta^{(n)} &= \frac{(n-1)(A_2 + (n-3)A_1)(B_2 + (n-2)B_1)}{(A_2 + (2n-5)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)^2(A_2 + (2n-3)A_1)} \times \\ &\times [(B_2A_1 - B_1A_2 - (n-2)A_1B_1) + C_1(A_2 + (2n-4)A_1)^2]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$T_n = \frac{(n-1)(A_2 + (n-3)A_1)}{(A_2 + (2n-5)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)^2(A_2 + (2n-3)A_1)},$$

$$D_n^{(1)} = (B_2 + (n-2)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (n-2)A_1B_1 + C_1(A_2 + (2n-4)A_1)^2).$$

Тогда легко вычислить

$$T_2T_3 \dots T_k = \frac{(k-1)!}{L_0L_1 \dots L_{k-3}L_{k-2}^2 \dots L_{2k-4}^2L_{2k-3}}, \quad k = \overline{2, n+1}, \quad L_m = A_2 + mA_1.$$

Правую часть формулы (14) можно записать следующим образом:

$$n!T_2T_3\ldots T_{n+1}\left[\frac{y_n(x)y_n(t)}{n!T_2\ldots T_{n+1}}-\frac{D_{n+1}^{(1)}y_{n-1}(x)y_{n-1}(t)}{(n-1)!T_2\ldots T_n}+\ldots\right. \\ \left.\ldots+(-1)^{n-k}\frac{D_{n+1}^{(1)}\ldots D_{k+2}^{(1)}}{k!T_2\ldots T_{k+1}}y_k(x)y_k(t)+\ldots+(-1)^nD_{n+1}^{(1)}\ldots D_2^{(1)}y_0(x)y_0(t)\right],$$

и формула Кристоффеля–Дарбу для ПСФ с единичным старшим коэффициентом примет вид

$$\frac{y_{n+1}(x)y_n(t)-y_{n+1}(t)y_n(x)}{n!T_2\ldots T_{n+1}(x-t)}=\frac{y_n(x)y_n(t)}{n!T_2\ldots T_{n+1}}-\frac{D_{n+1}^{(1)}y_{n-1}(x)y_{n-1}(t)}{(n-1)!T_2\ldots T_n}+\ldots \\ \ldots+(-1)^{n-k}\frac{D_{n+1}^{(1)}\ldots D_{k+2}^{(1)}}{k!T_2\ldots T_{k+1}}y_k(x)y_k(t)+\ldots+(-1)^nD_{n+1}^{(1)}\ldots D_2^{(1)}y_0(x)y_0(t).$$

2. Для дифференциального уравнения (2)

$$\alpha_1^{(n)}=A_2, \quad \beta^{(n)}=-(n-1)(B_1B_2-C_1A_2+(n-2)B_1^2), \quad D_n^{(2)}=(B_1B_2-C_1A_2+(n-2)B_1^2), \\ \beta^{(n+1)}\ldots\beta^{(k+2)}\alpha_1^{(k+1)}=(-1)^{n-k}n(n-1)\ldots(k+1)A_2D_{n+1}^{(2)}\ldots D_{k+2}^{(2)},$$

а формула Кристоффеля–Дарбу записывается как

$$\frac{y_{n+1}(x)y_n(t)-y_{n+1}(t)y_n(x)}{A_2n!(x-t)}=\frac{y_n(x)y_n(t)}{n!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{D_{n+1}^{(2)}\ldots D_{k+2}^{(2)}}{k!}y_k(x)y_k(t).$$

3. Для дифференциального уравнения (3)

$$\alpha_1^{(n)}=\frac{(A_2+(2n-3)A_1)(A_2+(2n-2)A_1)}{(A_2+(n-2)A_1)}, \\ \beta_1^{(n)}=\frac{(n-1)(A_2+(2n-2)A_1)}{(A_2+(n-2)A_1)(A_2+(2n-4)A_1)}[A_1B_2^2+C_1(A_2+(2n-4)A_1)^2]=S_nD_n^{(3)},$$

где через $D_n^{(3)}$ обозначено выражение в квадратных скобках.

Тогда

$$\beta_1^{(n+1)}\ldots\beta_1^{(k+2)}\alpha_1^{(k+1)}=S_{n+1}\ldots S_{k+2}\alpha_1^{(k+1)}D_{n+1}^{(3)}\ldots D_{k+2}^{(3)}= \\ =\frac{n(n-1)\ldots(k+1)(A_2+2nA_1)}{(A_2+(n-1)A_1)\ldots(A_2+(k-1)A_1)}D_{n+1}^{(3)}\ldots D_{k+2}^{(3)}.$$

