ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 322–345

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

М. В. Шамолин

Институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.11.2023 г., после доработки 01.11.2023 г.; принята к публикации 10.01.2024 г.

Предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы и дифференциальные формы) однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трёхмерным многообразиям (систем с тремя степенями свободы). Показана связь таких инвариантов и полного набора первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. Введены силовые поля, которые делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, тензорный инвариант.

DOI: 10.31857/S0374064124030041, EDN: PNLTLT

ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно [1–3], даёт возможность проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объёма позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, а для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны быть, вообще говоря, трансцендентными (т.е. имеющими существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функциями (см. [4–6]).

Кратко приведём примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты — это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий для данной системы (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (что, в частности, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов. Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает её и интегрирование, и качественное исследование. Подход данной статьи состоит в том, что для интегрирования автономной системы порядка m нужно знать $(m-1)$-й независимый тензорный инвариант.

Как показано ранее, задача о движении четырёхмерного маятника на обобщённом сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно образно описать как "поток набегающей среды, заполняющей объемлющее четырёхмерное пространство", приводит к динамической системе на касательном расслоении к трёхмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7–10]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Такое же фазовое пространство возникает в задаче о движении точки по трёхмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего четырёхмерного пространства. Отметим также и задачи о движении точки по более общим трёхмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т.д. Результаты, полученные в работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с тремя степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в статьях [11–13]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы первых интегралов и инвариантных дифференциальных форм фазового объёма для однородных систем на касательных расслоениях к гладким трёхмерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. в [14, 15]).

1. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЁХМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ

1.1. КООРДИНАТЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Рассмотрим гладкое трёхмерное риманово многообразие $M^3\{\alpha,\beta\}$ с координатами (α,β), $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha,\beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$, и изучим на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ структуру уравнений геодезических линий (при изменении координат на нём). Для этого исследуем достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),\quad \dot\beta_1=z_2f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2=z_1f_2(\alpha)g(\beta_1), \tag{1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда изучаются уравнения геодезических, например, с семью ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении трёхмерных поверхностей вращения, пространства Лобачевского и т.д.):

$$\begin{gathered}\ddot\alpha+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_1+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_2+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2=0,\end{gathered} \tag{2}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае кинематических соотношений (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$, примут вид

$$\dot z_1=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_1z_3-f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]z_1z_2,$$

$$\dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2z_3-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$\dot z_3 = -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_3^2-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2, \qquad (3)$$

и уравнения геодезических (2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1) почти всюду эквивалентны на многообразии $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ составной системе (1), (3) с новой частью координат z_1, z_2, z_3 на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(a) Системы на касательном расслоении к трёхмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере: метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего четырёхмерного пространства (естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере), и приведённая метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного четырёхмерного твердого тела (см. [13, 16, 17]).

(b) Системы на касательных расслоениях более общих трёхмерных поверхностей вращения.

(c) Системы на касательном расслоении трёхмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

1.2. О КОЛИЧЕСТВАХ “НЕИЗВЕСТНЫХ” ФУНКЦИЙ И УСЛОВИЙ, НА НИХ НАКЛАДЫВАЕМЫХ

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении трёхмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ штук при $n=3$, т.е. 18 коэффициентов. Как видно, общая задача интегрирования уравнений геодезических очень сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются ещё функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (1)), определяющие координаты на касательном расслоении. Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся “лишь” семью ($n(n-1)+1$ при $n=3$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (2). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет четыре штуки ($n(n-1)/2+1$ при $n=3$). Таким образом, мы имеем 11 функций, *характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нём.*

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(3)$) на имеющиеся $A(3)=11$ функций ($A(n)=3n(n-1)/2+2$ штук при $n=3$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 11, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(3)$, тем больше разность $A(3)-B(3)$ и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(3)=8$ условий на имеющиеся $A(3)=11$ функций. Число $B(3)$ складывается из трёх слагаемых: $B(3)=B_1(3)+B_2(3)+B_3(3)$. Число $B_1(3)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$, а именно:

$$f_1(\alpha)\equiv f_2(\alpha)=:f(\alpha), \qquad (4)$$

т.е. $B_1(3)=1$ (в общем случае $B_1(n)=(n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(3)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно:

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_1(\alpha), \quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_2(\beta_1), \qquad (5)$$

т.е. $B_2(3)=3$ (в общем случае $B_2(n)=n(n-1)/2$). Число $B_3(3)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$, и на коэффициенты связности, а именно:

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\equiv 0, \tag{6}$$

т.е. $B_3(3)=4$ (в общем случае $B_3(n)=n(n-1)/2+1$). Видно, что в общем случае $B(n)=$ $=B_1(n)+B_2(n)+B_3(n)=(n-1)^2+n(n-1)/2+1$, при этом $A(n)-B(n)=n$, что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия. В нашем случае $A(3)-B(3)=3$.

Замечание 1. Пусть выполнены условия (4), (5), при этом реализуется система равенств (6). Тогда справедливы следующие четыре ($n(n-1)/2+1$ при $n=3$) тождества:

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\alpha_{11}(\alpha),\quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^1_{22}(\beta_1),\quad \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha), \tag{7}$$

а также одно ($(n-1)(n-2)/2$ при $n=3$) тождество

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)\equiv g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)=:\Gamma_3(\alpha). \tag{8}$$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 1.

Замечание 2. Пусть выполнены условия (4), (5), при этом реализуются пять тождеств ((7) и (8)). Тогда справедлива система равенств (6), которая примет вид

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)\equiv\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1)=:\Gamma_3(\alpha),$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\equiv 0,$$

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\equiv 0,$$

$$2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}+g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)\equiv 0. \tag{9}$$

Таким образом, при выполнении четырёх условий ((4) и (5)) четыре условия (6) и четыре условия (9) в упомянутом смысле эквивалентны.

1.3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Для полного интегрирования системы шестого порядка достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Как будет показано, для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимые дифференциальные формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм с общим количеством, равным четырём. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, что рассмотрено далее. И то, что полный набор состоит из четырёх, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде $\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,\ i=1,2,3,$ является гладкая функция $\Phi(\dot{x};x) = \sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k$, но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым "выпрямив" квадратичную форму на фазовом многообразии. Кроме того, подчеркнём, что в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений (4), (5), (9) на 11 функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (1) и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ из (2).

