ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 375–385

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

О ДИНАМИЧЕСКОМ РАСТЯЖЕНИИ ТОНКОГО КРУГЛОГО ИДЕАЛЬНО ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ИЗ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

И. М. Цветков

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
e-mail: cvetkoviv@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.09.2023 г., после доработки 24.11.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Изучена система уравнений, моделирующая динамическое растяжение однородного круглого слоя из несжимаемого идеально жёсткопластического трансверсально-изотропного материала, подчиняющегося критерию Мизеса–Генки. Верхнее и нижнее основания свободны от напряжений, на боковой границе задана радиальная скорость, при этом учтена возможность утолщения либо утоньшения слоя, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. С использованием метода асимптотического интегрирования выявлены два характерных режима растяжения, т.е. определены соотношения безразмерных параметров, при которых учёт инерционных членов является необходимым. При рассмотрении режима, связанного с достижением ускорения на боковой грани своих критических значений, построено приближённое решение задачи.

Ключевые слова: идеальная пластичность, круглый слой, трансверсально-изотропный материал, растяжение, динамика, шейка, асимптотическое разложение.

DOI: 10.31857/S0374064124030073, EDN: PLNZKQ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим деформирование во времени круглого слоя из однородного несжимаемого идеально жёсткопластического трансверсально-изотропного материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки с плотностью ρ и пределом текучести σ_s. Область Ω_t в пространстве $\mathbb{R}^3$, занятая слоем в момент t, симметрична относительно оси z, имеет неизменный во времени объём $|\Omega|$ и в цилиндрической системе координат, связанной с осью симметрии слоя, определяется как

$$\Omega_t = \{(r,\theta,z):\ 0\leqslant r\leqslant R(t),\ 0\leqslant\theta<2\pi,\ -h(t,r)\leqslant z\leqslant h(t,r)\}, \tag{1}$$

$$|\Omega| = 4\pi\int\limits_0^{R(t)} rh(t,r)\,dr = 2\pi R^2(t)h^*(t). \tag{2}$$

Средняя высота слоя h^* задаётся в (2) таким образом, чтобы объём слоя цилиндрической формы радиуса $R(t)$ и высоты $2h^*(t)$ равнялся $|\Omega|$.

Представим симметричный тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ как сумму шаровой и девиаторной частей: $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}+\mathbf{s}$, где p — давление, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, $\mathbf{s}$ — девиатор напряжений, $\operatorname{tr}\mathbf{s}=0$. Определим интенсивности скоростей деформаций v_u и напряжений σ_u:

$$v_u = \sqrt{\mathbf{v}:\mathbf{v}},\quad \sigma_u = \sqrt{\mathbf{s}:\mathbf{s}}, \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ — тензор скоростей деформации.

Векторные определяющие соотношения анизотропной идеально жёсткопластичной среды имеют следующий вид:
$$v_u \mathbf{s} = \sigma_u \mathbf{A} : \mathbf{v}, \tag{4}$$
где $\mathbf{A}$ — безразмерный тензор четвёртого ранга, отвечающий за тип анизотропии.

Так как материал трансверсально-изотропный, будем считать $\mathbf{A}$ трансверсально-изотропным тензором, компоненты которого, в силу симметричности $\mathbf{s}$ и $\mathbf{v}$, обладают следующими свойствами: $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}$, $i,j = 1,2,3$. Кроме того, предположим симметрию относительно первой и последней пары индексов, тогда имеет место следующее утверждение [1, 2].

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— трансверсально-изотропный тензор и его компоненты обладают следующими симметриями:* $A_{ijkl} = A_{klij} = A_{ijlk}$. *Тогда тензор* $\mathbf{A}$ *имеет пять независимых компонент следующего вида:*
$$\begin{gathered} A_{IJKL} = \Lambda_1 \delta_{IJ}\delta_{KL} + \Lambda_2(\delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}), \\ A_{IJ33} = \Lambda_3 \delta_{IJ}, \quad A_{I3K3} = \Lambda_4 \delta_{IK}, \quad A_{3333} = \Lambda_5, \end{gathered} \tag{5}$$
где $I, J, K, L \in \{1,2\}$.

Для того чтобы в результате свёртки тензора $\mathbf{A}$ с девиатором скоростей деформаций получился девиатор, достаточно предположить, что A_{iijk} являются компонентами шарового тензора, откуда $2(\Lambda_1 + \Lambda_2) = \Lambda_3 + \Lambda_5$, т.е. число независимых компонент сокращается до четырёх.

Верхнее и нижнее основания слоя $z = \pm h(r,t)$ свободны от напряжений, а на боковой поверхности $r = R(t)$ задана радиальная скорость, т.е. рассматривается растяжение слоя с заданной кинематикой движения боковой поверхности:
$$r = R(t)\colon \quad v_r = V(t), \quad V(t) > 0. \tag{6}$$
В данной работе ограничимся рассмотрением поля вектора скорости следующего вида: $\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = \big(v_r(r,z,t), 0, v_z(r,z,t)\big)$. Это порождает тензор скоростей деформации $\mathbf{v}$ с ненулевыми компонентами:
$$v_{rr} = v_{r,r}, \quad v_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad v_{zz} = v_{z,z}, \quad v_{rz} = \frac{1}{2}(v_{r,z} + v_{z,r}), \tag{7}$$
где запятая в индексе обозначает дифференцирование по соответствующей переменной.

