

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54

АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ
С ПОГРАНИЧНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ
В ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИЕЙ

М. А. Давыдова¹, Г. Д. Рублев²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

²Институт физики атмосферы имени А.М. Обухова РАН, г. Москва

e-mail: ¹m.davydova@physics.msu.ru, ²rublev.gd15@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 30.09.2023 г., после доработки 30.11.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Предложен новый подход к исследованию прямых и обратных задач для сингулярно возмущённого уравнения теплопроводности с нелинейно зависящей от температуры тепловой диффузией, основанный на развитии и использовании методов асимптотического анализа в нелинейных сингулярно возмущённых задачах реакция–диффузия–адвекция. Суть подхода рассмотрена на примере класса одномерных стационарных задач с нелинейными граничными условиями, для которого выделен случай применимости асимптотического анализа. Сформулированы достаточные условия существования классических решений погранслоного типа и типа контрастных структур, построены асимптотические приближения произвольного порядка точности таких решений, обоснованы алгоритмы построения формальных асимптотик и исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову стационарных решений с пограничными и внутренними слоями как решений соответствующих параболических задач. Рассмотрен класс нелинейных задач, учитывающих боковой теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Доказана теорема существования и единственности классического решения с пограничными слоями в задачах такого типа. В качестве приложений исследования представлены методы решения конкретных прямой и обратной задач нелинейного теплообмена, связанных с повышением эффективности эксплуатации прямолинейных нагревательных элементов в плавильных печах — теплообменниках: расчёт тепловых полей в нагревательных элементах и метод восстановления коэффициентов тепловой диффузии и теплообмена по данным моделирования.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности с нелинейной тепловой диффузией, задача нелинейной теплопроводности, задача нелинейного теплообмена, сингулярно возмущённая задача, решение с пограничными и внутренними переходными слоями, тепловая структура, асимптотический метод, коэффициентная обратная задача теплообмена.

DOI: 10.31857/S0374064124040018, EDN: PGHBJK

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы особый интерес вызывают задачи нелинейного тепломассопереноса в связи с появлением новых аналитических методов их исследования, а также интенсивным развитием методов численного моделирования, способствующих получению и применению новых результатов как в технических разработках, в промышленности и энергетике, так

и при решении современных задач экологии, биологии, химии и материаловедения (см., например, [1–7]). Первые работы в этом направлении появились ещё в начале прошлого века (см., например, [8]). Основные методы исследования диффузионных моделей, предложенные в те годы, наиболее полно рассмотрены в [9]. Новый важный этап в изучении задач нелинейного теплопереноса был связан с разработкой методов, направленных на поиск точных [1] и приближённых [10] автомодельных решений. Интерес к этому ограниченному классу решений обусловлен тем, что он наиболее прост для изучения эффектов нелинейности. С использованием автомодельных решений были описаны диссипативные структуры в нелинейных средах и, в частности, тепловые структуры, связанные с явлением пространственной локализации тепла при воздействии нелинейных тепловых источников (см., например, [1]).

Одновременно развивались альтернативные методы исследования таких задач, основанные, например, на использовании группового анализа (см., например, [4]). Среди приближённых методов отметим методы теории возмущений [2, 11], которые оказались эффективными, например, при изучении свойств композиционных материалов с мелкими включениями, при рассмотрении регулярных тепловых режимов, соответствующих развитой стадии процесса, при изучении задач типа реакция–диффузия экологии и генетики.

Отметим также результаты численного моделирования в задачах нелинейной теплопроводности (см., например, [2, 3]) как результаты основного подхода при изучении нелинейных процессов. Одним из наиболее значимых примеров использования такого подхода является математическое моделирование процесса эволюции тепловых структур (см., например, [1, 2]), в частности, многомерных [12].

В настоящей работе рассмотрен новый подход к исследованию задач нелинейного теплообмена, основанный на дальнейшем развитии и использовании методов асимптотического анализа [13–15] для систем тихоновского типа [13] с нелинейными граничными условиями в условно устойчивом случае. Возможности нового подхода продемонстрированы на примере класса одномерных сингулярно возмущённых стационарных задач для квазилинейного уравнения теплопроводности с учётом конвекции. Изучены различные нелинейные крайевые режимы, соответствующие наличию тепловых потоков на границе или конвективного теплообмена с постоянным или нелинейно зависящим от температуры коэффициентом теплообмена.

Квазилинейное уравнение теплопроводности может быть сведено к уравнению с квадратичной зависимостью от градиента решения. Впервые одномерная стационарная задача Дирихле для уравнения такого типа исследовалась в работе [14], где на основе метода сшивания доказано существование классического решения с внутренним переходным слоем. Многомерный аналог такой задачи изучался в работе [5] с использованием метода дифференциальных неравенств [15], на основе которого доказано существование устойчивых решений с пограничными и внутренними слоями. В настоящей работе впервые рассматриваются стационарные сингулярно возмущённые задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в наиболее общей постановке с учётом нелинейной диффузии, конвекции и заданием нелинейных условий на границе расчётной области. Для данного класса задач исследуются вопросы о существовании классических решений с пограничными и внутренними слоями (одномерные тепловые структуры) и об асимптотической устойчивости по Ляпунову таких стационарных решений с использованием метода [15] и принципа сравнения (см., например, [16, 17]).

В последнее время в теории сингулярных возмущений сформировалось и активно развивается новое направление, ориентированное на разработку эффективных численных алгоритмов решения прямых и обратных задач для нелинейных сингулярно возмущённых уравнений типа реакция–диффузия–адвекция на основе предварительного асимптотическо-

го анализа (см., например, [18, 19]). Новый численно-асимптотический подход основан на использовании информации о свойствах решений прямых сингулярно возмущённых задач, полученной в результате строгого асимптотического анализа. В итоге удаётся свести исходную задачу к задаче с более простым численным решением и значительно сэкономить вычислительные ресурсы, сократить время счёта, повысить стабильность работы вычислительного процесса по сравнению с обычными вариационными методами [20]. Данный подход использует априорную информацию о положении внутреннего слоя решения прямой задачи. Другая модификация данного метода впервые предложена в статье [21], где в задаче восстановления параметров модели применяется параметризованное асимптотическое приближение решения прямой задачи. Данный подход оказался эффективным при решении некоторых прикладных задач геофизики [6, 21, 22]. Он же использован в настоящей работе при решении конкретной обратной задачи нелинейного теплообмена, связанной с повышением эффективности эксплуатации прямолинейных нагревательных элементов в плавильных печах — теплообменниках с конвективным или излучающим режимами. Разработан новый метод восстановления теплофизических характеристик нелинейных сред (коэффициентов тепловой диффузии и теплообмена) по данным моделирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пространственно-одномерное стационарное тепловое поле в нелинейной диссипативной среде описывается задачей

$$\frac{d}{dx} \left(k(u, x) \frac{du}{dx} \right) - A \frac{du}{dx} = -f(u, x), \quad x \in (0, l), \quad N[u]|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = \bar{g}, \quad (1)$$

где $u(x)$ — значение температуры в точке с координатой x ; $k(u, x)$ — коэффициент теплопроводности, $0 < k_1 < k(u, x) < k_2$; A — локальная скорость среды, $f(u, x)$ — мощность распределённых источников тепла; \bar{g} — значение температуры при $x = l$. В качестве нелинейного оператора $N[u]$ при $x = 0$ может быть задан один из следующих операторов:

$$N[u]|_{x=0} = \left[k(u, x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} + q,$$

соответствующий наличию теплового потока плотности q при $x = 0$;

$$N[u]|_{x=0} = \left[k(u, x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} - \alpha_0(u(0) - U),$$

соответствующий наличию конвективного теплообмена с окружающей средой (с температурой U и коэффициентом теплообмена $\alpha_0 > 0$) при $x = 0$;

$$N[u]|_{x=0} = \left[k(u, x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} - \alpha_1(u(0))(u(0) - U),$$

соответствующий наличию конвективного теплообмена с учётом излучения границы $x = 0$ по закону Стефана–Больцмана, где $\alpha_1(u) = \alpha_0 + \sigma(u + U)(u^2 + U^2)$, σ — постоянная Стефана–Больцмана.

Заметим, что в случае $A = A(x)$ в правой части уравнения из задачи (1) появляется слагаемое, пропорциональное $\operatorname{div} A$, но и в этом случае уравнение сводится к уравнению того же типа при условии, что скорость $A(x)$ задана.

Определяя безразмерные температуру и длину как отношение соответствующих размерных величин к U и l (предполагается, что температура не сильно отличается от температуры

окружающей среды), а также полагая, что процесс энерговыделения преобладает над процессом тепловой диффузии, приходим к задаче в безразмерных переменных:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} - A_1(u, x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - A_2(u, x) \frac{du}{dx} \right) = B(u, x), \quad x \in (0, 1),$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} + g_1(u(0, \varepsilon)) = 0, \quad u|_{x=1} = g_2, \quad (2)$$

где наличие малого параметра $\varepsilon \in I_\varepsilon$, $I_\varepsilon := (0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, определяет соотношение между членами уравнения. Обозначения для безразмерных переменных сохранены для удобства.

Преобладание процесса энерговыделения над процессом тепловой диффузии характерно, например, для работы промышленных химических печей-реакторов, в которых протекают эндотермические (экзотермические) процессы, связанные с химической трансформацией вещества. В настоящей работе одномерная модель типа (2) применена в задачах оптимизации работы печей-теплообменников (см. п. 8) и восстановления коэффициента тепловой диффузии нелинейной среды по данным моделирования.

Для задачи (2) предполагаем выполненными следующие условия.

Условие 1. Функции $A_1(u, x)$, $A_2(u, x)$, $B(u, x)$, $g_1(u)$ достаточно гладкие при $x \in [0, 1]$, $u \in I$, I — некоторый интервал.

Условие 2. Вырожденное уравнение $B(u, x) = 0$ имеет решение $u = \varphi(x) \in I$, причём $B_u(\varphi(x), x) > 0$, $x \in [0, 1]$.

Степень гладкости коэффициентов задачи (2) определяется порядком строящегося асимптотического приближения решения.

2. ФОРМАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

Исследуем решение погранслоного типа задачи (2), которое близко к решению $u = \varphi(x)$ вырожденного уравнения внутри отрезка $[0, 1]$, а в точках $x = 0$, $x = 1$ удовлетворяет граничным условиям из задачи (2).

С целью описания решения в окрестности граничной $x = 1$ определим присоединённую систему уравнений:

$$\frac{d\tilde{v}}{d\rho} = A_1(\tilde{u}, 1)\tilde{v}^2 + B(\tilde{u}, 1), \quad \frac{d\tilde{u}}{d\rho} = \tilde{v}, \quad -\infty < \rho < 0, \quad \tilde{u}(-\infty) = \varphi(1), \quad \tilde{u}(0) = g_2. \quad (3)$$

В силу условия 2 точка покоя $(\varphi(1), 0)$ на фазовой плоскости системы (3) классифицируется как точка покоя типа седла. Положим, для определённости, что $g_2 > \varphi(1)$.

Для существования решения краевой задачи (3) достаточно, чтобы сепаратриса, входящая в точку покоя $(\varphi(1), 0)$ при $\rho \rightarrow -\infty$, пересекала прямую $\tilde{u} = g_2$. Уравнение соответствующей сепаратрисы

$$\tilde{v}(\tilde{u}) = \left[2 \int_{\varphi(1)}^{\tilde{u}} B(\xi, 1) \exp \left\{ 2 \int_{\xi}^{\tilde{u}} A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi \right]^{1/2} \quad (4)$$

получается с использованием выражения для первого интеграла системы уравнений из задачи (3), который выписывается в явном виде. С учётом уравнения (4) имеем ограничение на выбор краевого режима при $x = 1$ в задаче (2) (см. ниже условие 3).