Теорема 1. *Если выполнены условия (4), (5), (9), то система (1), (3) обладает полным набором, состоящим из четырёх первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \mathrm{const}; \tag{10}$$

$$\Phi_2(z_2,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \quad \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\,db\right\}; \tag{11}$$

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \quad \Psi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)\,db\right\}; \tag{12}$$

$$\Phi_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Psi^2(b) - C_3^2}}\,db = C_4 = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Более того, после некоторого её приведения заменой независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_3(\alpha)\frac{d}{d\tau} \tag{14}$$

и фазовых

$$w_3 = z_3, \quad w_2^* = \ln|w_2|, \quad w_2 = \sqrt{z_1^2+z_2^2}, \quad w_1^* = \ln\left|w_1 + \sqrt{1+w_1^2}\right|, \quad w_1 = \frac{z_2}{z_1}, \tag{15}$$

фазовый поток системы (1), (3) сохраняет фазовый объём с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^3\{w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма*

$$dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы, а именно, сделаем замены (14) независимой переменной и (15) фазовых переменных. Тогда система (1), (3) распадается следующим образом:

$$\dot{\alpha} = w_3, \quad \dot{w}_3 = -\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)e^{2w_2^*}, \quad \dot{w}_2^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)w_3, \tag{17}$$

$$\dot{w}_1^* = \pm e^{w_2^*}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right], \quad \dot{\beta}_1 = \pm\frac{W_1(w_1^*)e^{w_2^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \tag{18}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm\frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}g(\beta_1), \tag{19}$$

где $w_1 = W_1(w_1^*)$ в силу замены (15), при этом в составной системе (17)–(19) точкой обозначена производная по новой переменной τ. Видно, что дивергенция правой части составной системы (17)–(19) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании четырёх первых интегралов. Действительно, дифференцирование функции (10) в силу системы (1), (3) приводит к тождеству

$$-2f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2^3-$$
$$-2\left(f_3^2(\alpha)\left(2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right)+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right)\frac{z_2^2z_3}{f_3(\alpha)}-$$
$$-2\left(f_3^2(\alpha)\left(2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right)+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right)\frac{z_1^2z_3}{f_3(\alpha)}-$$
$$-2\left(f_1^2(\alpha)\left(2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right)+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right)\frac{z_1^2z_2}{f_1(\alpha)}\equiv 0,$$

если выполнена система дифференциальных равенств (6). Но, как указано выше, при выполнении четырёх условий ((4) и (5)) четыре условия (6) и четыре условия (9) в известном смысле эквивалентны.

Далее дифференцирование функции (11) в силу системы (1), (3) в условиях теоремы даёт

$$-f_3(\alpha)\left(\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right)z_3\sqrt{z_1^2+z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (11).

Дифференцирование функции (12) в силу системы (1), (3) в условиях теоремы даёт

$$-f_3(\alpha)\left(\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right)z_1z_3\Psi(\beta_1)-$$
$$-f(\alpha)\left(\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]\Psi(\beta_1)-\frac{d\Psi(\beta_1)}{d\beta_1}\right)z_1z_2\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\qquad \frac{d\Psi(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]\Psi(\beta_1),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (12).

Далее рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (11) и (12) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2}=\mp\frac{C_3}{\sqrt{C_2^2\Psi^2(\beta_1)-C_3^2}}. \tag{20}$$

Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2} g(\beta_1).$$

Используя в нём равенство (20), получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (13). Теорема доказана.

Заметим также, что система равенств (6) (или (9)) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (10) (или см. ниже (27)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [18–20]). Ну а поиск как первого интеграла (10), так и интегралов (11)–(13) основывается на наличии в системе дополнительных групп симметрий [21–24].

Пример 1. В случае обобщённых сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, когда метрика на трёхмерной сфере $\mathbf{S}^3$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего четырёхмерного пространства (задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2 \sin^2\beta_1\right]\sin\alpha\cos\alpha = 0, \quad \ddot\beta_1 + 2\dot\alpha\dot\beta_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dot\beta_2^2\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,$$

$$\ddot\beta_2 + 2\dot\alpha\dot\beta_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0$$

и имеющая первые интегралы (10)–(13), примет следующий вид:

$$\dot\alpha = -z_3, \quad \dot z_3 = -(z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},$$

$$\dot z_2 = z_2 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + z_1^2\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},$$

$$\dot z_1 = z_1 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_1 z_2\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},$$

$$\dot\beta_1 = z_2\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \dot\beta_2 = -z_1\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{21}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (21) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 2. В случае обобщённых сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, но когда метрика на трёхмерной сфере $\mathbf{S}^3$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1\right]\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \quad \ddot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \dot\beta_2^2\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,$$

$$\ddot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0 \tag{22}$$

и имеющая первые интегралы (10)–(13), примет вид

$$\dot\alpha=-z_3,\quad \dot z_3=-(z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},$$
$$\dot z_2=z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\dot z_1=z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\dot\beta_1=z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\quad \dot\beta_2=-z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\quad \nu_1\in\mathbb{R},\tag{23}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (23) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 3. В случае трёхмерного пространства Лобачевского (с координатами $x=\beta_1$, $y=\beta_2$, $z=\alpha$, задача класса (c)) трёхпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot\alpha-\frac{1}{\alpha}(\dot\alpha^2-\dot\beta_1^2-\dot\beta_2^2)=0,\quad \ddot\beta_1-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_1=0,\quad \ddot\beta_2-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_2=0\tag{24}$$

и имеющая первые интегралы (10)–(13), будет иметь вид

$$\dot\alpha=z_3\nu_1\alpha,$$
$$\dot z_3=-z_2^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}-z_1^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3},\quad \dot z_2=z_2z_3\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2},\quad \dot z_1=z_1z_3\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3},$$
$$\dot\beta_1=z_2\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}},\quad \dot\beta_2=z_1\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_3}},\quad \nu_1,\nu_2,\nu_3\in\mathbb{R},\tag{25}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (25) рассматривать как новые кинематические соотношения.

2. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЁХМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

2.1. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (1), (3) и получим систему *консервативную*, а именно, внесём в систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)\\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha)\\ F_3(\alpha)f_3(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),$$

$$\dot z_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right] z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,$$

$$\dot z_2 = F_2(\beta_1) f_1(\alpha) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,$$

$$\dot z_1 = F_1(\beta_2) f_2(\alpha) g(\beta_1) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right] z_1 z_2,$$

$$\dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \tag{26}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - F_3(\alpha) f_3^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,$$

$$\ddot\beta_1 - F_2(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,$$

$$\ddot\beta_2 - F_1(\beta_2) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

2.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Для полного интегрирования системы шестого порядка (26) достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Как будет показано, для полного интегрирования системы (26) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимые дифференциальные формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм с общим количеством, равным четырём. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, что рассмотрено далее. И то, что полный набор состоит из четырёх, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Кроме того, подчеркнём, что в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений ((4), (5) и (9)) на 11 функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Теорема 2. *Если выполнены условия (4), (5), (9), то система (26) обладает полным набором, состоящим из четырёх первых интегралов:*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \mathrm{const},$$

$$V(\alpha,\beta) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)\,da - 2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b)\,db - 2\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b)\,db, \tag{27}$$

а также, для упрощения, при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$ — первые интегралы (11)–(13).

Более того, после некоторого её приведения — замен независимой переменной (14) и фазовых (15) — фазовый поток системы (26) сохраняет фазовый объём с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^3\{w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма (16).

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

3. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЁХМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

3.1. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем систему (26) и получим систему *с диссипацией*. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$\begin{gathered}
\dot\alpha = z_3f_3(\alpha)+b\delta(\alpha),\\
\dot z_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha)-f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_3^2-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2-\\
-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2+z_3F_3^1(\alpha),\\
\dot z_2 = F_2(\beta_1)f_1(\alpha)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2z_3-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2+z_2F_2^1(\alpha),\\
\dot z_1 = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_1z_3-\\
-f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]z_1z_2+z_1F_1^1(\alpha),\\
\dot\beta_1 = z_2f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2 = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1),
\end{gathered}\tag{28}$$

и она почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\ddot\alpha-\left(b\tilde\delta(\alpha)+F_3^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\right)\dot\alpha-F_3(\beta_1)f_3^2(\alpha)+b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha)+\\
+b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\
\ddot\beta_1-\left(F_2^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\right)\dot\beta_1-F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha)+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\
\ddot\beta_2-\left(F_1^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\right)\dot\beta_2-F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)+\\
+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2=0
\end{gathered}$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$. Здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha)=d\delta(\alpha)/d\alpha$.

Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b>0$, в первом уравнении системы (28) (в отличие от системы (26)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от z_1, z_2, z_3 в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)\\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha)\\ F_3(\alpha)f_3(\alpha)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1F_1^1(\alpha)\\ z_2F_2^1(\alpha)\\ z_3F_3^1(\alpha)\end{pmatrix}.$$

3.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Для полного интегрирования системы шестого порядка (28) достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Как будет показано, для полного интегрирования системы (28) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимые дифференциальные формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм с общим количеством, равным четырём. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде. То, что полный набор состоит из четырёх, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Подчеркнём, что в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений ((4), (5) и (9)) на 11 функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (28) при выполнении свойств (4), (5), (9), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси $\dot z_1$ и $\dot z_2$ (т.е. присутствует проекция внешней силы лишь на ось $\dot z_3$): $F_1(\beta_2)\equiv F_2(\beta_1)\equiv 0$.

Тогда система (28) допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка

$$\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha)+b\delta(\alpha),\quad \dot z_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)(z_2^2+z_1^2)+z_3F_3^1(\alpha),$$
$$\dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2z_3 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_1^2+z_2F_2^1(\alpha),$$
$$\dot z_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_1z_3 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]z_1z_2+z_1F_1^1(\alpha),$$
$$\dot\beta_1 = z_2 f(\alpha) \tag{29}$$

при наличии шестого уравнения

$$\dot\beta_2 = z_1 f(\alpha)g(\beta_1). \tag{30}$$

Далее накладываем определённые ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому предположим, что выполнены следующие равенства:

$$F_1^1(\alpha)\equiv F_2^1(\alpha)=:F^1(\alpha). \tag{31}$$

Для полного интегрирования (по Якоби) системы (29), (30) при условии (31) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных $w_3=z_3$, $w_2=\sqrt{z_1^2+z_2^2}$, $w_1=z_2/z_1$ система (29), (30) распадается следующим образом:

$$\dot\alpha = w_3 f_3(\alpha)+b\delta(\alpha),\quad \dot w_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)w_2^2+w_3F_3^1(\alpha),$$
$$\dot w_2 = \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)w_2w_3+w_2F^1(\alpha); \tag{32}$$

$$\dot w_1 = \pm w_2\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right],\quad \dot\beta_1=\pm\frac{w_1w_2}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha); \tag{33}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{34}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (32)–(34) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (32), один — для системы (33) (после соответствующей замены независимой переменной в ней) и дополнительный тензорный инвариант, "привязывающий" уравнение (34) (т.е. всего четыре).

Продолжим определённые ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha}(\ln|\Delta(\alpha)|) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \tag{35}$$

а для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k=1,2,3$, должны выполняться равенства

$$F_3(\alpha) = \lambda_3^0 \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}\right) = \lambda_3^0 \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_3(\alpha) \frac{d}{d\alpha}(\Delta(\alpha)) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha), \quad k=1,2,3. \tag{36}$$

Условие (35) назовём "геометрическим", а условия из группы (36) — "энергетическими". При этом $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 =: \lambda^1$ в силу (31). Условие (35) названо геометрическим в том числе потому, что оно накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (36) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, "потенциальными" по отношению к "силовой" функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *(знако)переменную диссипацию* (см. также [15, 25]).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (35) и (36). Тогда система (32)–(34) обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными [15] (т.е. имеющими существенно особые точки) первыми интегралами.*

Доказательство. Сопоставим сначала системе третьего порядка (32) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)w_2^2/f_3(\alpha) + w_3F_3^1(\alpha)}{w_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)},$$
$$\frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)w_2w_3/f_3(\alpha) + w_2F^1(\alpha)}{w_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \tag{37}$$

Далее введём однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_2 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)} \tag{38}$$

и приведём систему (37) к следующему виду:

$$\Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \frac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F_3^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)},$$

$$\Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)},$$

или, учитывая (9), к (почти всюду) эквивалентному виду

$$\Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha}=\frac{F_3(\alpha)f_3(\alpha)-f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_3(\alpha)-\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2+[\Delta(\alpha)F_3^1(\alpha)-b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_2}{u_2\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)},$$

$$\Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha}=\frac{[f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)/f_3(\alpha)-\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1u_2+[\Delta(\alpha)F^1(\alpha)-b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1}{u_2\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)}, \tag{39}$$

здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha)=d(\Delta(\alpha))/d\alpha$.