Используя выражения для компонент трансверсально-изотропного тензора (5), выпишем вытекающие из (4) нетривиальные связи между девиатором напряжений и тензором скоростей деформаций:
$$\begin{gathered} v_u s_{rr} = \sigma_u((\Lambda_1 + 2\Lambda_2)v_{rr} + \Lambda_1 v_{\theta\theta} + \Lambda_3 v_{zz}), \quad v_u s_{zz} = \sigma_u(\Lambda_3 v_{rr} + \Lambda_3 v_{\theta\theta} + \Lambda_5 v_{zz}), \\ v_u s_{\theta\theta} = \sigma_u(\Lambda_1 v_{rr} + (\Lambda_1 + 2\Lambda_2)v_{\theta\theta} + \Lambda_3 v_{zz}), \quad v_u s_{rz} = 2\sigma_u \Lambda_4 v_{rz}. \end{gathered} \tag{8}$$
Исключая интенсивности σ_u и v_u из соотношений (8), можно образовать две независимые пропорции, которые с учётом (7) преобразуются к виду
$$\begin{gathered} s_{rr}\Big(\Lambda_3 v_{r,r} + \Lambda_3 \frac{v_r}{r} + \Lambda_5 v_{z,z}\Big) = s_{zz}\Big((\Lambda_1 + 2\Lambda_2)v_{r,r} + \Lambda_1 \frac{v_r}{r} + \Lambda_3 v_{z,z}\Big), \\ s_{rr}\Lambda_4(v_{r,z} + v_{z,r}) = s_{rz}\Big((\Lambda_1 + 2\Lambda_2)v_{r,r} + \Lambda_1 \frac{v_r}{r} + \Lambda_3 v_{z,z}\Big). \end{gathered} \tag{9}$$
Следуя [3], представим массив компонент A_{ijkl} в виде матрицы размера 9×9 с нумерацией строк и столбцов в порядке (11), (22), (33), (12), (23), (31), (21), (32), (13). Число ненулевых

компонент в данной матрице равно 21 — верхний левый минор размера 3×3 и 12 компонент из остальных строк, заполняющихся с использованием симметрий A_{1212}, A_{2323}, A_{3131}. Обозначим компоненты верхнего минора через a_{ij}, $i,j=1,2,3$, и $a_{44}=A_{1212}$, $a_{55}=A_{2323}$, $a_{66}=A_{3131}$. Тогда

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\Lambda_1+2\Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_3\\ \Lambda_1 & \Lambda_1+2\Lambda_2 & \Lambda_3\\ \Lambda_3 & \Lambda_3 & \Lambda_5\end{pmatrix},\quad a_{44}=\Lambda_2,\quad a_{55}=a_{66}=\Lambda_4.$$

Компоненты верхнего левого минора матрицы, соответствующей обратному тензору $\mathbf{A}^{-1}$, обозначим через d_{ij}, тогда

$$a_{ij}d_{jk}=\delta_{ik},\quad i,k=1,2,3;\quad d_{\gamma\gamma}=\frac{1}{4a_{\gamma\gamma}}\neq0,\quad \gamma=4,5,6.$$

Таким образом, всюду далее будем предполагать $\det\mathbf{a}=4\Lambda_2(\Lambda_1\Lambda_5+\Lambda_2\Lambda_5-\Lambda_3^2)\neq0$. Компоненты $\mathbf{d}$, выраженные через $\mathbf{a}$, имеют следующий вид:

$$\mathbf{d}=\frac{1}{\det\mathbf{a}}\begin{pmatrix}(\Lambda_1+2\Lambda_2)\Lambda_5-\Lambda_3^2 & \Lambda_3^2-\Lambda_1\Lambda_5 & -2\Lambda_2\Lambda_3\\ \Lambda_3^2-\Lambda_1\Lambda_5 & (\Lambda_1+2\Lambda_2)\Lambda_5-\Lambda_3^2 & -2\Lambda_2\Lambda_3\\ -2\Lambda_2\Lambda_3 & -2\Lambda_2\Lambda_3 & 4\Lambda_2(\Lambda_1+\Lambda_2)\end{pmatrix}.$$

Используя критерий пластичности для анизотропного идеальнопластического тела $\mathbf{s}^T:\mathbf{B}:\mathbf{s}=\sigma_u^2$, где $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-T}:\mathbf{A}^{-1}$, и кинематические условия (7), выпишем критерий пластичности для трансверсально-изотропной среды:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}d_{j\alpha}d_{j\beta}s_{\alpha\alpha}s_{\beta\beta}+8d_{66}^2s_{rz}^2=\sigma_s^2, \tag{10}$$

при этом греческие индексы у компонент тензора необходимо заменить на r, θ, z соответственно.