Условие 3. Справедливо неравенство

$$\int_{\varphi(1)}^s B(\xi, 1) \exp \left\{ 2 \int_{\xi}^s A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi > 0, \quad \varphi(1) < s \leq g_2 \in I.$$

В соответствии с методом пограничных функций [13] асимптотическое приближение решения погранслоного типа ищем в виде

$$U(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon) + R(\rho, \varepsilon). \tag{5}$$

Здесь $\bar{u}(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$ — регулярное разложение, $\Pi(\tau, \varepsilon) = \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \dots$, $R(\tau, \varepsilon) = R_0(\rho) + \varepsilon R_1(\rho) + \dots$ — погранслоные разложения, описывающие пограничные слои в окрестности граничных точек $x=0$ и $x=1$ соответственно, $\tau = x/\varepsilon$, $\rho = (x-1)/\varepsilon$.

Подставляя разложение (5) в задачу (2) и используя алгоритм построения асимптотики [13], определяем коэффициенты разложения (5). В частности, коэффициенты регулярного разложения при $n \geq 1$ являются решениями линейных уравнений и определяются равенствами $\bar{u}_n(x) = B_u^{-1}(\varphi(x), x) \bar{f}_n(x)$, где $\bar{f}_n(x)$ — известные функции, выражающиеся через члены асимптотики $\bar{u}_k(x)$, $k < n$. Например, $\bar{f}_1(x) = 0$.

Старший член погранслоного разложения $\Pi(\tau, \varepsilon)$ описывается нелинейной задачей

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Pi_0}{d\tau^2} &= A_1(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0) \left(\frac{d\Pi_0}{d\tau} \right)^2 + B(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0), \quad 0 < \tau < +\infty, \\ \frac{d\Pi_0}{d\tau} \Big|_{\tau=0} &= 0, \quad \Pi_0(\infty) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В качестве решения задачи (6) берём функцию $\Pi_0(\tau) = 0$.

Аналогично старший член погранслоного разложения $R(\rho, \varepsilon)$ определяется задачей

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_0}{d\rho^2} &= A_1(\varphi(1) + R_0(\rho), 1) \left(\frac{dR_0}{d\rho} \right)^2 + B(\varphi(1) + R_0(\rho), 1), \quad -\infty < \rho < 0, \\ R_0(0) &= g_2 - \varphi(1), \quad R_0(-\infty) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Системе (7), если в ней положить $\tilde{u}(\rho) := \varphi(1) + R_0(\rho)$, соответствует присоединённая система (3). В силу условия 3 существует решение задачи (7), которое даётся квадратурной формулой

$$\int_{g_2}^{\varphi(1)+R_0(\rho)} \left[2 \int_{\varphi(1)}^{\zeta} B(\xi, 1) \exp \left\{ 2 \int_{\xi}^{\zeta} A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi \right]^{-1/2} d\zeta = \rho. \tag{8}$$

Формула (8) получается с использованием уравнения (4). Имеет место следующая

Лемма 1. *Справедливы оценки*

$$\tilde{C} \exp\{(\bar{\lambda} + \delta)\rho\} \leq |R_0(\rho)| \leq \tilde{C} \exp\{(\bar{\lambda} - \delta)\rho\}, \tag{9}$$

$$\tilde{C} \exp\{(\bar{\lambda} + \delta)\rho\} \leq \tilde{v}(\rho) \leq \tilde{C} \exp\{(\bar{\lambda} - \delta)\rho\}, \tag{10}$$

где $\bar{\lambda} := \sqrt{B_u(\varphi(1), 1)}$, $0 < \delta < \bar{\lambda}$, $-\infty < \rho < 0$.

Под обозначением \tilde{C} подразумеваются некоторые положительные константы, независящие от ε и различные в оценках (9) и (10). Доказательство этого утверждения аналогично соответствующему доказательству из работы [23].

При $n \geq 1$ для нахождения функций $\Pi_n(\tau)$ имеем краевые задачи

$$\frac{d^2 \Pi_n}{d\tau^2} - B_u(\varphi(0), 0) \Pi_n = H_n^-(\tau), \quad \frac{d\Pi_n(0)}{d\tau} = g_l^{(n)}, \quad \Pi_n(+\infty) = 0, \tag{11}$$

где $g_l^{(n)}, H_n^-(\tau)$ — известные на n -м шаге функции, выражающиеся рекуррентно через члены асимптотики порядка $k < n$, в частности, $g_l^{(1)} = -(g_1(\varphi(0)) + \varphi'(0)), H_1^{(-)}(\tau) = 0$. Решения задач (11) даются формулами

$$\begin{aligned} \Pi_n(\tau) = & -\frac{g_l^{(n)}}{\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} e^{-\tau\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} - \\ & -\frac{1}{2\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} \left[\int_0^\tau e^{-\tau\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} \left(e^{s\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} + e^{-s\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} \right) H_n^-(s) ds + \right. \\ & \left. + \int_\tau^\infty \left(e^{-\tau\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} + e^{\tau\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} \right) e^{-s\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} H_n^-(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки $|\Pi_n(\tau)| \leq C e^{-\kappa\tau}, \kappa > 0, n \geq 1$. Здесь и далее под C и κ подразумеваются подходящие положительные константы, значения которых не зависят от ε , различные в разных оценках.

Члены погранслоного разложения $R(\rho, \varepsilon)$ определяются как решения линейных задач ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_n}{d\rho^2} - 2A_1(\tilde{u}, 1)\tilde{v}(\rho) \frac{dR_n}{d\rho} - \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \right] R_n(\rho) = H_n^{(+)}(\rho), \quad -\infty < \rho < 0, \\ R_n(0) = -\bar{u}_n(1), \quad R_n(-\infty) = 0, \end{aligned}$$

и представимы в явном виде

$$R_n(\rho) = \tilde{v}(\rho) \int_0^\rho \frac{d\xi}{p(\xi)\tilde{v}^2(\xi)} \int_{-\infty}^\xi \tilde{v}(s)p(s)H_n^{(+)}(s) ds - \bar{u}_n(1) \frac{\tilde{v}(\rho)}{\tilde{v}(0)}, \tag{12}$$

где $p(\rho) = \exp\{-\int_0^\rho 2A_1(\tilde{u}, 1)\tilde{v}d\xi\}, H_n^{(+)}(\rho)$ — известные на n -м шаге функции, выражающиеся рекуррентно через члены асимптотики порядка $k < n$. В частности,

$$\begin{aligned} H_1^{(+)}(\rho) = & \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \varphi'(1) + \frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial x} \right] \tilde{v}^2(\rho)\rho + \\ & + [2A_1(\tilde{u}, 1)\varphi'(1) + A_2(\tilde{u}, 1)] \tilde{v}(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \rho\varphi'(1) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial x} \rho. \end{aligned}$$

Используя лемму 1 и формулы (12), по аналогии с работой [23] получаем оценки $|R_n(\rho)| < C e^{\kappa\rho}, n \geq 1$.

Таким образом, ряд (5) построен. Обозначим через $U_n(x, \varepsilon)$ частичную сумму n -го порядка ряда (5):

$$U_n(x, \varepsilon) := \varphi(x) + R_0(\rho) + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k (\bar{u}_k(x) + \Pi_k(\tau) + R_k(\rho)). \tag{13}$$

Из алгоритма построения ряда (5) следует, что

$$L_\varepsilon[U_n] := \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 U_n}{dx^2} - A_1(U_n, x) \left(\frac{dU_n}{dx} \right)^2 - A_2(U_n, x) \frac{dU_n}{dx} \right) - B(U_n, x) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in (0, 1), \tag{14}$$

$$N[U_n]|_{x=0} := \frac{dU_n(0, \varepsilon)}{dx} + g_1(U_n(0, \varepsilon)) = O(\varepsilon^n), \quad U_n(1, \varepsilon) = g_2, \quad n \geq 0. \tag{15}$$

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Доказательство существования классического решения задачи (2), для которого справедливо разложение (5), основано на использовании принципа сравнения (см., например, [16, 17]).

Функции $\alpha(x, \varepsilon), \beta(x, \varepsilon) \in C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1] \cap C[0, 1]$ называются *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (2)* соответственно, если при $\varepsilon \in I_\varepsilon$ выполняются дифференциальные неравенства

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1], \quad L_\varepsilon[\beta] \leq 0 \leq L_\varepsilon[\alpha], \quad x \in (0, 1),$$

$$N[\beta]|_{x=0} \leq 0 \leq N[\alpha]|_{x=0}, \quad \beta(1, \varepsilon) \geq g_2, \quad \alpha(1, \varepsilon) \leq g_2.$$

Существование нижнего и верхнего решений задачи (2) гарантирует существование решения $u(x, \varepsilon)$ этой задачи такого, что $\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$. Основная идея метода [15] состоит в получении нижнего и верхнего решений путём модификаций частичной суммы (13) определённым образом:

$$\alpha_n(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) - \varepsilon^n(e^{-\mu\tau} - r_\alpha(\rho) + \gamma),$$

$$\beta_n(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + \varepsilon^n(e^{-\mu\tau} + r_\beta(\rho) + \gamma) \tag{16}$$

при фиксированном n , где $n \geq 1$, числа $\mu > 0, \gamma > 0$, параметр $\varepsilon \in I_\varepsilon$, а функции $r_{\alpha, \beta}(\rho)$ являются решениями задач вида

$$\frac{d^2 r_{\alpha, \beta}}{d\rho^2} - 2A_1(\tilde{u}, 1)\tilde{v}(\rho) \frac{dr_{\alpha, \beta}}{d\rho} - \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \right] r_{\alpha, \beta} =$$

$$= \pm C e^{\kappa\rho} \mp \gamma \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} - \frac{\partial B(\varphi(1), 1)}{\partial u} \right],$$

$$r_{\alpha, \beta}(0) = 0, \quad r_{\alpha, \beta}(-\infty) = 0,$$

$C > 0, \kappa > 0$. В правой части уравнения знаки в верхней строке соответствуют индексу “ α ”, знаки в нижней строке — индексу “ β ”.

Соответствующий выбор параметров γ, μ, C, κ обеспечивает выполнение дифференциальных неравенств. Например, с учётом оценки (14) имеем

$$L_\varepsilon[\beta_n] = O(\varepsilon^{n+1}) - \varepsilon^n \gamma B_u(\varphi(x), x) + \varepsilon^n e^{-\mu\tau} (\mu^2 - B_u(\varphi(0), 0)) - \varepsilon^n C e^{\kappa\rho} \leq 0$$

при достаточно большом γ и достаточно малом μ . Аналогично $L_\varepsilon[\alpha_n] \geq 0$.

Докажем упорядоченность верхнего и нижнего решений. Для этого рассмотрим разность

$$\beta_n(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon) = 2\varepsilon^n \gamma + \varepsilon^n (r_\beta(\rho) - r_\alpha(\rho)) + 2\varepsilon^n e^{-\mu\tau}.$$

Пусть $F_n(\rho) := r_\beta(\rho) - r_\alpha(\rho)$. Тогда функция F_n является решением задачи

$$\frac{d^2 F_n}{d\rho^2} - 2A_1(\tilde{u}, 1)\tilde{v}(\rho) \frac{dF_n}{d\rho} - \left(\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \right) F_n =$$

$$= -2C e^{\kappa\rho} + 2\gamma \left(\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} - \frac{\partial B(\varphi(1), 1)}{\partial u} \right),$$

$$F_n(0) = 0, \quad F_n(-\infty) = 0$$

и представима в явном виде:

$$F_n(\rho) = -\tilde{v}(\rho) \int_{\rho}^0 \frac{d\xi}{p(\xi)\tilde{v}^2(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{v}(s)p(s) \left[-2Ce^{ks} + 2\gamma \left(\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \tilde{v}^2(s) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} - \frac{\partial B(\varphi(1), 1)}{\partial u} \right) \right] ds.$$

Поскольку выражение в круглых скобках экспоненциально убывает при $s \rightarrow -\infty$, то, выбирая параметры C , κ , γ так, чтобы выполнялось неравенство $F_n(\rho) \geq 0$, $-\infty < \rho \leq 0$, имеем $\beta_n(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon) \geq 0$.