Для интегрирования системы (39) должны выполняться геометрическое и энергетические условия (35) и (36). Действительно, после их выполнения система (39) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{\lambda_3^0-\kappa u_1^2-u_2^2+(\lambda_3^1-b)u_2}{(\kappa-1)u_1u_2+(\lambda^1-b)u_1}. \tag{40}$$

Уравнение (40) есть уравнение Абеля [26], его общее решение имеет громоздкий вид. В частности, при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$ уравнение имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{-u_2^2-u_1^2+(\lambda^1-b)u_2+\lambda_3^0}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{41}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_3,w_2;\alpha)=\frac{f_3^2(\alpha)(w_3^2+w_2^2)+(b-\lambda^1)w_3\delta(\alpha)f_3(\alpha)-\lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{w_2\delta(\alpha)f_3(\alpha)}=C_1=\mathrm{const}\,. \tag{42}$$

Замечание 3. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (32) (как часть системы (32)–(34)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [27, 28]). При этом она превращается в консервативную систему при выполнении условия (9), геометрического и энергетических условий (35), (36) (но при любой гладкой функции $F_3(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1=\lambda_3^1=-b$, $\kappa=-1$:

$$\dot{\alpha}=w_3f_3(\alpha)+b\delta(\alpha),\quad \dot{w}_3=F_3(\alpha)f_3(\alpha)-\kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_2^2-bw_3f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha),$$

$$\dot{w}_2=\kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_2w_3-bw_2f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha). \tag{43}$$

Действительно, система (43) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_3,w_2;\alpha)=w_2^2+w_3^2+2bw_3\Delta(\alpha)+V(\alpha)=C_1=\mathrm{const},\quad V(\alpha)=-2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F_3(a)\,da, \tag{44}$$

$$\Phi_2(w_2;\alpha)=w_2\Delta(\alpha)=C_2=\mathrm{const}\,. \tag{45}$$

В силу предыдущих свойств первых интегралов имеем

$$\Phi_2(w_2;\alpha)=w_2f(\alpha)\exp\biggl\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\,db\biggr\}=$$

$$=w_2f(\alpha)\exp\biggl\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\biggl[\Gamma_3(b)\frac{f^2(b)}{f_3^2(b)}+\frac{d(\ln|f(b)|)}{db}\biggr]\,db\biggr\}\cong w_2\exp\biggl\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_3(b)\frac{f^2(b)}{f_3^2(b)}\,db\biggr\},$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

В силу (35), (36) последняя величина при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1=-b$ будет иметь вид

$$w_2\exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|\Delta(b)|\,db\right\}\cong w_2\Delta(\alpha)$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (44), (45) также является первым интегралом системы (43), но при $\lambda^1=\lambda_3^1\neq-b$ каждая из функций

$$w_3^2+w_2^2+(b-\lambda^1)w_3\Delta(\alpha)-\lambda_3^0\Delta^2(\alpha) \tag{46}$$

и (45) по отдельности не является первым интегралом системы (32). Однако отношение (46) к (45) является первым интегралом системы (32) (при $\kappa=-1$) при любых $\lambda^1=\lambda_3^1$, b.

Далее найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (32) при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$. Для этого преобразуем инвариантное соотношение (41) при $u_1\neq0$ следующим образом:

$$\left(u_2+\frac{-\lambda^1+b}{2}\right)^2+\left(u_1+\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{(\lambda^1-b)^2+C_1^2}{4}+\lambda_3^0. \tag{47}$$

Параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1-b)^2+C_1^2+4\lambda_3^0\geqslant0, \tag{48}$$

и фазовое пространство системы (32) расслаивается на семейство поверхностей (47).

Таким образом, в силу соотношения (41) первое уравнение системы (39) при условиях (35), (36) и при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde\Delta(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha}=\frac{2(-\lambda_3^0-(\lambda^1-b)u_2+u_2^2)+C_1U_1(C_1,u_2)}{u_2+b},$$
$$U_1(C_1,u_2)=\frac12\Big(-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-(\lambda^1-b)u_2-\lambda_3^0)}\Big),$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (48). Тогда квадратуру для поиска дополнительного первого интеграла системы (32) запишем как

$$-\int\frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}=\int\frac{(b+u_2)\,du_2}{2(-\lambda_3^0-(\lambda^1-b)u_2+u_2^2)+C_1(-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-(\lambda^1-b)u_2-\lambda_3^0)})/2}. \tag{49}$$

Левая часть (49) (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если $u_2-(\lambda^1-b)/2=r_1$, $b_1^2=(\lambda^1-b)^2+C_1^2+4\lambda_3^0$, то правая часть равенства (49) примет вид

$$-\frac14\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}+b\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=-\frac12\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm1\right|\mp\frac b2I_1,$$
$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{50}$$

При вычислении интеграла (50) возможны три случая: если $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_3^0$, то

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2+4\lambda_3^0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+\mathrm{const};$$

если $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_3^0$, то

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const};$$

если $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_3^0$, то

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}.$$

Возвращаясь к переменной $r_1=w_3/\Delta(\alpha)-(\lambda^1-b)/2$, получим окончательный вид для величины I_1 во всех случаях: при $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_3^0$

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+\mathrm{const};$$

при $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_3^0$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const};$$

при $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_3^0$

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}.$$

Итак, найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (32) при перечисленных выше условиях (в том числе при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных. Полученный дополнительный первый интеграл имеет структурный вид

$$\Theta_2(w_3,w_2;\alpha)=G\left(\Delta(\alpha),\frac{w_3}{\Delta(\alpha)},\frac{w_2}{\Delta(\alpha)}\right)=C_2=\mathrm{const}\,. \tag{51}$$

Выражение первого интеграла (51) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть неэлементарной функцией).