Лемма 2. *Пусть тензор* $\mathbf{A}$ *обратим, тогда квадратичная форма (10) положительно определена.*

Доказательство. Так как тензор $\mathbf{A}$ обратим, то обратима матрица $\mathbf{a}$. Заметим, что для положительной определённости квадратичной формы (10) необходимо и достаточно положительной определёности формы $\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}d_{j\alpha}d_{j\beta}s_{\alpha\alpha}s_{\beta\beta}$. Введя векторы $\mathbf{d}_i=(d_{1i},d_{2i},d_{3i})$, где $i=1,2,3$, убедимся, что матрица квадратичной формы является матрицей Грамма — $G(\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_3)$. Все её угловые миноры строго положительны тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{d}_i$ линейно независимы, что равносильно невырожденности матрицы $\mathbf{a}$.

Выразив $s_{\theta\theta}=-s_{rr}-s_{zz}$, оставим у девиатора напряжений независимыми компоненты s_{rr}, s_{rz}, s_{zz}, тогда условие пластичности Мизеса–Генки запишется следующим образом:

$$B_{11}s_{rr}^2+B_{22}s_{zz}^2-2B_{12}s_{rr}s_{zz}+Bs_{rz}^2=\tau_s^2, \tag{11}$$

где τ_s — предел текучести при сдвиге, а

$$B_{11}=\frac12|\mathbf{d}_1-\mathbf{d}_2|^2,\quad B_{22}=\frac12|\mathbf{d}_2-\mathbf{d}_3|^2,\quad B_{12}=\frac12(\mathbf{d}_1-\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_2-\mathbf{d}_3),\quad B=\frac{1}{4\Lambda_4^2}.$$

Добавим к полученным ранее уравнениям условие несжимаемости и уравнения движения в осесимметричном случае

$$v_{r,r}+\frac{v_r}{r}+v_{z,z}=0, \tag{12}$$

$$-p_{,r}+s_{rr,r}+s_{rz,z}+\frac{1}{r}(2s_{rr}+s_{zz})=\rho(v_{r,t}+v_r v_{r,r}+v_z v_{r,z}), \tag{13}$$

$$-p_{,z}+s_{rz,r}+s_{zz,z}+\frac{s_{rz}}{r}=\rho(v_{z,t}+v_r v_{z,r}+v_z v_{z,z}). \tag{14}$$

Таким образом, получим нелинейную систему из шести уравнений (9), (11)–(14), замкнутую относительно шести функций v_r, v_z, p, s_{rr}, s_{rz}, s_{zz}, зависящих от r, z и t в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $z=\pm h(r,t)$.

Предположим, что функция $h(r,t)$ непрерывно дифференцируема, поэтому компоненты единичной нормали к поверхности $z=\pm h(t,r)$ имеют вид

$$n_r=-\frac{\partial h/\partial r}{\sqrt{1+(\partial h/\partial r)^2}}, \quad n_\theta=0, \quad n_z=\pm\frac{1}{\sqrt{1+(\partial h/\partial r)^2}}.$$

В силу того, что верхнее и нижнее основания слоя свободны от напряжений, на этих частях границы $z=\pm h(r,t)$ выполнены условия равенства нулю двух компонент вектора напряжений:

$$(p-s_{rr})\frac{\partial h}{\partial r}\pm s_{rz}=0, \quad -s_{rz}\frac{\partial h}{\partial r}\pm(-p+s_{zz})=0. \tag{15}$$

Для строгой постановки начально-краевой задачи, рассматриваемой при $t>0$, необходимо задать функцию $h(r,0)\equiv h_0(r)$, $0\leqslant r<r_0$, удовлетворяющую интегральному условию

$$\frac{|\Omega|}{4\pi}=\int\limits_0^{r_0} r h_0(r)\,dr.$$

Так как область Ω_t симметрична, будем считать функции s_{rz}, v_z антисимметричными по z.

2. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ РАСТЯЖЕНИЯ

Квазистатическая постановка задачи о растяжении идеально жёсткопластического слоя отличается от динамической тем, что в правых частях уравнений (13), (14) стоят нули, т.е. время t становится параметром, входящим в решения неявно через V, h и R. Уравнения (13) и (14) превращаются в уравнения равновесия.

Аналитическое решение квазистатической задачи несложно получить, если в начальный момент времени слой имел цилиндрическую форму, т.е. $h_0^*=\mathrm{const}$. Обозначив параметры этого решения верхним индексом “qs”, будем иметь

$$v_r^{qs}=\frac{Vr}{R}, \quad v_z^{qs}=-2\frac{Vz}{R}, \tag{16}$$

$$s_{rz}^{qs}=0, \quad s_{rr}^{qs}=s_{\theta\theta}^{qs}=\frac{\tau_s}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}, \quad s_{zz}^{qs}=p^{qs}=-\frac{2\tau_s}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}. \tag{17}$$

Напряжённое состояние (17) однородно и не зависит от заданной скорости V.