Учитывая равенства (15), в граничных точках находим

$$N[\beta_n]|_{x=0} = -\mu\varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n) < 0, \quad N[\alpha_n]|_{x=0} = \mu\varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n) > 0, \\ \beta_n|_{x=1} = g_2 + \varepsilon^n \gamma > g_2, \quad \alpha_n|_{x=1} = g_2 - \varepsilon^n \gamma < g_2,$$

так как $\mu > 0$, $\gamma > 0$, а ε — достаточно малое. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ существует классическое решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2) такое, что для любого фиксированного $n \geq 0$ имеет место оценка в равномерной норме

$$\|u(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $U_n(x, \varepsilon)$ — частичная сумма (13).

Уравнение из задачи (2) может быть представлено в виде нелинейной системы из двух уравнений первого порядка. Переписанная таким образом задача (2) классифицируется как двухточечная задача для тихоновской системы с нелинейным граничным условием в условно устойчивом случае [13]. С учётом выводов работы [13] имеем оценку

$$\left\| \frac{du(x, \varepsilon)}{dx} - \frac{dU_n(x, \varepsilon)}{dx} \right\| = O(\varepsilon^n), \quad n \geq 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (17)$$

Лемма 2. Пусть $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ — нижнее и верхнее решения задачи (2), а $u_\varepsilon(x) := u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (2) из теоремы 1. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ имеют место оценки

$$\left\| \frac{d(\beta_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right\| = O(\varepsilon^{n-1}), \quad \left\| \frac{d(\alpha_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right\| = O(\varepsilon^{n-1}), \quad n \geq 1, \quad x \in [0, 1].$$

Докажем, например, вторую оценку:

$$\frac{d}{dx}(\alpha_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x)) = \frac{d}{dx}(\alpha_n(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)) + \frac{d}{dx}(U_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x)). \quad (18)$$

Из равенства (18) с учётом (16) и (17) следует искомая оценка.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

Асимптотический метод дифференциальных неравенств используется для исследования асимптотической устойчивости по Ляпунову решений с пограничными и внутренними слоями как решений соответствующих параболических задач (см., например, [24]). Исследуем

асимптотическую устойчивость стационарного решения $u_\varepsilon(x)$ как решения следующей параболической задачи:

$$\begin{aligned}
 M_\varepsilon[v] := \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - A_1(v, x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - A_2(v, x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - B(v, x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\
 \left. \frac{\partial v(x, t, \varepsilon)}{\partial x} \right|_{x=0} + g_1(v(0, t, \varepsilon)) = 0, \quad v(1, t) = g_2, \quad t \geq 0, \\
 v(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1],
 \end{aligned} \tag{19}$$

при $u_{init}(x, \varepsilon) = u_\varepsilon(x)$. Будем полагать, что дополнительные условия в задаче (19) согласованы:

$$\left. \frac{\partial u_{init}}{\partial x} \right|_{x=0} + g_1(u_{init}(0, \varepsilon)) = 0, \quad u_{init}(1, \varepsilon) = g_2.$$

Функции $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon), \hat{\beta}(x, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}^{2,1}((0, 1) \times (0, +\infty)) \cap \mathbb{C}^{1,0}([0, 1] \times [0, +\infty)) \cap \mathbb{C}([0, 1] \times [0, +\infty))$ называются, соответственно, *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (19)*, если при $\varepsilon \in I_\varepsilon$ выполняются неравенства:

- 1⁰. $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, t, \varepsilon), x \in [0, 1], t \geq 0;$
- 2⁰. $M_\varepsilon[\hat{\beta}] \leq 0 \leq M_\varepsilon[\hat{\alpha}], x \in (0, 1), t > 0;$
- 3⁰. $N[\hat{\beta}]|_{x=0} \leq 0 \leq N[\hat{\alpha}]|_{x=0}, \hat{\beta}(1, t, \varepsilon) \geq g_2, \hat{\alpha}(1, t, \varepsilon) \leq g_2, t \geq 0;$
- 4⁰. $\hat{\alpha}(x, 0, \varepsilon) \leq u_{init}(x, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, 0, \varepsilon), x \in [0, 1].$

Известно [17], что если существуют функции $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$, то задача (19) имеет решение $v(x, t, \varepsilon)$ такое, что $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) \leq v(x, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$.

Пусть

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon) &= u_\varepsilon(x) + (\alpha_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))e^{-\lambda t}, \\
 \hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon) &= u_\varepsilon(x) + (\beta_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))e^{-\lambda t},
 \end{aligned} \tag{20}$$

где $\lambda > 0, n$ фиксировано ($n \geq 1$). В силу свойств функций $\alpha_n(x, \varepsilon), \beta_n(x, \varepsilon)$ функции (20) удовлетворяют неравенству 1⁰, а также неравенствам 3⁰ при $x = 1$. Неравенство 4⁰ выполняется, если $\alpha_n(x, \varepsilon) \leq u_{init}(x, \varepsilon) \leq \beta_n(x, \varepsilon)$. Покажем, что функции (20) удовлетворяют неравенствам 2⁰ и неравенствам 3⁰ при $x = 0$. С использованием леммы 2 докажем выполнение неравенств 2⁰. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 M_\varepsilon[\hat{\beta}_n] &= \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 \hat{\beta}_n}{dx^2} - A_1(\hat{\beta}_n, x) \left(\frac{d\hat{\beta}_n}{dx} \right)^2 - A_2(\hat{\beta}_n, x) \frac{d\hat{\beta}_n}{dx} \right) + \varepsilon^2 \lambda (\beta_n - u_\varepsilon) e^{-\lambda t} - B(\hat{\beta}_n, x) = \\
 &= L_\varepsilon[u_\varepsilon] + e^{-\lambda t} [L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u_\varepsilon]] + \varepsilon^2 e^{-\lambda t} \left(A_1(\beta_n, x) \left(\frac{d\beta_n}{dx} \right)^2 + A_2(\beta_n, x) \frac{d\beta_n}{dx} \right) - \\
 &- \varepsilon^2 e^{-\lambda t} \left(A_1(u_\varepsilon, x) \left(\frac{du_\varepsilon}{dx} \right)^2 + A_2(u_\varepsilon, x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) + \varepsilon^2 \left(A_1(u_\varepsilon, x) \left(\frac{du_\varepsilon}{dx} \right)^2 + A_2(u_\varepsilon, x) \frac{du_\varepsilon}{dx} - A_1(\hat{\beta}_n, x) \left(\frac{d\hat{\beta}_n}{dx} \right)^2 - \right. \\
 &- \left. A_2(\hat{\beta}_n, x) \frac{d\hat{\beta}_n}{dx} \right) + \varepsilon^2 \lambda (\beta_n - u_\varepsilon) e^{-\lambda t} + B(u_\varepsilon, x) - B(\hat{\beta}_n, x) + e^{-\lambda t} [B(\beta_n, x) - B(u_\varepsilon, x)] = \\
 &= L_\varepsilon[u_\varepsilon] + e^{-\lambda t} [L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u_\varepsilon]] + \varepsilon^2 e^{-\lambda t} \left[f \left(\frac{d\beta_n}{dx}, \beta_n, x \right) - f \left(\frac{du_\varepsilon}{dx}, u_\varepsilon, x \right) \right] + \varepsilon^2 \left[f \left(\frac{du_\varepsilon}{dx}, u_\varepsilon, x \right) - \right. \\
 &- \left. f \left(\frac{d\hat{\beta}_n}{dx}, \hat{\beta}_n, x \right) \right] + \varepsilon^2 \lambda (\beta_n - u_\varepsilon) e^{-\lambda t} + B(u_\varepsilon, x) - B(\hat{\beta}_n, x) + e^{-\lambda t} [B(\beta_n, x) - B(u_\varepsilon, x)],
 \end{aligned}$$

где $f(v, u, x) := A_1(u, x)v^2 + A_2(u, x)v$. Применяя формулу Лагранжа, теорему 1 и лемму 2, находим

$$\begin{aligned}
 M_\varepsilon[\hat{\beta}_n] &= L_\varepsilon[u_\varepsilon] + e^{-\lambda t} \left[L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u_\varepsilon] + f_{vv}^*(\theta_1 - \theta_3 e^{-\lambda t}) \left(\varepsilon \frac{d(\beta_n - u_\varepsilon)}{dx} \right)^2 + \right. \\
 &+ \varepsilon^2 f_{uu}^{**}(\theta_2 - \theta_4 e^{-\lambda t})(\beta_n - u_\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 (f_{vu}^*(\theta_2 - \theta_4 e^{-\lambda t}) + f_{uv}^{**}(\theta_1 - \theta_3 e^{-\lambda t}))(\beta_n - u_\varepsilon) \frac{d}{dx}(\beta_n - u_\varepsilon) + \\
 &\left. + B_{uu}^*(\theta_5 - \theta_6 e^{-\lambda t})(\beta_n - u_\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \lambda(\beta_n - u_\varepsilon) \right] \leq \\
 &\leq e^{-\lambda t} (-\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi(x), x) + O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{n+2}) + O(\varepsilon^{2n})) < 0, \quad n \geq 1,
 \end{aligned}$$

при достаточно большом γ и $\varepsilon \in I_\varepsilon$. Здесь f_{vv}^* , f_{uu}^{**} , f_{vu}^* , f_{uv}^{**} и B_{uu}^* — значения производных в некоторых промежуточных точках, $0 < \theta_i < 1$, $i = \overline{1, 6}$. Аналогично $M_\varepsilon[\hat{\alpha}_n] \geq 0$.

Учитывая равенства (15) и граничное условие при $x = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
 N[\hat{\beta}_n] \Big|_{x=0} &= \frac{\partial [u_\varepsilon(0) + (\beta_n(0, \varepsilon) - u_\varepsilon(0))e^{-\lambda t}]}{\partial x} + g_1(u_\varepsilon(0) + (\beta_n(0, \varepsilon) - u_\varepsilon(0))e^{-\lambda t}) + \\
 &+ g_1(u_\varepsilon(0)) - g_1(u_\varepsilon(0)) + (g_1(\beta_n(0, \varepsilon)) - g_1(\beta_n(0, \varepsilon)))e^{-\lambda t} + (g_1(u_\varepsilon(0)) - g_1(u_\varepsilon(0)))e^{-\lambda t} = \\
 &= e^{-\lambda t} \left(g_{1u}^*(\beta_n - u_\varepsilon) \Big|_{x=0} - g_{1u}^{**}(\beta_n - u_\varepsilon) \Big|_{x=0} - \mu \varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n) \right) = \\
 &= e^{-\lambda t} (-\mu \varepsilon^{n-1} - g_{1uu}^*(\theta_7 - \theta_8 e^{-\lambda t})(\beta_n - u_\varepsilon) \Big|_{x=0}^2 + O(\varepsilon^n)) = \\
 &= e^{-\lambda t} (-\mu \varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{2n})) < 0, \quad n \geq 1,
 \end{aligned}$$

где g_{1u}^* , g_{1u}^{**} и g_{1uu}^* — значения производных в некоторых промежуточных точках. Аналогично $N[\hat{\alpha}_n] \Big|_{x=0} > 0$.