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (32)–(34) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (32). Для полной же её интегрируемости достаточно найти один первый интеграл — для системы (33) (меняя в ней независимую переменную), становящуюся независимой подсистемой после соответствующей замены независимой переменной, а также ещё один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (34). Первый интеграл для системы (33) будет иметь вид

$$\Theta_3(w_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\Psi(\beta_1)}=C_3=\mathrm{const}, \tag{52}$$

функция $\Psi(\beta_1)$ определена в (12). В переменных z первый интеграл (52) записывается как

$$\Theta_3'(z_2,z_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Psi(\beta_1)}=C_3'=\mathrm{const}\,. \tag{53}$$

Дополнительный первый интеграл, "привязывающий" (34), находится по аналогии с (13):

$$\Theta_4(\beta_1,\beta_2)=\beta_2\pm\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\frac{C_3g(b)}{\sqrt{C_2^2\Psi^2(b)-C_3^2}}\,db=C_4=\mathrm{const}, \tag{54}$$

где после вычисления интеграла (54) вместо постоянной C_3 можно формально подставить левую часть равенства (52) (или (53)).

Таком образом, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (32)–(34) имеет четыре первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки).

Теорема 3 доказана.

3.3. ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Теорема 4. *Если для системы вида (32)–(34) выполняются геометрическое и энергетические свойства (35), (36), то у неё также существуют функционально независимые между собой четыре инвариантные дифференциальные формы с, вообще говоря, трансцендентными (т.е. имеющими существенно особые точки) коэффициентами (ср. с [8]). Эти дифференциальные формы, для упрощения, при* $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$ *примут следующий вид:*

$$\rho_1(w_3,w_2;\alpha)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(w_3,w_2;\alpha)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\}\frac{u_3^2+u_2^2+(b-\lambda^1)u_3-\lambda_3^0}{u_2},\quad u_k=\frac{w_k}{\Delta(\alpha)},\quad k=2,3,$$

$$\rho_2(w_3,w_2;\alpha)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha,\ \rho_2(w_3,w_2;\alpha)=\Delta(\alpha)\exp\left\{\int\frac{(2b+\lambda^1+u_3)\,du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\},$$

$$\rho_3(w_1;\beta_1)=\frac{1}{\sqrt{1+w_1^2}}\ dw_1\wedge d\beta_1,$$

$$\rho_4(w_3,w_2;\alpha,\beta_1,\beta_2)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha\wedge d\beta_1\wedge d\beta_2,$$

$$\rho_4(w_3,w_2;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\}\Theta_4(\beta_1,\beta_2),$$

и они, вообще говоря, зависимы с первыми интегралами (42), (51), (52), (54).

Доказательство. I. Система (32) составной рассматриваемой системы (32)–(34) при выполнении свойств (35), (36) имеет вид

$$\dot{\alpha} = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \quad \dot{w}_3 = \lambda_3^0 \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2^2 + \lambda_3^1 w_3 f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha),$$
$$\dot{w}_2 = \kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 w_3 + \lambda^1 w_2 f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha). \tag{55}$$

После замен независимой $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ и фазовой $w_2^* = \ln|w_2|$ переменных система (55) примет вид

$$\dot{\alpha} = X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha) = w_3 + b\Delta(\alpha), \quad \dot{w}_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) = \lambda_3^0 \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_2^*} + \lambda_3^1 w_3 \tilde{\Delta}(\alpha),$$
$$\dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha), \tag{56}$$

здесь точкой обозначена производная по τ.

Для системы (56) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_3, w_2^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объёма $\rho(w_3, w_2^*; \alpha) dw_3 \wedge dw_2^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\big[\rho(w_3, w_2^*; \alpha) X(w_3, w_2^*; \alpha)\big] = 0, \tag{57}$$

где

$$X(w_3, w_2^*; \alpha) = \{X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha)\}$$

— векторное поле системы (56) в координатах $(w_3, w_2^*; \alpha)$. Уравнение (57) перепишем как

$$X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_{w_3} + X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_{w_2^*} = -\rho \operatorname{div} X(w_3, w_2^*; \alpha), \tag{58}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_3, w_2^*; \alpha) = (b + \lambda_3^1)\tilde{\Delta}(\alpha). \tag{59}$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (58) в частных производных будет иметь вид

$$\dot{\alpha} = X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), \quad \dot{w}_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), \quad \dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha), \quad \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_3^1)\tilde{\Delta}(\alpha). \tag{60}$$

У системы, состоящей из первых трёх уравнений системы (60), уже найдены два первых интеграла (42) и (51). Найдём третий независимый первый интеграл системы (60) уравнений характеристик. Сопоставим системе (60) следующую неавтономную систему:

$$\frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{\lambda_3^0 \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\tilde{\Delta}(\alpha) w_2^2/\Delta(\alpha) + \lambda_3^1 w_3 \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_3 + b\Delta(\alpha)}, \tag{61}$$

$$\frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{\kappa\tilde{\Delta}(\alpha) w_2 w_3/\Delta(\alpha) + \lambda^1 w_2 \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_3 + b\Delta(\alpha)}, \quad \frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{(b + \lambda_3^1)\rho\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_3 + b\Delta(\alpha)} \tag{62}$$

или

$$\frac{dw_3}{d\Delta} = \frac{\lambda_3^0 \Delta - \kappa w_2^2/\Delta + \lambda_3^1 w_3}{w_3 + b\Delta}, \quad \frac{dw_2}{d\Delta} = \frac{\kappa w_2 w_3/\Delta + \lambda^1 w_2}{w_3 + b\Delta}, \quad \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1)\rho}{w_3 + b\Delta}. \tag{63}$$