Кинематика (16) обеспечивает отсутствие жестких зон в области Ω_t, поскольку согласно (3) $v_u^{qs}=\sqrt{6}V/R>0$ во всех точках слоя.

Исследуем далее, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) выписанное выше квазистатическое приближение является главным и им можно ограничиться в технологических расчётах, и когда инерционные эффекты, вызванные слагаемыми в правых частях уравнений (13) и (14), начинают играть соизмеримую роль в распределении напряжений и движении точек слоя.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Обратимся к динамическим уравнениям (13), (14) и образуем три явно зависящих от времени безразмерных параметра:

$$\alpha(t)=\frac{h^*(t)}{R(t)}\ll 1, \quad \varepsilon_1=\frac{\rho V^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_2=\frac{\rho\dot V(t)h^*(t)}{\tau_s}. \tag{18}$$

Первый из них — малый геометрический параметр, второй — обратное число Эйлера. На разных интервалах процесса растяжения порядок малости α по отношению к ε_1 и ε_2 может меняться.

Представим разложения шести неизвестных функций в виде регулярных асимтотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α (в работах [4–7] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе динамического растяжения изотропных стержня, круглого слоя, бесконечного листа и прямоугольной пластины соответственно, в [8] разложения использовались при исследовании инерционных эффектов в задаче Прандтля):

$$v_r(r,z,t)=V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)v_\xi^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$v_z(r,z,t)=V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)v_\zeta^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$s_{(rr;rz;zz)}(r,z,t)=\tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)s^{\{n\}}_{(\xi\xi;\xi\zeta;\zeta\zeta)}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$p(r,z,t)=\tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)p^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau), \tag{19}$$

где

$$\xi=\frac{\alpha(t)r}{h^*(t)}=\frac{r}{R(t)}, \quad \zeta=\frac{z}{h^*(t)}, \quad \tau=\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{t}{h^*(t)}.$$

Безразмерные коэффициенты рядов (19) (с верхними индексами) зависят от новых безразмерных координат ξ, ζ и безразмерного времени τ. Область слоя Ω_t (1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_\tau=\{(\xi,\theta,\zeta)\colon\ 0\leqslant\xi\leqslant 1,\ \ 0\leqslant\theta<2\pi,\ \ -\eta(\xi,\tau)\leqslant\zeta\leqslant\eta(\xi,\tau)\},$$

$$\eta(\xi,\tau)=\frac{h(r,t)}{h^*(t)}, \quad \int\limits_0^1\xi\eta(\xi,\tau)\,d\xi=\frac12, \quad \frac{\partial h}{\partial r}=\alpha\frac{\partial\eta}{\partial\xi}. \tag{20}$$

Отметим, что порядок малости по α безразмерных производных $\partial h/\partial r$ и $\partial\eta/\partial\xi$ разный. Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан замены переменных $\partial(\xi,\zeta,\tau)/\partial(r,z,t)$ отличен от нуля, т.е. она (замена) невырождена.

Имеют место формулы замены дифференциальных операторов

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{R(t)}\frac{\partial}{\partial \xi}=\frac{\alpha(t)}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial \xi},\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial \zeta}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{V\xi}{R}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{2V\zeta}{R}\frac{\partial}{\partial \zeta}+\left(\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{1}{h^*}+\frac{2V\tau}{R}\right)\frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{22}$$

Из определений малого параметра (18) и средней высоты слоя (2) следуют кинетические соотношения

$$\dot{\alpha}=-\frac{3\alpha V}{R},\quad \dot{h^*}=-2\frac{h^*V}{R}. \tag{23}$$

Подставим ряды (19) в шесть уравнений (9), (11)–(14) и в граничные условия (6), (15). С учётом формул (20)–(23) получим систему, состоящую из уравнений движения (13), (14)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\Big(-\alpha p_{,\xi}^{\{n\}}+\alpha s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}}+s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{n\}}+\frac{1}{\xi}\Big(2\alpha s_{\xi\xi}^{\{n\}}+\alpha s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}\Big)\Big)=$$
$$=\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\Big(-3nv_{\xi}^{\{n\}}-\xi v_{\xi,\xi}^{\{n\}}+2\zeta v_{\xi,\zeta}^{\{n\}}+2\tau v_{\xi,\tau}^{\{n\}}\Big)+$$
$$+\sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\xi,\tau}^{\{n\}}+\varepsilon_1\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v_{\xi}^{\{j\}}v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}}+\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v_{\zeta}^{\{j\}}v_{\xi,\zeta}^{\{n-j\}}+\varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\xi}^{\{n\}}, \tag{24}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\Big(-p_{,\zeta}^{\{n\}}+\alpha s_{\xi\zeta,\xi}^{\{n\}}+s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{n\}}+\frac{\alpha}{\xi}s_{\xi\zeta}^{\{n\}}\Big)=$$
$$=\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\Big(-3nv_{\zeta}^{\{n\}}-\xi v_{\zeta,\xi}^{\{n\}}+2\zeta v_{\zeta,\zeta}^{\{n\}}+2\tau v_{\zeta,\tau}^{\{n\}}\Big)+$$
$$+\sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\zeta,\tau}^{\{n\}}+\varepsilon_1\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v_{\xi}^{\{j\}}v_{\zeta,\xi}^{\{n-j\}}+\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v_{\zeta}^{\{j\}}v_{\zeta,\zeta}^{\{n-j\}}+\varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\zeta}^{\{n\}}, \tag{25}$$