Если учесть, что

$$\alpha_1^{(n+1)}=\frac{(A_2+(2n-1)A_1)(A_2+2nA_1)}{(A_2+(n-1)A_1)},$$

то формула Кристоффеля–Дарбу для ПСФ дифференциального уравнения (3) будет следующей:

$$\frac{(y_{n+1}(x)y_n(t)-y_{n+1}(t)y_n(x))(A_2+(n-1)A_1)}{n!(A_2+2nA_1)(x-t)}= \\ =\frac{(A_2+(2n-1)A_1)}{n!}y_n(x)y_n(t)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{(A_2+(2k-1)A_1)D_{n+1}^{(3)}\ldots D_{k+2}^{(3)}y_k(x)y_k(t)}{k!(A_2+(n-1)A_1)\ldots(A_2+(k-1)A_1)}.$$

4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПСФ

1. Очевидно следующее свойство ПСФ: любой полином $Q_n(x)$ степени n однозначно представим в виде

$$Q_n(x) = \alpha_0 y_0(x) + \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x),$$

где $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — некоторая система ПСФ.

2. Функция $\rho(x)$, приводящая уравнение (2) к самосопряжённому виду, удовлетворяет уравнению

$$(B_1 x + C_1) \rho'(x) = (A_2 x + B_2 - B_1) \rho(x), \quad \rho(x) = e^{A_2 x / B_1} (B_1 x + C_1)^{(B_2 B_1 - A_2 C_1) / B_1^2 - 1}.$$

Эта функция становится весовой на интервале $(-C_1/B_1, +\infty)$, если $B_2 B_1 - A_2 C_1 > 0$ и $A_2/B_1 < 0$, так как все условия, налагаемые на весовую функцию [2, с. 37], а именно: на данном интервале $\rho(x) > 0$,

$$(B_1 x + C_1) \rho(x) \Big|_{x=-C_1/B_1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (B_1 x + C_1) \rho(x) x^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

выполнены, и полиномы $y_n(x)$ образуют ортогональную систему функций относительно этой весовой функции [1].

Если $(B_2 B_1 - A_2 C_1)/B_1^2 \leq 0$, то $\rho(x)$ — не весовая функция, так как нарушается первое условие из (16).

Более того, если $(B_2 B_1 - A_2 C_1)/B_1^2 < -1$, то из отрицательности дискриминанта $B_1^2 + B_1 B_2 - A_2 C_1$ квадратного трёхчлена $y_2(x) = A_2^2 x^2 + 2(B_2 + B_1) A_2 x + B_2(B_2 + B_1) + C_1 A_2$ следует, что ПСФ $y_2(x)$ не имеет вещественных корней на интервале $(-C_1/B_1, +\infty)$ [1], но это недопустимо для ПСФ $y_2(x)$ в случае, если $\rho(x)$ — весовая функция.

Пусть $B_1 = 0$, $C_1 \neq 0$. Функция $\rho(x)$, приводящая уравнение (2) к самосопряжённому виду, удовлетворяет уравнению

$$C_1 \rho'(x) = (A_2 x + B_2) \rho(x), \quad \rho(x) = \exp\{(A_2 x + B_2)^2 / (2C_1 A_2)\},$$

и $\rho(x) > 0$ для $x \in (-\infty, +\infty)$. Если $A_2 C_1 < 0$, то $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x) x^k = 0$, т.е. $\rho(x)$ — весовая функция для ПСФ $y_n(x)$ при $B_1 = 0$.

В частности, $y_2(x) = (A_2 x + B_2)^2 + A_2 C_1$. При условии $A_2 C_1 \geq 0$ ПСФ $y_2(x)$ либо не имеет вещественных корней, либо имеет два равных, что невозможно для любой ПСФ из ортогональной системы, поэтому при $A_2 C_1 \geq 0$ функция $\rho(x)$ не весовая.

Таким образом, если функция $\rho(x)$, приводящая дифференциальное уравнение к самосопряжённому виду, не является весовой, то по крайней мере у одной из множества ПСФ уравнения не может быть простых вещественных нулей на интервале существования $\rho(x)$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Круглов, В.Е. Построение полиномиальных собственных функций линейного дифференциального уравнения второго порядка / В.Е. Круглов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 9. — С. 1172–1180.
2. Никифоров, А.Ф. Специальные функции математической физики : учеб. пособие для вузов / А.Ф. Никифоров, В.Е. Уваров. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1984. — 344 с.
3. Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. — М. : Наука, 1976. — 327 с.

**CHRISTOFFEL–DARBOUX FORMULA FOR POLYNOMIAL EIGENFUNCTIONS
OF SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS****V. E. Kruglov***Mechnikov Odesa National University
e-mail: viktorkruglov935@gmail.com*

Using recurrence relations between any three consecutive polynomial eigenfunctions of second-order linear differential equations, the Christoffel–Darboux formulae for the system of polynomial eigenfunctions of these equations are derived.

Keywords: polynomial eigenfunctions, Christoffel–Darboux formula.

REFERENCES

1. Kruglov, V.E., Construction of polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 9, pp. 1166–1174.
2. Nikiforov, A.F. and Uvarov, V.E., *Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki* (Special Functions of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1984.
3. Suetin, P.K., *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* (Classical Orthogonal Polynomials), Moscow: Nauka, 1976.