После введения однородных переменных $w_3 = u_2\Delta$, $w_2 = u_1\Delta$, похожих на соответствующие переменные в замене (38), систему (63) перепишем в виде

$$\Delta\frac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_3^1 u_2}{u_2 + b}, \quad \Delta\frac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \frac{\kappa u_1 u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \quad \Delta\frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1)\rho}{u_2 + b}$$

или

$$\Delta\frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b - \lambda_3^1)u_2}{u_2 + b}, \quad \Delta\frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa - 1)u_1 u_2 - (b - \lambda^1)u_1}{u_2 + b}, \quad \Delta\frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1)\rho}{u_2 + b}. \tag{64}$$

Из первых двух уравнений системы (64) получим первый интеграл (42). Из квадратуры

$$-\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{(u_2 + b)du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2}\left(C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)}\right),$$
$$U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda^1)u_2 - \lambda_3^0, \quad C_1 \neq 0,$$

можем записать первый интеграл (51) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda_3^1$). И, наконец, из

$$\frac{d\rho}{(b + \lambda^1)\rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \tag{65}$$

получаем первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ. Вычислим квадратуру (65). В самом деле, справедливо инвариантное соотношение

$$\rho \exp\left\{-(b + \lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} = C_\rho = \mathrm{const}, \tag{66}$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (60). Таким образом, общее решение линейного уравнения (58) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\}\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2], \tag{67}$$

где $\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (42), (51) соответственно.

В частности, за два функционально независимых решения линейного уравнения (58) можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_3, w_2; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\}\Theta_1(w_3, w_2; \alpha),$$
$$\rho_2(w_3, w_2; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\}\Theta_2(w_3, w_2; \alpha), \quad u_2 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}.$$

II. Рассмотрим систему (33). После замены независимой переменной $d/dt = \pm w_2 f(\alpha)d/d\tau$ она примет вид

$$\dot{w}_1 = X_{w_1}(w_1; \beta_1) = \sqrt{1 + w_1^2}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right], \quad \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_1; \beta_1) = \frac{w_1}{\sqrt{1 + w_1^2}}, \tag{68}$$

где также точкой обозначена производная по τ.

Для системы (68) будем искать интегральный инвариант с плотностью $\rho(w_1;\beta_1)$, соответствующей дифференциальной форме площади $\rho(w_1;\beta_1)dw_1\wedge d\beta_1$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}[\rho(w_1;\beta_1)X(w_1;\beta_1)]=0, \tag{69}$$

где $X(w_1;\beta_1)=\{X_{w_1}(w_1;\beta_1),X_{\beta_1}(w_1;\beta_1)\}$ — векторное поле рассматриваемой системы (68) в координатах $(w_1;\beta_1)$. Уравнение (69) перепишем как

$$X_{w_1}(w_1;\beta_1)\rho_{w_1}+X_{\beta_1}(w_1;\beta_1)\rho_{\beta_1}=-\rho\operatorname{div}X(w_1;\beta_1), \tag{70}$$

при этом

$$\operatorname{div}X(w_1;\beta_1)=\frac{w_1}{\sqrt{1+w_1^2}}\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right].$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (70) в частных производных примет вид

$$\dot{w}_1=X_{w_1}(w_1;\beta_1),\quad \dot{\beta}_1=X_{\beta_1}(w_1;\beta_1),\quad \dot{\rho}=-\rho\frac{w_1}{\sqrt{1+w_1^2}}\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]. \tag{71}$$

У системы, состоящей из первых двух уравнений системы (71), уже найден первый интеграл (52). Найдём дополнительный независимый первый интеграл для системы (71). Сопоставим двум последним уравнениям системы (71) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{d\rho}{d\beta_1}=-\rho\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right],$$

которое даёт инвариантное соотношение

$$\Theta_{\rho_3}(\beta_1;\rho)=\rho\Psi(\beta_1)=C_{\rho_3}=\mathrm{const},$$

являющееся вторым, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (71) (о функции $\Psi(\beta_1)$ см. (12)).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (70) в частных производных будет иметь вид $\rho=\mathcal{G}[\Theta_3]/\Psi_1(\beta_1)$, где $\mathcal{G}[\Theta_3]$ — произвольная гладкая функция одного аргумента, при этом Θ_3 — первый интеграл (52).

В частности, если в качестве функции $\mathcal{G}[\Theta_3]$ выбрать

$$\mathcal{G}[\Theta_3]=\frac{1}{\Theta_3}=\frac{\Psi(\beta_1)}{\sqrt{1+w_1^2}},$$

то за решение линейного уравнения (70) можно взять функцию

$$\rho_3(w_1;\beta_1)=\frac{1}{\sqrt{1+w_1^2}}. \tag{72}$$

III. Инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_3,w_2;\alpha)$, $p=1,2$, а также $\rho_3(w_1;\beta_1)$ были получены выше из исследований отдельных систем (32) и (33), которые сами составляют общую рассматриваемую составную систему (32)–(34). Возникает вопрос: а как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит нам, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, “привязывающей” уравнение (34).

Составная рассматриваемая система (32)–(34) при выполнении свойств (35), (36) имеет вид

$$\dot\alpha = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \quad \dot w_3 = \lambda_3^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2^2 + \lambda_3^1 w_3 f_3(\alpha)\tilde\Delta(\alpha),$$

$$\dot w_2 = \kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 w_3 + \lambda^1 w_2 f_3(\alpha)\tilde\Delta(\alpha); \tag{73}$$

$$\dot w_1 = \pm w_2\sqrt{1+w_1^2} f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right], \quad \dot\beta_1 = \pm\frac{w_1 w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha); \tag{74}$$

$$\dot\beta_2 = \pm\frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{75}$$

После замен независимой $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ и фазовых переменных по формулам

$$w_2^* = \ln|w_2|, \quad w_1^* = \ln\left|w_1 + \sqrt{1+w_1^2}\right| \tag{76}$$

составная система (73)–(75) примет вид

$$\dot\alpha = X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha) = w_3 + b\Delta(\alpha),$$

$$\dot w_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) = \lambda_3^0\Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_2^*} + \lambda_3^1 w_3\tilde\Delta(\alpha),$$

$$\dot w_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 + \lambda^1\tilde\Delta(\alpha); \tag{77}$$

$$\dot w_1^* = X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_2^*}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right],$$

$$\dot\beta_1 = X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha) = \pm\frac{W_1(w_1^*)e^{w_2^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}; \tag{78}$$

$$\dot\beta_2 = X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm\frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1), \tag{79}$$

при этом в составной системе (77)–(79) точкой обозначена производная по новой независимой переменной τ, а $w_1 = W_1(w_1^*)$ — функция в силу замен (76). В принципе, замена (76) носит технический характер, при этом можно использовать как группу переменных w_2^*, w_1^*, так и группу переменных w_2, w_1.