условия несжимаемости (12), которое в силу линейности может быть записано в виде рекуррентной цепочки (коэффициенты с отрицательными индексами далее всюду считаются равными нулю)

$$v_{\xi,\xi}^{\{n-1\}}+\frac{1}{\xi}v_{\xi}^{\{n-1\}}+v_{\zeta,\zeta}^{\{n\}}=0,\quad n\geqslant 0, \tag{26}$$

критерия Мизеса–Генки (11)

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(B_{11}s_{\xi\xi}^{\{j\}}s_{\xi\xi}^{\{n-j\}}+B_{22}s_{\zeta\zeta}^{\{j\}}s_{\zeta\zeta}^{\{n-j\}}-2B_{12}s_{\xi\xi}^{\{j\}}s_{\zeta\zeta}^{\{n-j\}}+Bs_{\xi\zeta}^{\{j\}}s_{\xi\zeta}^{\{n-j\}}\Big)=\delta_{n0},\quad n\geqslant 0, \tag{27}$$

следствия определяющих соотношений трансверсально-изотропной среды (9)

$$\Lambda_3\sum_{j=0}^{n-1}s_{\xi\xi}^{\{j\}}v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}+\frac{\Lambda_3}{\xi}\sum_{j=0}^{n-1}s_{\xi\xi}^{\{j\}}v_{\xi}^{\{n-1-j\}}+\Lambda_5\sum_{j=0}^{n}s_{\xi\xi}^{\{j\}}v_{\zeta,\zeta}^{\{n-j\}}=$$
$$=(\Lambda_1+2\Lambda_2)\sum_{j=0}^{n-1}s_{\zeta\zeta}^{\{j\}}v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}+\frac{\Lambda_1}{\xi}\sum_{j=0}^{n-1}s_{\zeta\zeta}^{\{j\}}v_{\xi}^{\{n-1-j\}}+\Lambda_3\sum_{j=0}^{n}s_{\zeta\zeta}^{\{j\}}v_{\zeta,\zeta}^{\{n-j\}},\quad n\geqslant 0, \tag{28}$$

$$\Lambda_4 \sum_{j=0}^{n} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\zeta}^{\{n-j\}} + \Lambda_4 \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\zeta,\xi}^{\{n-1-j\}} =$$

$$= (\Lambda_1 + 2\Lambda_2) \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\zeta}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}} + \frac{\Lambda_1}{\xi} \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\zeta}^{\{j\}} v_{\xi}^{\{n-1-j\}} + \Lambda_3 \sum_{j=0}^{n} s_{\xi\zeta}^{\{j\}} v_{\zeta,\zeta}^{\{n-j\}}, \quad n \geqslant 0. \tag{29}$$

Граничные условия (6) имеют вид

$$\xi = 1: \quad v_{\xi}^{\{n\}} = \delta_{n0}, \quad n \geqslant 0. \tag{30}$$

Условия того, что верхнее и нижнее основания $\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)$ свободны от напряжений (15), следующие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \Big(p^{\{n\}} - s_{\xi\xi}^{\{n\}} \Big) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} s_{\xi\zeta}^{\{n\}} = 0,$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} s_{\xi\zeta}^{\{n\}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} \Big(-p^{\{n\}} + s_{\zeta\zeta}^{\{n\}} \Big) = 0. \tag{31}$$

Безразмерные параметры $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ входят только в уравнения (24) и (25). На тех или иных временны́х интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может меняться. От этого зависит учёт или неучёт слагаемых в правых частях уравнений в процессе приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра.

4. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Воспользуемся методом асимптотического интегрирования [4–9] задачи (24)–(31), заключающемся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $v_{\xi}^{\{n\}}$, $v_{\zeta}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{n\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}$, $p^{\{n\}}$, где $n \geqslant 0$, в области Ω_τ с заранее неизвестной частью границы $\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)$.

Обратимся к уравнению (26) при $n=0$: $v_{\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0$. Отсюда следует, что $v_{\zeta}^{\{0\}} = v_{\zeta}^{\{0\}}(\xi,\tau)$, а с учётом требования антисимметричности по ζ получим $v_{\zeta}^{\{0\}} = 0$.