Итак, функции $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$ при соответствующем выборе параметров γ , μ и λ , достаточно малом ε и фиксированном $n \geq 1$ являются нижним и верхним решениями задачи (19). Следовательно, задача (19) имеет решение $v(x, t, \varepsilon)$ такое, что $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon) \leq v(x, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$. С учётом этого приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ стационарное решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (19) асимптотически устойчиво по Ляпунову с локальной областью притяжения $u_{init}(x, \varepsilon) \in [\alpha_1(x, \varepsilon), \beta_1(x, \varepsilon)]$ и, следовательно, единственно в этой области.

5. КОНТРАСТНАЯ СТРУКТУРА ТИПА СТУПЕНЬКИ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} - A_1(u, x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - A_2(u, x) \frac{du}{dx} \right) &= B(u, x), \quad x \in (0, 1), \\
 N_1[u] \Big|_{x=0} &= 0, \quad N_2[u] \Big|_{x=1} = 0,
 \end{aligned} \tag{21}$$

где $\varepsilon \in I_\varepsilon$, $I_\varepsilon := (0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, $N_i[u] := \pm du/dx + g_i(u)$ — нелинейные операторы, причём знак “+” соответствует индексу $i = 1$, знак “−” соответствует индексу $i = 2$. Для задачи (21) предполагаем выполненными следующие условия.

Условие 4. Функции $A_1(u, x)$, $A_2(u, x)$, $B(u, x)$, $g_i(u)$ достаточно гладкие при $x \in [0, 1]$, $u \in I$, I — некоторый интервал.

Условие 5. Вырожденное уравнение $B(u, x) = 0$ имеет три корня $u = \varphi_i(x) \in I$, $i = \overline{1, 3}$, причём $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$, $B_u(\varphi_i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$, и $B_u(\varphi_2(x), x) < 0$.

Степень гладкости коэффициентов задачи определяется порядком асимптотического приближения решения, которое предстоит построить.

Асимптотическое приближение решения типа контрастной структуры, соответствующее переходу с корня вырожденного уравнения $\varphi_1(x)$ на корень $\varphi_3(x)$, получается путём C^1 -сшивания двух асимптотик погранслоного типа:

$$U^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \Pi^{(\mp)}(\tau_{(\mp)}, \varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi, \hat{x}, \varepsilon), \tag{22}$$

где

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x) + \varepsilon^2 \bar{u}_2^{(\mp)}(x) + \dots, \quad x \in [0, 1], \tag{23}$$

$$\Pi^{(\mp)}(\tau_{(\mp)}, \varepsilon) = \varepsilon \Pi_1^{(\mp)}(\tau_{(\mp)}) + \varepsilon^2 \Pi_2^{(\mp)}(\tau_{(\mp)}) + \dots, \quad \tau_{(-)} = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tau_{(+)} = \frac{x-1}{\varepsilon}, \tag{24}$$

$$Q^{(\mp)}(\xi, \hat{x}, \varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) + \varepsilon^2 Q_2^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) + \dots, \quad \xi = \frac{x-\hat{x}}{\varepsilon}. \tag{25}$$

Здесь (23) — регулярные ряды, $\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x)$, $\bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(x)$; (24) — пограничные ряды, описывающие пограничные слои в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ соответственно; (25) — функции внутреннего переходного слоя, описывающие пограничные слои в окрестности точки сшивания $x = \hat{x}$, положение которой определим условием $u(\hat{x}, \varepsilon) = \varphi_2(\hat{x})$, а саму точку $\hat{x}(\varepsilon)$ найдем в виде разложения по степеням ε в процессе построения асимптотического приближения решения с внутренним слоем. Ниже будет показано, что задачи, определяющие коэффициенты разложения (25), содержат зависимость от \hat{x} как от параметра, чем и объясняется наличие зависимости коэффициентов разложения (25) от \hat{x} .

С целью построения асимптотического приближения (22) рассмотрим две вспомогательные краевые задачи:

$$\varepsilon^2(d^2u/dx^2 - f(du/dx, u, x)) = B(u, x), \quad 0 < x < \hat{x}, \quad N_1[u]|_{x=0} = 0, \quad u(\hat{x}, \varepsilon) = \varphi_2(\hat{x}), \tag{26}$$

$$\varepsilon^2(d^2u/dx^2 - f(du/dx, u, x)) = B(u, x), \quad \hat{x} < x < 1, \quad u(\hat{x}, \varepsilon) = \varphi_2(\hat{x}), \quad N_2[u]|_{x=1} = 0. \tag{27}$$

При условиях 4 и 5 существуют классические решения погранслоного типа задач (26) и (27), асимптотические приближения которых имеют вид (22), что следует из алгоритмов пп. 2 и 3, при этом задаче (26) отвечает разложение (22) с индексом “−”; задаче (27) — разложение (22) с индексом “+”. С использованием алгоритма построения формальной асимптотики из п. 2 получим последовательность задач для определения членов разложения (22).

5.1. ПРИСОЕДИНЁННАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим присоединённую систему уравнений

$$\frac{d\tilde{v}}{d\xi} = A_1(\tilde{u}, x)\tilde{v}^2 + B(\tilde{u}, x), \quad \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \tilde{v}, \tag{28}$$

где x — параметр. На фазовой плоскости системы (28) сепаратрисы седел $(\varphi_1(x), 0)$ и $(\varphi_3(x), 0)$ при $\tilde{v} > 0$ описываются явными уравнениями

$$\tilde{v}^{(-)}(\tilde{u}, x) = \left[2 \int_{\varphi_1(x)}^{\tilde{u}} B(\mu, x) \exp \left\{ 2 \int_{\mu}^{\tilde{u}} A_1(\chi, x) d\chi \right\} d\mu \right]^{1/2}, \tag{29}$$

$$\tilde{v}^{(+)}(\tilde{u}, x) = \left[2 \int_{\varphi_3(x)}^{\tilde{u}} B(\mu, x) \exp \left\{ 2 \int_{\mu}^{\tilde{u}} A_1(\chi, x) d\chi \right\} d\mu \right]^{1/2}. \tag{30}$$

В силу вида функции $B(u, x)$ справедливы неравенства

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} B(\mu, x) \exp\left\{2 \int_{\mu}^{\varphi_2(x)} A_1(\chi, x) d\chi\right\} d\mu > 0,$$

$$\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_2(x)} B(\mu, x) \exp\left\{2 \int_{\mu}^{\varphi_2(x)} A_1(\chi, x) d\chi\right\} d\mu > 0, \tag{31}$$

которые гарантируют пересечение сепаратрис вертикальной прямой $\tilde{u} = \varphi_2(x)$ при $x \in [0, 1]$.

Определим функцию

$$H(x) = \tilde{v}^{(+)}(\varphi_2(x), x) - \tilde{v}^{(-)}(\varphi_2(x), x) = \frac{-2I(x)}{\tilde{v}^{(+)}(\varphi_2(x), x) + \tilde{v}^{(-)}(\varphi_2(x), x)},$$

где $I(x) := \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} B(\mu, x) \exp\left\{2 \int_{\mu}^{\varphi_2(x)} A_1(\chi, x) d\chi\right\} d\mu$. Заметим, что

$$H'(x) = -\frac{2I'(x)}{\tilde{v}^{(+)}(\varphi_2(x), x) + \tilde{v}^{(-)}(\varphi_2(x), x)} + \frac{2I(x)(\tilde{v}_x^{(+)}(\varphi_2(x), x) + \tilde{v}_x^{(-)}(\varphi_2(x), x))}{(\tilde{v}^{(+)}(\varphi_2(x), x) + \tilde{v}^{(-)}(\varphi_2(x), x))^2}. \tag{32}$$

Достаточными условиями существования контрастной структуры в задаче (21) являются следующие требования.

Условие 6. Существует значение $x = x_0$ такое, что $I(x_0) = 0$, $x_0 \in (0, 1)$.

Условие 7. Справедливо неравенство $I'(x_0) < 0$.

При выполнении условия 6 на фазовой плоскости системы (28) при $x = x_0$ реализуется ячейка [14]: седла $(\varphi_1(x_0), 0)$ и $(\varphi_3(x_0), 0)$ соединены двумя сепаратрисами, одна из которых расположена в полуплоскости $\tilde{v} < 0$. Существование двух соединительных сепаратрис при некотором значении параметра x обеспечивает сосуществование двух контрастных структур в задаче (21). Заметим, что условие $I'(x_0) < 0$ в силу равенства (32) эквивалентно требованию $H'(x_0) > 0$ и возникает в задачах с симметричным расположением соединительных сепаратрис на фазовой плоскости (см., например, [5, 15]), которое соответствует ячейке.

5.2. ФУНКЦИИ ВНУТРЕННЕГО СЛОЯ

В нулевом приближении имеем задачи

$$\frac{d^2 \tilde{u}^{(\mp)}}{d\xi^2} = A_1(\tilde{u}^{(\mp)}, \hat{x}) \left(\frac{d\tilde{u}^{(\mp)}}{d\xi}\right)^2 + B(\tilde{u}^{(\mp)}, \hat{x}), \quad \tilde{u}^{(\mp)}(0) = \varphi_2(\hat{x}), \quad \tilde{u}^{(\mp)}(\mp\infty) = \bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x}), \tag{33}$$

где $\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) = \bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x}) + Q_0^{(\mp)}(\xi, \hat{x})$.

Уравнениям из задач (33) с условиями на бесконечности соответствует присоединённая система (28) при $x = \hat{x}$ с условиями на бесконечности $\tilde{u}^{(\mp)}(\mp\infty) = \bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x})$, $\tilde{v}^{(\mp)}(\mp\infty) = 0$. В силу неравенств (31) задачи (33) разрешимы и их решения даются квадратурными формулами, которые получаются с использованием уравнений (29), (30):

$$\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) = \int_{\varphi_2(\hat{x})}^{\xi} \left[2 \int_{\bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x})}^{\zeta} B(\lambda, \hat{x}) \exp\left\{2 \int_{\lambda}^{\zeta} A_1(\chi, \hat{x}) d\chi\right\} d\lambda \right]^{-1/2} d\zeta = \xi. \tag{34}$$

При $n \geq 1$ имеем линейные задачи

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Q_n^{(\mp)}}{d\xi^2} - 2A_1(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}), \hat{x}) \tilde{u}_\xi^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) \frac{dQ_n^{(\mp)}}{d\xi} - \\ & - \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}), \hat{x})}{\partial u} (\tilde{u}_\xi^{(\mp)}(\xi, \hat{x}))^2 + B_u(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}), \hat{x}) \right] Q_n^{(\mp)}(\xi) = H_n^{(\mp)}(\xi, \hat{x}), \\ & Q_n^{(\mp)}(0) = -\bar{u}_n^{(\mp)}(\hat{x}), \quad Q_n^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \end{aligned}$$

где $H_n^{(\mp)}(\xi, \hat{x})$ — известные функции, $\tilde{u}_\xi^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) := \partial \tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) / \partial \xi$. Функции $Q_n^{(\mp)}(\xi, \hat{x})$ представимы в явном виде по аналогии с функциями (12).