Для составной системы (77)–(79) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$, соответствующие дифференциальным формам объёма

$$\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\left[\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) X(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\right] = 0, \tag{80}$$

где

$$X(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \{X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha),$$

$$X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1)\}$$

— векторное поле составной системы (77)–(79) в координатах $(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$.

Уравнение (80) перепишем в виде

$$X_\alpha(w_3,w_2^*;\alpha)\rho_\alpha+X_{w_3}(w_3,w_2^*;\alpha)\rho_{w_3}+X_{w_2^*}(w_3,w_2^*;\alpha)\rho_{w_2^*}+X_{w_1^*}(w_2^*;\alpha,\beta_1)\rho_{w_1^*}+ \\ +X_{\beta_1}(w_2^*,w_1^*;\alpha)\rho_{\beta_1}+X_{\beta_2}(w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1)\rho_{\beta_2}=-\rho\operatorname{div}X(w_3,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2), \tag{81}$$

при этом $\operatorname{div}X(w_3,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2)=(b+\lambda_3^1)\tilde{\Delta}(\alpha)$, как и в случае (59) для "отдельной" системы (56). Тогда будем иметь следующую систему уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (81) в частных производных:

$$\dot\alpha=X_\alpha(w_3,w_2^*;\alpha),\quad \dot w_3=X_{w_3}(w_3,w_2^*;\alpha),\quad \dot w_2^*=X_{w_2^*}(w_3,w_2^*;\alpha),\quad \dot w_1^*=X_{w_1^*}(w_2^*;\alpha,\beta_1), \\ \dot\beta_1=X_{\beta_1}(w_2^*,w_1^*;\alpha),\quad \dot\beta_2=X_{\beta_2}(w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1),\quad \dot\rho=-\rho(b+\lambda_3^1)\tilde{\Delta}(\alpha); \tag{82}$$

она включает систему уравнений характеристик (60) для уравнения (58).

У системы, состоящей из первых шести уравнений системы (82), уже найдены четыре первых интеграла (42), (51), (52) и (54) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (66), "привязывающий" уравнение (последнее уравнение системы (82)) на функцию ρ. Таким образом, общее решение уравнения (81) имеет вид

$$\rho=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\mathcal{H}[\Theta_1,\ldots,\Theta_4],$$

где $\mathcal{H}[\Theta_1,\ldots,\Theta_4]$ — произвольная гладкая функция четырёх аргументов, Θ_1, ..., Θ_4 — четыре первых интеграла (42), (51), (52), (54) соответственно.

В частности, за четыре функционально независимых решения линейного уравнения (81) в частных производных можно взять функции

$$\begin{gathered}\rho_1(w_3,w_2;\alpha)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\Theta_1(w_3,w_2;\alpha),\\ \rho_2(w_3,w_2;\alpha)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\Theta_2(w_3,w_2;\alpha),\quad u_2=\frac{w_3}{\Delta(\alpha)},\quad u_1=\frac{w_2}{\Delta(\alpha)},\\ \rho_3(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\Theta_3(w_1;\beta_1),\\ \rho_4(w_3,w_2;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\Theta_4(\beta_1,\beta_2).\end{gathered} \tag{83}$$

В п. III данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (77)–(79). Понятно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_3,w_2;\alpha)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_3,w_2;\alpha)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (32), но и для составной системы (32)–(34). При этом для интегрирования составной системы (32)–(34) можно использовать как более "громоздкую" форму с функцией (83), так и форму с функцией (72), имеющей более простой наглядный вид, поскольку составная система (32)–(34) распалась известным образом. Теорема доказана.

Строение первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией изучалось также в [24, 25]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [7, 14, 16], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к трёхмерной сфере, а также более общих систем на расслоении трёхмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского. При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, особо выделим работы [22, 29].

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов, В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, № 1 (445). — С. 117–148.
2. Колмогоров, А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А.Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.
3. Poincaré, H. Calcul des probabilités / H. Poincaré. — Paris : Gauthier–Villars, 1912. — 352 p.
4. Бурбаки, Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер / Н. Бурбаки ; пер. с фр. Е.И. Стечкиной ; ред. С.Б. Стечкин. — М. : Наука, 1967. — 396 с.
5. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат ; в 2-х ч. — М. : Наука, 1987.
6. Шамолин, М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 3. — С. 209–210.
7. Георгиевский, Д.В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в $\mathbb{R}^n$ / Д.В. Георгиевский, М.В. Шамолин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
8. Трофимов, В.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем / В.В. Трофимов, М.В. Шамолин // Фунд. и прикл. математика. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 3–229.
9. Шамолин, М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырёхмерного твердого тела в сопротивляющейся среде / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2000. — Т. 375, № 3. — С. 343–346.
10. Шамолин, М.В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2009. — Т. 425, № 3. — С. 338–342.
11. Шамолин, М.В. Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. — 2010. — Т. 65, № 1. — С. 189–190.
12. Шамолин, М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2011. — Т. 437, № 2. — С. 190–193.
13. Шамолин, М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 506–509.
14. Иванова, Т.А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики / Т.А. Иванова // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 43–51.
15. Самсонов, В.А. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде / В.А. Самсонов, М.В. Шамолин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
16. Шамолин, М.В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^4$ / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 6. — С. 233–234.
17. Шамолин, М.В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2011. — Т. 440, № 2. — С. 187–190.
18. Вейль, Г. Симметрия / Г. Вейль ; пер. с англ. Б.В. Бирюкова и Ю.А. Данилова ; под ред. Б.А. Розенфельда ; 3-е изд. — М. : URSS, 2007. — 192 с.