Из рекуррентной цепочки (26) при $n=1$ и из (29) при $n=0$ имеем

$$v_{\xi,\xi}^{\{0\}} + \frac{v_{\xi}^{\{0\}}}{\xi} + v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} v_{\xi,\zeta}^{\{0\}} = 0. \tag{32}$$

Перепишем первое уравнение и запишем следствие второго уравнения (32):

$$\frac{1}{\xi} \big(\xi v_{\xi}^{\{0\}} \big)_{,\xi} = -v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}}, \quad v_{\xi}^{\{0\}} = v_{\xi}^{\{0\}}(\xi,\tau).$$

Таким образом, $v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}}$ является функцией от ξ, τ. Обозначим $v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}} = a(\xi,\tau)$, тогда, ввиду нечётности $v_{\zeta}^{\{1\}}$ по ζ, общий вид $v_{\xi}^{\{0\}}$ и $v_{\zeta}^{\{1\}}$ будет следующий:

$$v_{\xi}^{\{0\}} = -\frac{1}{\xi} \bigg(\int_0^{\xi} a(u,\tau) u \, du - b(\tau) \bigg), \quad v_{\zeta}^{\{1\}} = a(\xi,\tau)\zeta, \tag{33}$$

где $a(\xi,\tau)$ и $b(\tau)$ — произвольные функции, удовлетворяющие граничному условию (26):

$$-\int_0^1 a(u,\tau)u\,du+b(\tau)=1.$$

Из физических соображений $\lim_{\xi\to 0} v_\xi^{\{0\}}=0$, откуда вытекает, что $b(\tau)\equiv 0$. Потребуем, чтобы решение (33) совпало с квазистатическим, для чего достаточно положить $a(\xi,\tau)$ равной константе, тогда

$$v_\xi^{\{0\}}=\xi,\quad v_\zeta^{\{1\}}=-2\zeta. \tag{34}$$

Линейные зависимости (34) имеют место для любых соотношений порядков малости по α параметров $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$. Рассмотрев первое уравнение в (27) и уравнения (28), (29) при $n=1$, выведем незамкнутую систему уравнений относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $v_\xi^{\{1\}}$:

$$B_{11}\left(s_{\xi\xi}^{\{0\}}\right)^2+B_{22}\left(s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}\right)^2-2B_{12}s_{\xi\xi}^{\{0\}}s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}+B\left(s_{\xi\zeta}^{\{0\}}\right)^2=1,\quad -2s_{\xi\xi}^{\{0\}}=s_{\zeta\zeta}^{\{0\}},$$

$$\Lambda_4 s_{\xi\xi}^{\{0\}}v_{\xi,\zeta}^{\{1\}}=2(\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3)s_{\xi\zeta}^{\{0\}}. \tag{35}$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{a}$ *— невырожденная матрица и* A_{iijk} *являются компонентами шарового тензора, тогда* $\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3\neq 0$.

Доказательство. Пусть $\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3=0$. Как отмечалось ранее, условие шаровости A_{iijk} следующее: $2(\Lambda_1+\Lambda_2)=\Lambda_3+\Lambda_5$. Несложно показать, что из этих двух условий следует, что $\det\mathbf{a}=4\Lambda_2(\Lambda_1\Lambda_5+\Lambda_2\Lambda_5-\Lambda_3^2)=0$. Получили противоречие, которое доказывает утверждение леммы.

Для замыкания системы (35) необходимо рассмотреть конкретный режим растяжения. Из (24) следует, что на временны́х интервалах, где одновременно $\varepsilon_1\alpha^2=o(1)$ и $\varepsilon_2=o(1)$, после приравнивания к нулю коэффициентов при α^0 с учётом (34) придём к системе уравнений

$$B_{11}\big(s_{\xi\xi}^{\{0\}}\big)^2+B_{22}\big(s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}\big)^2-2B_{12}s_{\xi\xi}^{\{0\}}s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}+B\big(s_{\xi\zeta}^{\{0\}}\big)^2=1,$$

$$-2s_{\xi\xi}^{\{0\}}=s_{\zeta\zeta}^{\{0\}},\quad s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{0\}}=0.$$

Из последнего уравнения имеем, что $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}=s_{\xi\zeta}^{\{0\}}(\xi,\tau)$, а ввиду требования нечетности $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ по ζ получаем

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}}=0,\quad s_{\xi\xi}^{\{0\}}=\frac{1}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}},\quad s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}=\frac{-2}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}.$$

Таким образом, пришли к напряжённому состоянию, соответствующему квазистатическому растяжению слоя цилиндрической формы. Также приравнивая коэффициенты при α^0, из (25) следует, что $-p_{,\zeta}^{\{0\}}+s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{0\}}=0$. Тем самым доказана

Теорема 1. *Пусть* s_{rz}, v_z *антисимметричны по* z, $a(\xi,\tau)$ *— константа и* $\varepsilon_1(t)=o(\alpha^{-2})$, $\varepsilon_2(t)=o(1)$. *Тогда с точностью до* $O(\alpha)$ *при* $\alpha\to 0$ *поле скорости и компоненты девиатора напряжений (19) совпадают с квазистатическим решением (16), (17).*

Итак, динамические эффекты начинают играть роль и вносить вклад в напряжённо-деформированное состояние, сопоставимый с квазистатикой, если выполняется хотя бы одно из требований: а) параметр ε_1 принимает значение порядка α^n, $n\leqslant -2$; б) параметр ε_2 принимает значение порядка α^m, $m\leqslant 0$.