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТОЧКИ СШИВАНИЯ

Положение точки сшивания \hat{x} определяется путём C^1 -сшивания асимптотик (22) при $x = \hat{x}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{dU^{(+)}}{dx} - \frac{dU^{(-)}}{dx} \right) \Big|_{x=\hat{x}} &= \frac{dQ_0^{(+)}(0, \hat{x})}{d\xi} - \frac{dQ_0^{(-)}(0, \hat{x})}{d\xi} + \varepsilon \left(\frac{d\bar{u}_0^{(+)}(\hat{x})}{dx} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(\hat{x})}{dx} \right) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{dQ_1^{(+)}(0, \hat{x})}{d\xi} - \frac{dQ_1^{(-)}(0, \hat{x})}{d\xi} \right) + \dots = H(\hat{x}(\varepsilon)) + \varepsilon G(\hat{x}(\varepsilon)) + \dots = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} G(\hat{x}(\varepsilon)) &:= \frac{dQ_1^{(+)}(0, \hat{x})}{d\xi} - \frac{dQ_1^{(-)}(0, \hat{x})}{d\xi} + \varphi'_3(\hat{x}) - \varphi'_1(\hat{x}) = \\ &= \frac{1}{\tilde{u}_\xi^{(+)}(0, \hat{x})} \int_{+\infty}^0 p^{(+)}(s, \hat{x}) \tilde{u}_\xi^{(+)}(s, \hat{x}) H_1^{(+)}(s, \hat{x}) ds - \\ &- \frac{1}{\tilde{u}_\xi^{(-)}(0, \hat{x})} \int_{-\infty}^0 p^{(-)}(s, \hat{x}) \tilde{u}_\xi^{(-)}(s, \hat{x}) H_1^{(-)}(s, \hat{x}) ds + \varphi'_3(\hat{x}) - \varphi'_1(\hat{x}) \end{aligned}$$

с учётом того, что $\bar{u}_1^{(\mp)}(\xi) = 0$, функция $p^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) := \exp\{-\int_0^\xi 2A_1(\tilde{u}^{(\mp)}(\chi, \hat{x}), \hat{x}) \tilde{u}_\xi^{(\mp)}(\chi, \hat{x}) d\chi\}$.

Полагая $\hat{x} = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$, где x_0 определено условием 6, и представляя в виде разложения по степеням ε каждое слагаемое в уравнении (35), приходим к равенству

$$H(x_0) + \varepsilon (H'(x_0) x_1 + G(x_0)) + \dots = 0, \tag{36}$$

выполнение которого в нулевом приближении обеспечивается условием 6. Следовательно, существует решение $\tilde{u}(\xi, x_0) \in C^2(\mathbb{R})$ задач (33), представимое квадратурной формулой (34) при $\hat{x} = x_0$ и описывающее внутренний слой контрастной структуры в нулевом приближении.

Приравнявая к нулю коэффициенты при ε^n в уравнении (36), получаем однозначно разрешимые уравнения относительно x_n , $n > 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \quad & I'(x_0) x_1 - \tilde{u}_\xi(\varphi_2(x_0), x_0) G(x_0) = 0, \\ \varepsilon^n: \quad & I'(x_0) x_n + \tilde{f}_n(x_0) = 0, \quad n > 1, \end{aligned}$$

где $\tilde{u}_\xi(\varphi_2(x_0), x_0) := \tilde{u}_\xi^{(+)}(\varphi_2(x_0), x_0) = \tilde{u}_\xi^{(-)}(\varphi_2(x_0), x_0)$, $\tilde{f}_n(x_0)$ — известные значения. В качестве примера получим выражение для $G(x_0)$. С этой целью рассмотрим выражение

$$H_1^{(\mp)}(\xi) = \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, x_0)}{\partial u} \tilde{u}_0^{(\mp)}(x_0) + \frac{\partial A_1(\tilde{u}, x_0)}{\partial x} \right] \left(\frac{d\tilde{u}}{d\xi} \right)^2 \xi + \\ + \left[2A_1(\tilde{u}, x_0) \tilde{u}_0^{(\mp)}(x_0) + A_2(\tilde{u}, x_0) \right] \frac{d\tilde{u}}{d\xi} + B_u(\tilde{u}, x_0) \tilde{u}_0^{(\mp)}(x_0) \xi + B_x(\tilde{u}, x_0) \xi,$$

где учтено, что $B_u(\tilde{u}_0^{(\mp)}(x_0), x_0) \tilde{u}_0^{\prime(\mp)}(x_0) + B_x(\tilde{u}_0^{(\mp)}(x_0), x_0) = 0$. Выполняя преобразование выражения для $G(x_0)$ аналогично тому как это было сделано в работе [14], находим

$$G(x_0) = -\frac{1}{\tilde{u}_\xi(\varphi_2(x_0), x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x_0) \tilde{u}_\xi(s, x_0) \tilde{H}_1(s, x_0) ds,$$

где

$$\tilde{H}_1(\xi, x_0) = A_{1_x}(\tilde{u}, x_0) \tilde{v}^2 \xi + A_2(\tilde{u}, x_0) \tilde{v} + B_x(\tilde{u}, x_0) \xi.$$

Итак, построено асимптотическое приближение (22) решения типа контрастной структуры задачи (21). Обозначим через $U_n^\mp(x, \varepsilon)$ частичную сумму n -го порядка асимптотического ряда (22). Из алгоритма построения формальной асимптотики следует

$$L_\varepsilon[U_n^{(\mp)}] := \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 U_n^{(\mp)}}{dx^2} - A_1(U_n^{(\mp)}, x) \left(\frac{dU_n^{(\mp)}}{dx} \right)^2 - A_2(U_n^{(\mp)}, x) \frac{dU_n^{(\mp)}}{dx} \right) - B(U_n^{(\mp)}, x) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad (37)$$

$$N_1[U_n^{(-)}] \Big|_{x=0} := \frac{dU_n^{(-)}(0, \varepsilon)}{dx} + g_1(U_n^{(-)}(0, \varepsilon)) = O(\varepsilon^n), \quad N_2[U_n^{(+)}] \Big|_{x=1} = O(\varepsilon^n). \quad (38)$$

6. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ТИПА КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ

Функции $\alpha(x, \varepsilon), \beta(x, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2((0, \hat{x}_{\alpha, \beta}) \cup (\hat{x}_{\alpha, \beta}, 1)) \cap \mathbb{C}^1([0, \hat{x}_{\alpha, \beta}) \cup (\hat{x}_{\alpha, \beta}, 1]) \cap \mathbb{C}[0, 1]$ называются соответственно *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (21)*, если при $\varepsilon \in I_\varepsilon$ выполняются следующие неравенства:

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1], \quad L_\varepsilon[\beta(x, \varepsilon)] \leq 0 \leq L_\varepsilon[\alpha(x, \varepsilon)], \quad x \in (0, 1),$$

$$N_i[\beta(x, \varepsilon)] \Big|_{x=i-1} \leq 0 \leq N_i[\alpha(x, \varepsilon)] \Big|_{x=i-1}, \quad i = 1, 2,$$

$$\alpha'_x(\hat{x}_\alpha - 0, \varepsilon) - \alpha'_x(\hat{x}_\alpha + 0, \varepsilon) \leq 0, \quad \beta'_x(\hat{x}_\beta - 0, \varepsilon) - \beta'_x(\hat{x}_\beta + 0, \varepsilon) \geq 0.$$

При фиксированном n , $n \geq 2$, числах $\mu^{(\mp)} > 0$, $\gamma > 0$, параметре $\varepsilon \in I_\varepsilon$ определим верхнее решение $\beta_n(x, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\beta_n^{(-)}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + Q_0^{(-)}(\xi_\beta) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x) + \Pi_i^{(-)}(\tau_{(-)}) + Q_i^{(-)}(\xi_\beta) \right) + \\ + \varepsilon^n \left(\gamma + Q_\beta^{(-)}(\xi_\beta) + e^{-\mu^{(-)\tau_{(-)}}} \right), \quad 0 \leq x \leq \hat{x}_\beta;$$

$$\beta_n^{(+)}(x, \varepsilon) = \varphi_3(x) + Q_0^{(+)}(\xi_\beta) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x) + \Pi_i^{(+)}(\tau_{(+)}) + Q_i^{(+)}(\xi_\beta) \right) + \\ + \varepsilon^n \left(\gamma + Q_\beta^{(+)}(\xi_\beta) + e^{\mu^{(+)\tau_{(+)}}} \right), \quad \hat{x}_\beta \leq x \leq 1,$$

где $\hat{x}_\beta = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i x_i + \varepsilon^n(x_n - \delta)$, $\delta > 0$, $\xi_\beta = (x - \hat{x}_\beta)/\varepsilon$. Функции $Q_i^{(\mp)}(\xi_\beta)$ определяются как решения задач относительно функций $Q_i^{(\mp)}(\xi)$ при замене ξ на ξ_β и \hat{x} на \hat{x}_β . Уравнения для определения функций $Q_\beta^{(\mp)}(\xi_\beta)$ получаются при замене в уравнениях относительно функций $Q_n^{(\mp)}(\xi)$ переменных ξ на ξ_β и \hat{x} на \hat{x}_β , а также замене неоднородности уравнения на следующую функцию:

$$\gamma \left(B_u(\tilde{u}_\beta^{(\mp)}(\xi_\beta), \hat{x}_\beta) - B_u(\bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x}_\beta), \hat{x}_\beta) \right) + \gamma A_{1u}(\tilde{u}_\beta^{(\mp)}(\xi_\beta), \hat{x}_\beta) \left(\tilde{u}_\beta^{(\mp)}(\xi_\beta) \right)^2,$$

причём $Q_\beta^{(\mp)}(0) = -\gamma$, $Q_\beta^{(\mp)}(\mp\infty) = 0$, $\tilde{u}_\beta^{(\mp)} = \tilde{u}^{(\mp)}(\xi_\beta, \hat{x}_\beta)$. Аналогично определяется нижнее решение.

Доказательство того, что полученная пара функций является упорядоченной, проводится как и в работе [15]. Аналогично тому как это сделано в п. 3 с учётом оценок (37), (38) проверяется выполнение дифференциальных неравенств при $x \in (0, 1)$ и на границе области. В частности,

$$L_\varepsilon[\beta_n^{(-)}] = -\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi_1(x), x) + O(\varepsilon^n) < 0, \quad 0 \leq x \leq \hat{x}_\beta,$$

$$L_\varepsilon[\beta_n^{(+)}] = -\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi_3(x), x) + O(\varepsilon^n) < 0, \quad \hat{x}_\beta \leq x \leq 1.$$

Производные по x функций $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ испытывают скачок конечной величины и нужного знака в точках \hat{x}_α и \hat{x}_β соответственно. Например,

$$\begin{aligned} & (\beta_n)'_x(\hat{x}_\beta - 0, \varepsilon) - (\beta_n)'_x(\hat{x}_\beta + 0, \varepsilon) = \\ & = \varepsilon^{n-1} \left(-\delta \frac{I'(x_0)}{\tilde{u}_\xi(0, x_0)} + \frac{\gamma}{\tilde{u}_\xi(0, x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x_0) \tilde{u}_\xi(s, x_0) \left[B_u(\tilde{u}^{(\mp)}(s), x_0) - B_u(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0), x_0) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + A_{1u}(\tilde{u}(s), x_0) (\tilde{u}_\xi^{(\mp)}(s, x_0))^2 \right] s ds \right) + O(\varepsilon^n) > 0 \end{aligned}$$

при $n \geq 2$ и достаточно большом δ в силу условия 7.

Итак, приходим к оценке в равномерной норме:

$$\|u(x, \varepsilon) - U_{n-2}^{(\mp)}(x, \varepsilon)\| \leq \|u(x, \varepsilon) - \beta_n^{(\mp)}(x, \varepsilon)\| + \|\beta_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) - U_{n-2}^{(\mp)}(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n-1}), \quad n \geq 2.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 4–7. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ существует классическое решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (21) такое, что для любого фиксированного $n \geq 0$ имеет место оценка в равномерной норме

$$\|u(x, \varepsilon) - U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ – частичная сумма n -го порядка асимптотического ряда (22):

$$U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x) + Q_0^{(-)}(\xi) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x) + \Pi_i^{(-)}(\tau_{(-)}) + Q_i^{(-)}(\xi) \right), & 0 \leq x \leq \hat{x}^*, \\ \varphi_3(x) + Q_0^{(+)}(\xi) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x) + \Pi_i^{(+)}(\tau_{(+)}) + Q_i^{(+)}(\xi) \right), & \hat{x}^* \leq x \leq 1, \end{cases}$$

переменная $\xi = (x - \hat{x}^*)/\varepsilon$, значение $\hat{x}^* = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i x_i$.