Остановимся на случае, когда $\varepsilon_2 = O(1)$ и $\varepsilon_1 = o(\alpha^{-2})$. Рассмотрев коэффициенты при α^0 в (24) и (25) и добавив полученные уравнения к (35), получим замкнутую систему относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $v_\xi^{\{1\}}$:

$$s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{0\}} = \varepsilon_2\xi, \quad -p_{,\zeta}^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0, \tag{36}$$

где первое уравнение замыкает систему, а второе служит для определения давления $p^{\{0\}}$.

Решение системы (36) имеет вид

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = \varepsilon_2\xi\zeta, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} = \frac{\sqrt{1 - B\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}}{\sqrt{B_{11} + 4B_{22} + 4B_{12}}}, \quad s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = -\frac{2\sqrt{1 - B\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}}{\sqrt{B_{11} + 4B_{22} + 4B_{12}}},$$

$$v_\xi^{\{1\}} = -8\Lambda_4(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3)\sqrt{B_{11} + 4B_{22} + 4B_{12}}\,\frac{\sqrt{1 - B\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}}{\varepsilon_2\xi} + f(\xi,\tau), \tag{37}$$

где функция $f(\xi,\tau)$ определяется из последующих по α приближений. Заметим, что если формально устремить $\varepsilon_2 \to 0$, то компоненты девиатора (37) будут стремиться к квазистатическому решению. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть s_{rz}, v_z антисимметричны по z, $a(\xi,\tau)$ — константа и $\varepsilon_1(t) = o(\alpha^{-2})$, $\varepsilon_2(t) = O(1)$. Тогда при $\alpha \to 0$ коэффициенты $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $v_\xi^{\{1\}}$ рядов (19) имеют вид (37), причём выражение $\Lambda_4(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3)\sqrt{B_{11} + 4B_{22} + 4B_{12}}$ отлично от нуля в силу лемм 2 и 3.*

Вид функции $v_\xi^{\{1\}}$ позволяет сделать следующие выводы.

Следствие 1. *Точно однородным граничным условиям на боковой границе слоя $\xi = 1$ удовлетворить не удаётся.*

Следствие 2. *Если $|\xi| \to 0$ (т.е. стремится к центру слоя), то $\left|v_\xi^{\{1\}}\right| \to \infty$, что означает потерю асимптотичности в смысле Пуанкаре вблизи точки $\xi = 0$ ряда (19) для радиальной скорости v_ξ.*

Из этих утверждений следует, что использование асимптотических рядов (19) вблизи боковой поверхности $\xi = 1$ слоя, т.е. в зоне краевого эффекта и в центре $\xi = 0$, где происходит перестройка течения, неправомерно. По своей геометрии область неприменимости асимптотического разложения аналогична задаче Прандтля [8].

5. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ СЛОЯ

Обратимся к граничным условиям (31) на неизвестной границе слоя $\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)$. Порядок малости по α производной $\partial\eta/\partial\xi$ заранее неизвестен, поэтому необходимо сделать некоторые предположения о свойствах границы.

Теорема 3. *Пусть $\eta(\xi,\tau) = 1 + (\varepsilon_2/\alpha)\eta_1(\xi,\tau)$, где $\varepsilon_2 = C(t)\alpha^2$, $C(t) = O(1)$, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\eta_1 = \dfrac{\sqrt{B_{11} + 4B_{22} + 4B_{12}}}{6}\left(\xi^2 - \dfrac{1}{2}\right)$;

2) $p^{\{0\}} = -\dfrac{2}{\sqrt{B_{11} + 4B_{22} + 4B_{12}}}$.

Доказательство. Исключим из уравнений (15) давление p, перейдём к безразмерным переменным и разложим компоненты девиатора в ряды (19). Будем работать только с верхней частью границы $\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)$, так как нижнее основание получается отражением относительно плоскости $\zeta = 0$, т.е., используя уравнения (15), оставим знак “+”. Тогда получим

$$\zeta = \eta(\xi,\tau): \quad \alpha^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\zeta}^{\{n\}} + \alpha\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(s_{\xi\xi}^{\{n\}} - s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\xi\zeta}^{\{n\}} = 0. \tag{38}$$

Подставим в (38) компоненты девиатора (37), выражение для $\eta(\xi,\tau)$ из условия теоремы и приравняем подобные члены при α^2. Относительно η_1 будем иметь уравнение

$$\frac{d\eta_1}{d\xi}=\frac{\xi}{3}\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}},$$

из которого после интегрирования и нормировки (20) получим параболическую зависимость

$$\eta=1+\frac{\varepsilon_2\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}{6\alpha}\left(\xi^2-\frac{1}{2}\right),$$

моделирующую утоньшение слоя в центре и утолщение вблизи его боковой поверхности, т.е. шейкообразование при динамическом растяжении.