Поскольку решения погранслоного типа задач (26) и (27) существуют, то теорему 3 можно доказать на основе метода сшивания по аналогии с тем, как это сделано в работе [14] и получить оценку для производной такого решения, подобную оценке (17). С учётом этого

имеем следующую лемму, которую легко доказать, используя формулу (18), применительно к данному случаю.

Лемма 3. Пусть $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ – нижнее и верхнее решения задачи (21), а $u_\varepsilon(x) := u(x, \varepsilon)$ – решение задачи (21) из теоремы 3. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ имеют место оценки

$$\left\| \frac{d(\beta_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right\| = O(\varepsilon^{n-2}), \quad \left\| \frac{d(\alpha_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right\| = O(\varepsilon^{n-2}), \quad n \geq 2, \quad x \in [0, 1].$$

7. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Соответствующая задаче (21) параболическая задача с граничными условиями $N_1[v]|_{x=0} = 0$, $N_2[v]|_{x=1} = 0$ и начальным условием $v_{init}(x, \varepsilon) = u_\varepsilon(x)$, где $u_\varepsilon(x)$ – решение с внутренним слоем задачи (21) из теоремы 3, имеет стационарное решение $v(x, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x)$. В данной работе для исследования вопроса об асимптотической устойчивости по Ляпунову такого стационарного решения используются сжимающиеся негладкие барьеры (см., например, [24]): в качестве упорядоченных нижнего и верхнего решений данной начально-краевой задачи берутся функции (20), где $u_\varepsilon(x)$ – решение с внутренним слоем задачи (21), $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ – нижнее и верхнее решения из п. 6 (при фиксированном $n \geq 2$, $\varepsilon \in I_\varepsilon$). Такие функции $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$ не являются гладкими в точках \hat{x}_α и \hat{x}_β соответственно в силу свойств функций $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ в этих точках, причём знак скачка производных $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$ по x определяется знаком скачка производных $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ и соответствует предъявляемым к функциям $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$ требованиям [24].

С использованием свойств функций $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ из п. 6 доказываются соответствующие дифференциальные неравенства для функций $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$ по аналогии с тем, как это сделано в п. 4. В частности, учитывая лемму 3, имеем

$$M_\varepsilon[\hat{\beta}^{(-)}] = e^{-\lambda t} [-\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi_1(x), x) + O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{2n-2}) + O(\varepsilon^{n+1})] < 0, \quad 0 \leq x \leq \hat{x}_\beta,$$

$$M_\varepsilon[\hat{\beta}^{(+)}] = e^{-\lambda t} [-\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi_3(x), x) + O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{2n-2}) + O(\varepsilon^{n+1})] < 0, \quad \hat{x}_\beta \leq x \leq 1,$$

при $n \geq 2$, достаточно большом $\gamma > 0$ и $\varepsilon \in I_\varepsilon$. Аналогично $M_\varepsilon[\hat{\alpha}^{(\pm)}] > 0$. При $x = 0$ и $x = 1$ имеем $N_i[\hat{\beta}_n^{(\mp)}]|_{x=i-1} < 0$, $N_i[\hat{\alpha}_n^{(\mp)}]|_{x=i-1} > 0$, $i = 1, 2$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 4–7. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ решение с внутренним слоем $u_\varepsilon(x, \varepsilon)$ задачи (21) из теоремы 3 асимптотически устойчиво по Ляпунову как стационарное решение соответствующей параболической задачи с локальной областью притяжения $u_{init}(x) \in [\alpha_2(x, \varepsilon), \beta_2(x, \varepsilon)]$ и, следовательно, единственно в этой области.

8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

8.1. ТЕПЛОВОЕ ПОЛЕ В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ НАГРЕВАТЕЛЕ

Одной из основных проблем эксплуатации прямолинейных нагревательных элементов в плавильных печах является выбор оптимального режима разогрева с целью повышения эффективности и срока службы нагревательных элементов. Для нормального протекания процесса преобразования электрической энергии в тепловую и длительной устойчивой работы нагревательные элементы должны обладать большим удельным электрическим сопротивлением, слабо зависящим от температуры, жаропрочностью и устойчивостью к окислительным

процессам, иметь постоянные линейные размеры. Поэтому чаще всего применяются угольные, графитовые или карбидокремниевые стержни [25].

Наибольшее значение и распространение в печной технике имеет косвенный нагрев, характеризующийся тем, что тепло выделяется в нагревательных элементах (сопротивлениях) и передаётся от них к обрабатываемому материалу теплоотдачей (рис. 1). При низкотемпературном нагреве (100–700 °С) большое значение имеет теплообмен между нагревателем и материалом конвекцией, которая интенсифицируется принудительной циркуляцией с большими скоростями газа или воздуха внутри печей. При средне- и высокотемпературном нагреве, особенно при отсутствии принудительной циркуляции газов, основное количество тепла передаётся от нагревателей к обрабатываемым материалам излучением. Способ закрепления нагревательных элементов в печи зависит от её конструкции. В связи с этим возможны различные краевые режимы. Далее будет рассмотрена модель типа (1) со смешанными граничными условиями.

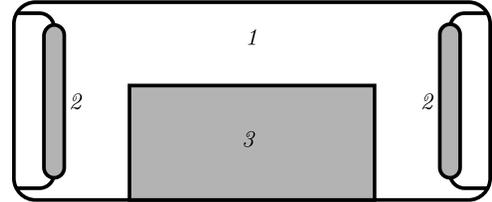


Рис. 1. Схема плавильной печи с косвенным нагревом: 1 — камера, 2 — нагреватели, 3 — обрабатываемый материал.

Тепловое поле в прямолинейном нагревательном элементе с длиной l описывается нелинейной моделью типа (1), учитывающей боковой теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой с температурой U и конвективный теплообмен на одном из двух торцов нагревателя:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k(u, x) \frac{du}{dx} \right) &= \gamma(u - U) - f(x), \quad x \in (0, l), \\ \left[k(u, x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} - \alpha_0(u(0) - U) &= 0, \quad u|_{x=l} = \bar{g}, \end{aligned} \tag{39}$$

где $\alpha_0 > 0, \gamma > 0$ — коэффициенты теплообмена, $f(x) > 0$ — мощность тепловых источников. Допустим достаточную гладкость коэффициентов задачи (39) и выполнение условия (см. ниже).

Условие 8. Справедливы неравенства $0 < k_1 < k(u, x) < k_2, |k_u(u, x)| \leq M, M > 0$ при $x \in [0, l], u \in I$.

Лемма 4. Задача (39) не может иметь более одного классического решения.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что разность $w(x) := u_2(x) - u_1(x)$, где $u_i(x), i = 1, 2$, — классические решения данной задачи, удовлетворяет задаче, которая имеет только тривиальное решение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k(u_2, x) \frac{dw}{dx} + \frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt \right) &= \gamma w(x), \\ \left[\frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt + k(u_2, x) \frac{dw}{dx} \right] \Big|_{x=0} &= \alpha_0 w(0), \quad w(l) = 0, \end{aligned} \tag{40}$$

где $u_t := tu_2(x) + (1-t)u_1(x)$. Перепишем задачу (40) как

$$\begin{aligned} k(u_2, x) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left[\frac{du_1}{dx} \int_0^1 k_u(u_t, x) dt + \frac{dk(u_2, x)}{dx} \right] \frac{dw}{dx} + \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{du_1}{dx} \int_0^1 k_u(u_t, x) dt \right] - \gamma \right\} w(x) &= 0, \\ \left[\frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt + k(u_2, x) \frac{dw}{dx} \right] \Big|_{x=0} &= \alpha_0 w(0), \quad w(l) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $w(0) > 0$. Тогда в силу принципа максимума [3] $w(x) > 0$, $x \in (0, l)$, так как нуль — это минимальное значение и оно достигается на границе $x = l$. Значит, при любом $x \in [0, l)$ имеет место неравенство $w(x)\gamma > 0$. Следовательно, с учётом уравнения и граничного условия при $x = 0$ из задачи (40) приходим к выводу, что с увеличением x функция

$$k(u_2, x) \frac{dw}{dx} + \frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt$$

возрастает при $x \in [0, l)$. С другой стороны,

$$\left[k(u_2, x) \frac{dw}{dx} + \frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt \right] \Big|_{x=l} = k(u_2(l), l) \frac{dw}{dx}(l) \leq 0,$$

что является противоречивым результатом. Аналогично, полагая $w(0) < 0$, также получаем противоречивый результат. Следовательно, $w(0) = w(l) = 0$. Отсюда, в силу принципа максимума, имеем $w(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$.

Вся тепловая энергия (без учёта потерь), полученная в нагревательном элементе в результате преобразования электроэнергии, должна быть передана теплоотдачей к перерабатываемым материалам, иначе температура может превышать допустимые для них пределы, что разрушит нагреватель. Следовательно, в уравнении (39), приведённом к безразмерному виду, слагаемые в правой части уравнения, описывающие процессы тепловыделения и теплоотдачи через боковую поверхность нагревателя, должны быть одинаково большими:

$$\frac{\gamma l^2}{k(u, x)} = O(\varepsilon^{-2}), \quad \frac{f(x)l^2}{Uk(u, x)} = O(\varepsilon^{-2}), \quad (41)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Если

$$\frac{\alpha_0 l}{k(u, x)} \sim 1, \quad (42)$$

то задача (39) в безразмерных переменных при условиях (41), (42) является задачей типа (2):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - A_1(u, x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - A_2(u, x) \frac{du}{dx} &= \frac{\theta(u, x)}{\varepsilon^2} (\bar{\gamma}(u-1) - \bar{f}(x)), \quad x \in (0, 1), \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} - \beta(u(0))(u(0)-1) &= 0, \quad u|_{x=1} = g, \end{aligned} \quad (43)$$

где $\theta(u, x) > 0$, $\bar{f}(x) > 0$, $\beta(u) > 0$ при $x \in [0, 1]$, $0 < g := \bar{g}U^{-1} < 1$.

В случае задачи (43) вырожденное уравнение имеет решение $u = 1 + \bar{f}(x)\bar{\gamma}^{-1} := \varphi(x)$, причём производная по u от функции в правой части уравнения при $u = 1 + \bar{f}(x)\bar{\gamma}^{-1}$ положительна: $\theta(u, x)\bar{\gamma} > 0$ при $x \in [0, 1]$. Поскольку решение вырожденного уравнения и граничное условие при $x = 1$ удовлетворяют неравенствам $0 < g < 1 < \varphi(1)$, то уравнение сепаратрисы, входящей в точку покоя $(\varphi(1), 0)$ при $\rho \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$\tilde{v} = - \left[2 \int_{1+\bar{f}(1)\bar{\gamma}^{-1}}^{\tilde{u}} \theta(\xi, 1) (\bar{\gamma}(\xi-1) - \bar{f}(1)) \exp \left\{ 2 \int_{\xi}^{\tilde{u}} A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi \right]^{1/2}. \quad (44)$$

Так как $\xi = \varphi(1)$ — нуль подынтегральной функции в формуле (44), то подкоренное выражение больше нуля при $\tilde{u} = s$, $s \in (\varphi(1), g]$. Следовательно, условие 3 выполнено.

Теорема 5. Пусть выполнено условие 8. Тогда задача (39) при условиях (41), (42) имеет единственное классическое решение $u(x, \varepsilon)$, причём

$$u(x, \varepsilon) = \frac{f(x) - f(l)}{\gamma} + U\left(\tilde{u}\left(\frac{xl^{-1} - 1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon)\right), \quad x \in [0, l]. \quad (45)$$

Функция $\tilde{u}(\rho)$ описывает решение задачи (43) в окрестности границы $x = 1$ в нулевом приближении и определяется квадратурной формулой

$$-\int_g^{\tilde{u}(\rho)} \left[2 \int_{1+\bar{f}(1)\bar{\gamma}^{-1}}^{\zeta} \theta(\xi, 1)(\bar{\gamma}(\xi - 1) - \bar{f}(1)) \exp\left\{ 2 \int_{\xi}^{\zeta} A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi \right]^{-1/2} d\zeta = \rho.$$

8.2. РАСЧЁТ ТЕПЛООВОГО ПОЛЯ В КАРБИДОКРЕМНИЕВОМ НАГРЕВАТЕЛЕ

В качестве параметров модели (39) выберем параметры реальных карбидокремниевых нагревателей [26], используемых для поддержания алюминия в расплавленном состоянии в течении длительного времени: длина нагревателя $l \approx 3.5$ м, диаметр 54 мм ($\ll 3.5$ м), характерный диапазон рабочей температуры 350–1230 °С.

Будем считать, что левый конец нагревателя теплоизолирован, а на правом поддерживается постоянный температурный режим. Температуру в рабочей камере примем равной $U = 700$ °С. В результате интерполяции (рис. 2) с использованием данных, полученных опытным путем [27], в указанном интервале температур имеем следующую функциональную зависимость коэффициента теплопроводности от температуры: $k(u) = 1674u^{-0.67}$ Вт/(м·К). Среднее значение коэффициента теплопроводности в области характерных рабочих температур нагревателя $\langle k \rangle \approx 17.6$ Вт/(м·К). Мощность выделения тепла на единицу длины нагревателя может достигать $f_{\text{макс}} = 63$ кВт/м. Безразмерная мощность тепловыделения $fl^2/U\langle k \rangle = \bar{f}/\varepsilon^2$, где $\varepsilon = \sqrt{U\langle k \rangle / (f_{\text{макс}}l^2)} \sim 0.1$, а функция $\bar{f}(x) \sim 1$. Пусть, например, $\bar{f}(x) \equiv 1$. С учётом этого оценим порядок безразмерного коэффициента теплообмена как $\bar{\gamma}/\varepsilon^2 = \gamma l^2 / \langle k \rangle \sim \bar{f}/\varepsilon^2$, откуда имеем $\bar{\gamma} \sim 1$. Пусть $\bar{\gamma} = 2$. Опуская подробности процедуры обезразмеривания, приходим к задаче (43), где $A_2(u, x) = 0$, $\beta(u(0)) = 0$, $g = 0.6$, $\bar{\gamma} = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $\theta(u, x) = 0.86u^{0.67}$, $A_1(u, x) = 0.67u^{-1}$. Асимптотическое приближение решения нулевого порядка такой задачи имеет вид

$$U_0(x, \varepsilon) = \tilde{u}(\rho), \quad \rho = \frac{x-1}{\varepsilon}, \quad (46)$$

где

$$-\int_{0.6}^{\tilde{u}(\rho)} \left[2 \cdot 0.86 \int_{1+\bar{f}(1)/\bar{\gamma}}^{\zeta} (\bar{\gamma}(\xi - 1) - \bar{f}(1)) \left(\frac{\zeta^2}{\xi}\right)^{\sigma} d\xi \right]^{-1/2} d\zeta = \rho, \quad \sigma = 0.67.$$

С учётом распределения (46) по аналогии с формулой (45) получаем распределение температуры в нагревателе. Заметим, что согласно теореме 1 использование асимптотического приближения нулевого порядка в качестве приближения решения прямой задачи может привести к существенной погрешности в определении этого решения, особенно если $\varepsilon \sim 0.1$. В таком случае обоснованный численный алгоритм по расчёту теплового поля в нагревателе получается с использованием теоремы 2 путём выбора асимптотического приближения (46) в качестве начального условия при численном решении параболической задачи:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{0.67}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) = 0.86v^{0.67}(2(v-1) - \bar{f}(x)), \quad 0 < x < 1,$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad v(1, t) = 0.6, \quad v(x, 0, \varepsilon) = U_0(x, \varepsilon) \tag{47}$$

методом счёта на установление, так как $v(x, t, \varepsilon) \rightarrow u_\varepsilon(x)$ при $t \rightarrow +\infty$, где

$$u_\varepsilon(x) = U_0(x, \varepsilon) + O(\varepsilon) = \tilde{u}(\rho) + O(\varepsilon). \tag{48}$$

Задача (47) решена методом прямых [28], где при интегрировании по времени применялся метод “BDF” из библиотеки [29]. При выбранных значениях параметров прямой задачи оценка остаточного члена имеет вид $\max_{x \in [0,1]} |u(x, \varepsilon) - U_0(x, \varepsilon)| \leq 3.77 \cdot 10^{-6}$, здесь в качестве точного решения $u(x, \varepsilon)$ прямой задачи используется численное решение задачи (47), полученное методом счёта на установление. Оценка остаточного члена подтверждает высокую эффективность метода.

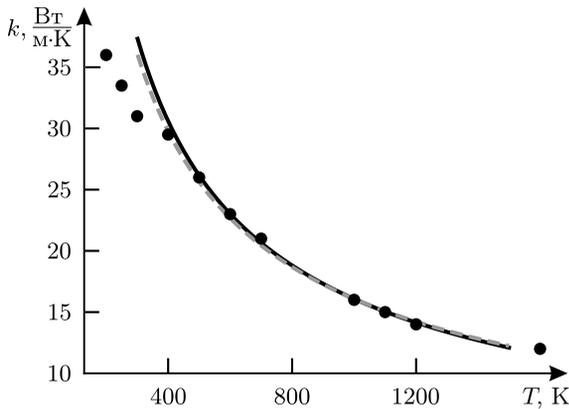


Рис. 2. Зависимость коэффициента тепловой диффузии карбида кремния от температуры: точки — истинный профиль $k(T)$, сплошная линия — восстановленный профиль $k(T)$, штриховая — интерполяция экспериментальных данных.

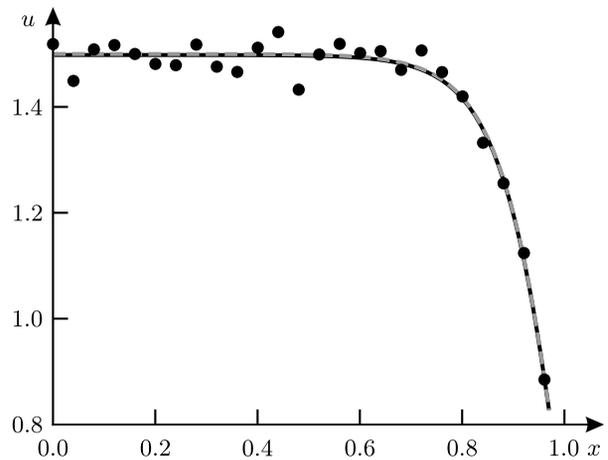


Рис. 3. Восстановленный профиль безразмерной температуры: штриховая линия — численное решение с истинными параметрами, сплошная — асимптотическое приближение с оптимальными параметрами $\bar{\gamma} = 2.008$, $\sigma = 0.702$, точки — симуляция экспериментальных данных.

8.3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для восстановления коэффициентов $k(u)$ и $\bar{\gamma} > 0$ используется степенная параметризация $k(u) = k_0(u_0/u)^\sigma$, $\sigma > 0$, при условии, что значение $k(u)$ в одной точке известно: $k(u_0) = k_0$, например, $k(700 \text{ К}) \approx 20.5 \text{ Вт/(м·К)}$ (см. рис. 2).

Алгоритму нахождения распределения температуры можно сопоставить оператор $G: \mathbb{R}^{+2} \rightarrow \mathbb{C}[0, 1] \cap \mathbb{C}^1[0, 1] \cap \mathbb{C}^2(0, 1)$, который набору параметров $X \equiv (\sigma \bar{\gamma})^T$ ставит в соответствие распределение температуры $u(x, \varepsilon)$:

$$G[X] = u. \tag{49}$$

Обратная задача состоит в определении положительного набора параметров $(\sigma \bar{\gamma})^T$ по известной информации о распределении тепла вдоль нагревателя $u_s(x, \varepsilon)$, наблюдаемого экспериментально с ошибкой s ($\|u - u_s\|_{L_2} \leq s$, где u — точные данные):

$$G_\varepsilon[X_{\varepsilon,s}] = u_s, \quad X_{\varepsilon,s} \in \Pi^2 \subset \mathbb{R}^{+2}. \tag{50}$$

Решение обратной задачи (50) может быть найдено как элемент $X_{\varepsilon,s}$ компактного множества $\Pi^2 := [\sigma_1, \sigma_2] \times [\gamma_1, \gamma_2]$ из \mathbb{R}^{+2} , реализующий минимум функционала

$$F[X] = \|G_\varepsilon[X] - u_s\|_{L_2}^2 \quad (51)$$

на данном множестве априорных ограничений. Следовательно, обратная задача (50) является корректно поставленной [20].

Использование асимптотического приближения решения прямой задачи, которое даётся формулой (46), эквивалентно тому, что вместо точного оператора G в задаче (50) задаётся оператор G_ε с ошибкой $C\varepsilon$: $\|G - G_\varepsilon\|_{\Pi^2 \rightarrow C[0,1] \cap C^1[0,1] \cap C^2(0,1)} \leq C\varepsilon$, где C — некоторая константа (см. (48)). Таким образом, достаточно трудоёмкая процедура вычисления образа оператора (49) заменена более простыми операциями.

Поиск минимума функционала (51) реализован с использованием симплексного алгоритма Нелдера–Мида из библиотеки [30]. При минимизации была задана абсолютная погрешность на уровне 10^{-8} . В качестве симуляции экспериментальных данных u_s использовалось численное решение прямой задачи при $\sigma = 0.673$, $\bar{\gamma} = 2$, $g = 0.6$, $\bar{f}(1) = 1$ с наложением шума, который задавался как случайная величина с нормальным распределением, где среднее — “0” и стандартное отклонение “0.025” (рис. 3). Восстановлены следующие значения параметров: $\sigma = 0.702$, $\bar{\gamma} = 2.008$, ошибка восстановления составила: $\Delta\sigma = 0.029$, $\Delta\bar{\gamma} = 0.008$, причём $\|G - G_\varepsilon\|_{\Pi^2 \rightarrow C[0,1] \cap C^1[0,1] \cap C^2(0,1)} \leq 3.77 \cdot 10^{-6}$. Восстановленные профили коэффициента тепловой диффузии $k(T)$ и безразмерной температуры $u(x)$ приведены на рис. 2, 3.

Отметим, что коэффициент тепловой диффузии может быть восстановлен с использованием априорной информации о положении внутреннего слоя тепловой структуры, полученной (информации) на основе асимптотического анализа, и степенной параметризации для функции $k(u)$ (подробнее см. [5]).

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В.Ф. Бутузову за интерес к работе, рекомендации по её улучшению и полезное обсуждение результатов.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галактионов, В.А. Процессы в открытых диссипативных системах / В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.А. Самарский. — М. : Знание, 1988. — 599 с.
2. Маслов, В.П. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса. Эволюция диссипативных структур / В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.Л. Волосов. — М. : Наука, 1987. — 351 с.
3. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
4. Карташов, Э.М. Аналитические методы теории теплопроводности и её приложений / Э.М. Карташов, В.А. Кудинов. — 4-е изд., перераб. и суц. доп. — М. : Ленанд, 2018. — 1078 с.
5. Davydova, M.A. Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient / M.A. Davydova, S.A. Zakharova // J. Comput. Appl. Math. — 2022. — V. 400. — Art. 113731.
6. Применение численно-асимптотического подхода в задаче восстановления параметров локального стационарного источника антропогенного загрязнения / Давыдова М.А., Н.Ф. Еланский, С.А. Захарова, О.В. Постыляков // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 496, № 1. — С. 34–39.
7. Теплообмен в теплозащитных композиционных материалах в условиях высокотемпературного нагружения / В.Ф. Формалев, С.А. Колесник, Е.Л. Кузнецова, Л.Н. Рабинский // Теплофизика высоких температур. — 2016. — Т. 54, № 3. — С. 415–422.