Найдём последний из неопределённых коэффициентов главного по α приближения (19) — давление $p^{\{0\}}$. Из второго уравнения (36) следует, что $-p^{\{0\}}+s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$ не зависит от ζ, а из второго граничного условия (31), рассматривая подобные члены при α^0, получаем, что эта же комбинация на границе равна нулю. Следовательно, всюду в области Ω_τ

$$p^{\{0\}}=s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}=-\frac{2}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Переход от квазистатики к динамическому режиму растяжения трансверсально-изотропного слоя, характеризующийся достижением безразмерной фунции ε_2 своих критических значений, влечет за собой образование и рост шейки в средней части слоя. Точно или приближённо найдены параметры напряжённо-деформированного состояния и других инерционных эффектов.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Победря, Б.Е. Лекции по тензорному анализу : учеб. пособие / Б.Е. Победря. — 3-е изд. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986.
2. Никабадзе, М.У. О некоторых вопросах тензорного исчисления с приложениями к механике / М.У. Никабадзе // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2015. — Т. 55. — С. 3–194.
3. Георгиевский, Д.В. Анизотропные скалярные определяющие соотношения и соответствующие им модели вязкопластического течения / Д.В. Георгиевский // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2022. — № 5. — С. 54–57.
4. Георгиевский, Д.В. Динамические режимы растяжения стержня из идеально жёстко-пластического материала / Д.В. Георгиевский // Прикл. механика и техн. физика. — 2021. — Т. 62, № 5. — С. 119–130.
5. Цветков, И.М. Динамическое осесимметричное растяжение тонкого круглого идеально жёстко-пластического слоя / И.М. Цветков // Изв. РАН. МТТ. — 2023. — № 5. — С. 79–88.
6. Цветков, И.М., Динамическое растяжение листа из идеально жёсткопластического материала / И.М. Цветков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2022. — № 6. — С. 51–60.
7. Цветков, И.М. Динамические режимы двухосного растяжения тонкой идеально жёсткопластичной прямоугольной пластины / И.М. Цветков // Прикл. математика и механика. — 2023. — Т. 87, № 4. — С. 684–695.
8. Georgievskii, D.V. Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem / D.V. Georgievskii, W.H. Müller, B.E. Abali // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2019. — Bd. 99, № 12. — S. 1–11.
9. Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques / A.H. Nayfeh. — New York : Wiley, 1981. — 519 p.

ON THE DYNAMIC STRETCHING OF A THIN ROUND IDEALLY RIGID PLASTIC LAYER MADE OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC MATERIAL

I. M. Tsvetkov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: cvetkoviv@yandex.ru

A system of equations modeling the dynamic stretching of a homogeneous circular layer of incompressible ideally rigid-plastic transversely isotropic material obeying the Mises–Hencky criterion is studied. The upper and lower bases are stress-free, the radial velocity is set at the lateral boundary, and the possibility of thickening or thinning of the layer is taken into account, which simulates neck formation and further development of the neck. Using the method of asymptotic integration, two characteristic stretching modes are identified, that is, the relations of dimensionless parameters are determined, in which consideration of inertial terms is necessary. When considering the regime associated with the achievement of acceleration on the side face of its critical values, an approximate solution of the problem was constructed.

Keywords: ideal plasticity, round layer, transversely isotropic material, tension, dynamics, neck, asymptotic expansion.

REFERENCES

1. Pobedrya, B.E., *Lektsii po tenzornomu analizu* (Lectures on Tensor Analysis), Moscow: MSU Press, 1986.
2. Nikabadze, M.U., Topics on tensor calculus with applications to mechanics, *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 225, no. 1, pp. 1–194.
3. Georgievskii, D.V., Anisotropic scalar constitutive equations and corresponding models of viscoplastic flow, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2022, vol. 77, no. 5, pp. 143–145.
4. Georgievskii, D.V., Dynamic tension of a rod made of an ideally rigid-plastic material, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 806–815.
5. Tsvetkov, I.M., Dynamic axisymmetric tension of a thin round ideally rigid-plastic layer, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1500–1508.
6. Tsvetkov, I.M., Dynamic tension of a sheet made of an ideally rigid-plastic material, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2022, vol. 77, no. 6, pp. 177–185.
7. Tsvetkov, I.M. Dynamic regimes of biaxial stretching of a thin ideally rigid-plastic rectangular plate, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 2656–2665.
8. Georgievskii, D.V., Müller, W.H., and Abali, B.E., Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2019, Bd. 99, no. 12, ss. 1–11.
9. Nayfeh, A.H., *Introduction to Perturbation Techniques*, New York: Wiley, 1981.