8. Колмогоров, А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюлл. МГУ. Сер. А. Математика и механика. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–26.
9. Crank, J. The Mathematics of Diffusion / J. Crank. — London : Oxford Univ. Press, 1956. — 347 p.
10. Галактионов, В.А. Методы построения приближённых автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. IV / В.А. Галактионов, А.А. Самарский // Мат. сб. — 1983. — Т. 121, № 2. — С. 131–155.
11. Cole, J.D. Perturbation Methods in Applied Mathematics / J.D. Cole. — New York : Springer-Verlag, 1981. — 558 p.
12. Архитектура многомерных тепловых структур / С.П. Курдюмов, Е.С. Куркина, А.Б. Потапов, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 274, № 5. — С. 1071–1074.
13. Васильева, А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. М. : Наука, 1973. — 272 с.
14. Васильева, А.Б. О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка / А.Б. Васильева, М.А. Давыдова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 6. — С. 938–947.
15. Неведов, Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущённых задач в частных производных / Н.Н. Неведов // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 718–722.
16. Inkmann, F. Existence and multiplicity theorems for semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions / F. Inkmann // Indiana Univ. Math. J. — 1982. — V. 31, № 2. — P. 213–221.
17. Wang, J. Monotone method for diffusion equations with nonlinear diffusion coefficients / J. Wang // Nonlinear Analysis. — 1998. — V. 34. — P. 113–142.
18. Lukyanenko, D.V. Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation / D.V. Lukyanenko, M.A. Shishlenin, V.T. Volkov // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2019. — V. 27, № 5. — P. 745–758.
19. Применение асимптотического анализа для решения обратной задачи определения коэффициента линейного роста в уравнении типа Бюргерса / Д.В. Лукьяненко, В.Т. Волков, Н.Н. Неведов, А.Г. Ягола // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия. — 2019. — № 2. — С. 38–41.
20. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems / A.N. Tikhonov, A.V. Goncharky, V.V. Stepanov, A.G. Yagola. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1995. — 253 p.
21. Давыдова, М.А. О новом подходе к задаче восстановления вертикального коэффициента турбулентной диффузии в пограничном слое атмосферы / М.А. Давыдова, Н.Ф. Еланский, С.А. Захарова // Докл. РАН. — 2020. — Т. 490, № 2. — С. 51–56.
22. Zakharova, S.A. Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere / S.A. Zakharova, M.A. Davydova, D.V. Lukyanenko // Inverse Probl. Sci. Eng. — 2021. — V. 29, № 3. — P. 365–377.
23. Давыдова, М.А. Существование и устойчивость решений с пограничными слоями в многомерных сингулярно возмущённых задачах реакция–диффузия–адвекция / М.А. Давыдова // Мат. заметки. — 2015. — Т. 98, № 6. — С. 853–864.
24. Nefedov, N.N. On the existence and asymptotic stability of periodic contrast structures in quasilinear reaction–advection–diffusion equations / N.N. Nefedov, E.I. Nikulin, L. Recke // Russ. J. Math. Phys. — 2019. — V. 26, № 1. — P. 55–69.
25. Курбатов, Ю.Л. Металлургические печи : учеб. пособие / Ю.Л. Курбатов, А.Б. Бирюков, Ю.Е. Рубан. М. ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. — 384 с.
26. Карбид кремния (Карборунд, SiC) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://si-c.ru/informat/infosic.html>. — Дата доступа: 20.11.2023.
27. Литовский, Е.Я. Термофизические свойства огнеупоров / Е.Я. Литовский, Н.А. Пучкевич. — М. : Металлургия, 1982. — 152 с.
28. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. — М. : Наука, 1978. — 512 с.
29. `scipy.integrate.solve_ivp` [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html. — Дата доступа: 21.11.2023.

30. Optimization (scipy.optimize) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/optimize.html#nelder-mead-simplex-algorithm-method-nelder-mead>. — Дата доступа: 21.11.2023.

ASYMPTOTICALLY STABLE SOLUTIONS WITH BOUNDARY AND INTERNAL LAYERS
IN DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE SINGULARLY PERTURBED
HEAT EQUATION WITH A NONLINEAR THERMAL DIFFUSION

M. A. Davydova¹, G. D. Rublev²

¹Lomonosov Moscow State University, Russia

²A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of RAS, Moscow, Russia

e-mail: ¹m.davydova@physics.msu.ru, ²rublev.gd15@physics.msu.ru

This paper proposes a new approach to the study of direct and inverse problems for a singularly perturbed heat equation with nonlinear temperature-dependent diffusion, based on the further development and use of asymptotic analysis methods in the nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems. The essence of the approach is presented using the example of a class of one-dimensional stationary problems with nonlinear boundary conditions, for which the case of applicability of asymptotic analysis is highlighted. Sufficient conditions for the existence of classical solutions of the boundary layer type and the type of contrast structures are formulated, asymptotic approximations of an arbitrary order of accuracy of such solutions are constructed, algorithms for constructing formal asymptotics are substantiated, and the Lyapunov asymptotic stability of stationary solutions with boundary and internal layers as solutions to the corresponding parabolic problems is investigated. A class of nonlinear problems that take into account lateral heat exchange with the environment according to Newton's law is considered. A theorem on the existence and uniqueness of a classical solution with boundary layers in problems of this type is proven. As applications of the study, methods for solving specific direct and inverse problems of nonlinear heat transfer related to increasing the operating efficiency of rectilinear heating elements in the smelting furnaces — heat exchangers are presented: the calculation of thermal fields in the heating elements and the method for restoring the coefficients of thermal diffusion and heat transfer from modeling data.

Keywords: heat equation with a nonlinear thermal diffusion, nonlinear heat conduction problem, nonlinear heat transfer problem, singularly perturbed problem, solution with boundary and internal transition layers, thermal structure, asymptotic method, coefficient inverse heat transfer problem.

REFERENCES

1. Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., and Samarsky, A.A., *Protsessy v otkrytykh dissipativnykh sistemakh* (Processes in open dissipative systems), Moscow: Znanie, 1988.
2. Maslov, V.P., Danilov, V.G., and Volosov, K.L., *Matematicheskoye modelirovaniye protsessov teplo- i massop-erenosa. Evolyutsiya dissipativnykh struktur* (Mathematical modeling of heat and mass transfer processes. Evolution of dissipative structures), Moscow: Nauka, 1987.
3. Samarsky, A.A. and Vabishchevich, P.N., *Vychislitel'naya teploperedacha* (Computational Thermotransfer). Moscow: Editorial URSS, 2003.
4. Kartashov, E.M. and Kudinov, V.A., *Analiticheskiye metody teorii teploprovodnosti i yeye prilozheniy* (Analytical methods of the theory of thermotransfer and its applications), Moscow: Lenand, 2018.
5. Davydova, M.A. and Zakharova, S.A., Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient, *J. Comput. Appl. Math.*, 2022, vol. 400, art. 113731.
6. Davydova, M.A., Elansky, N.F., Zakharova, S.A., and Postylyakov, O.V., Application of a numerical-asymptotic approach to the problem of restoring the parameters of a local stationary source of anthropogenic pollution, *Doklady Mathematics*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 26–31.
7. Formalev, V.F., Kolesnik, S.A., Kuznetsova, E.L., and Rabinskii, L.N., Heat and mass transfer in thermal protection composite materials upon high temperature loading, *High Temp.*, 2016, vol. 54, no. 3, pp. 390–396.

8. Kolmogorov, A.N., Petrovsky, I.G., and Piskunov, N.S., The research of the equation of diffusion coupled with the increase of matter, and its application to a biological problem, *Bulletin of Moscow State University. Ser. A. Mathematics and Mechanics*, 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–26.
9. Crank, J., *The Mathematics of Diffusion*, London: Oxford Univ. Press, 1956.
10. Galaktionov, V.A. and Samarskii, A.A. Methods of constructing approximate self-similar solutions of nonlinear heat equations. IV, *Math. USSR-Sb.*, 1984, vol. 49, no. 1, pp. 125–149.
11. Cole, J.D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, New York: Springer-Verlag, 1981.
12. Kurdyumov, S.P., Kurkina, E.S., Potapov, A.B., and Samarskiy, A.A., The architecture of the multidimensional thermal structures, *Dokl. AN USSR*, 1984, vol. 274, no. 5, pp. 1071–1075.
13. Vasilyeva, A.B. and Butuzov, V.F., *Asimptoticheskiye razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy* (Asymptotic expansions of solutions to singularly perturbed equations), Moscow: Nauka, 1973.
14. Vasil'eva, A.B. and Davydova, M.A., On a contrast steplike structure for a class of second-order nonlinear singularly perturbed equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 6, pp. 900–910.
15. Nefedov, N.N., The method of differential inequalities for some singularly perturbed partial differential equations, *Different. Equations*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 668–671.
16. Inkman, F., Existence and multiplicity theorems for semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, *Indiana Univ. Math. J.*, 1982, vol. 31, no. 2, pp. 213–221.
17. Wang, J., Monotone method for diffusion equations with nonlinear diffusion coefficients, *Nonlinear Analysis*, 1998, vol. 34, pp. 113–142.
18. Lukyanenko, D.V., Shishlenin, M.A., and Volkov, V.T., Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2019, vol. 27, no. 5, pp. 745–758.
19. Lukyanenko, D.V., Volkov, V.T., Nefedov, N.N., and Yagola, A.G. Application of asymptotic analysis for solving the inverse problem of determining the coefficient of linear amplification in burgers' equation, *Moscow University Physics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 2, pp. 131–136.
20. Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V., and Yagola, A.G., *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
21. Davydova, M.A., Elanskii, N.F., and Zakharova, S.A., A new approach to the problem of reconstructing the vertical turbulent diffusion coefficient in the atmospheric boundary layer, *Doklady Earth Sci.*, 2020, vol. 490, no. 2, pp. 92–96.
22. Zakharova, S.A., Davydova, M.A., and Lukyanenko, D.V., Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2021, vol. 29, no. 3, pp. 365–377.
23. Davydova, M.A., Existence and stability of solutions with boundary layers in multidimensional singularly perturbed reaction–diffusion–advection problem, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, pp. 909–919.
24. Nefedov, N.N., Nikulin, E.I., and Recke, L., On the existence and asymptotic stability of periodic contrast structures in quasilinear reaction–advection–diffusion equations, *Russ. J. Math. Phys.*, 2019, vol. 26, no. 1, pp. 55–69.
25. Kurbatov, Yu.L., Biryukov, A.B., and Ruban, Yu.E., *Metallurgicheskiye pechi* (Metallurgical furnaces), Moscow; Vologda: Infra-Engineering, 2022.
26. [Electronic resource] Silicon carbide (Carborundum, SiC). URL: <https://si-c.ru/informat/infocic.html> (date of the application: 20.11.2023).
27. Litovsky, E.Ya. and Puchkelevich, N.A., *Termofizicheskiye svoystva ogneporov* (Thermophysical properties of refractories), Moscow: Metallurgia, 1982.
28. Kalitkin, N.N., *Chislennyye metody* (Numerical methods), Moscow: Nauka, 1978.
29. [Electronic resource] URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html (date of the application: 21.11.2023).
30. [Electronic resource] URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/optimize.html#nelder-mead-simplex-algorithm-method-nelder-mead> (date of the application: 21.11.2023).