19. Дубровин, Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. — М. : Наука, 1979. — 760 с.
20. Клейн, Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн ; пер. с нем. Н.К. Брушлинского. — М. : Ленанд, 2017. — 351 с.
21. Козлов, В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем / В.В. Козлов // Прикл. математика и механика. — 2015. — Т. 79, № 3. — С. 307–316.
22. Трофимов, В.В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли / В.В. Трофимов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 1191–1199.
23. Шамолин, М.В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трёхмерной сфере / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, № 5 (413). — С. 185–186.
24. Шамолин, М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2013. — Т. 449, № 4. — С. 416–419.
25. Шамолин, М.В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере / М.В. Шамолин // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 6. — С. 743–759.
26. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке ; пер. с нем. С.В. Фомина. — 5-е изд., стер. — М. : Наука, 1976. — 576 с.
27. Шамолин, М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трёхмерного многообразия / М.В. Шамолин // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 84–90.
28. Шамолин, М.В. Инвариантные формы объёма систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией / М.В. Шамолин // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 507, № 1. — С. 86–92.
29. Трофимов, В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств / В.В. Трофимов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1984. — № 6. — С. 31–33.

INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

M. V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Russia
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Tensor invariants (first integrals and differential forms) of homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth three-dimensional manifolds (systems with three degrees of freedom) are presented in this paper. The connection between the presence of such invariants and the complete set of the first integrals, which are necessary for the integration of geodesic, potential, and dissipative systems, is shown. At the same time, the introduced force fields make the considered systems dissipative with dissipation of different signs and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamic system, nonconservative force field, integrability, tensor invariant.

REFERENCES

1. Kozlov, V.V., Tensor invariants and integration of differential equations, *Russ. Math. Surv.*, 2019, vol. 74, no. 1, pp. 111–140.
2. Kolmogorov, A.N., On dynamical systems with an integral invariant on the torus, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 93, no. 5, pp. 763–766.
3. Poincaré, H., *Calcul des probabilités*, Paris: Gauthier–Villars, 1912.
4. Bourbaki, N., *Eléments de mathématique. Premiere partie. Les Structures Fondamentales de L'Analyse. Livre VI. Integration*, Paris: Hermann & Cie, 1959.

5. Shabat, B.V., *Introduction to Complex Analysis*, Providence: Amer. Math. Soc., 1992.
6. Shamolin, M.V., On integrability in transcendental functions, *Russ. Math. Surveys*, 1998, vol. 53, no. 3, pp. 637–638.
7. Georgievskii, D.V. and Shamolin, M.V., First integrals of motion equations of a generalized gyroscope in $\mathbb{R}^n$, *Moscow Univ. Math. Bulletin*, 2003, vol. 58, no. 5, pp. 25–29.
8. Trofimov, V.V. and Shamolin, M.V., Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems, *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 180, no. 4, pp. 365–530.
9. Shamolin, M.V., Integrability according to Jacobi in the problem of motion of a four-dimensional solid in a resistant medium, *Doklady Physics*, 2000, vol. 45, no. 11, pp. 632–634.
10. Shamolin, M.V., New cases of full integrability in dynamics of a dynamically symmetric four-dimensional solid in a nonconservative field, *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, no. 3, pp. 155–159.
11. Shamolin, M.V., A completely integrable case in the dynamics of a four-dimensional rigid body in a nonconservative field, *Russ. Math. Surveys*, 2010, vol. 65, no. 1, pp. 183–185.
12. Shamolin, M.V., A new case of integrability in dynamics of a $4D$-Solid in a nonconservative field, *Doklady Physics*, 2011, vol. 56, no. 3, pp. 186–189.
13. Shamolin, M.V., A new case of integrability in the dynamics of a 4D-rigid body in a nonconservative field under the assumption of linear damping, *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 6, pp. 250–253.
14. Ivanova, T.A., Euler equations in models of theoretical physics, *Math. Notes*, 1992, vol. 52, pp. 784–790.
15. Samsonov, V.A. and Shamolin, M.V., Body motion in a resisting medium, *Moscow Univ. Mech. Bulletin*, 1989, vol. 44, no. 3, pp. 16–20.
16. Shamolin, M.V., An integrable case of dynamical equations on $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^4$, *Russ. Math. Surveys*, 2005, vol. 60, no. 6, pp. 1245–1246.
17. Shamolin, M.V., Complete list of first integrals in the problem on the motion of a $4D$ solid in a resisting medium under assumption of linear damping, *Doklady Physics*, 2011, vol. 56, no. 9, pp. 498–501.
18. Weyl, H., *Symmetry*, Princeton: Princeton University Press, 1952.
19. Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., and Fomenko A.T., *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya* (Modern Geometry. Methods and Applications), Moscow: Nauka, 1979.
20. Klein, F., *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Saarbrucken: VDM Verlag Dr. Müller, 2006.
21. Kozlov, V.V., Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems, *J. Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 79, no. 3, pp. 209–216.
22. Trofimov, V.V., Euler equations on finite-dimensional solvable lie groups, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1981, vol. 17, no. 2, pp. 405–412.
23. Shamolin, M.V., New case of integrability of dynamic equations on the tangent bundle of a 3-sphere, *Russ. Math. Surveys*, 2013, vol. 68, no. 5, pp. 963–965.
24. Shamolin, M.V., Complete list of first integrals of dynamic equations of motion of a $4D$ rigid body in a nonconservative field under the assumption of linear damping, *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 4, pp. 143–146.
25. Shamolin, M.V., Integrable nonconservative dynamical systems on the tangent bundle of the multidimensional sphere, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 6, pp. 722–738.
26. Kamke, E., *Gewohnliche Differentialgleichungen*, Leipzig: Akademie-Verlag, 1959.
27. Shamolin, M.V., New cases of homogeneous integrable systems with dissipation on tangent bundles of three-dimensional manifolds, *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 102, no. 3, pp. 518–523.
28. Shamolin, M.V., Invariant volume forms of variable dissipation systems with three degrees of freedom, *Doklady Mathematics*, 2022, vol. 106, no. 3, pp. 479–484.
29. Trofimov, V.V., Symplectic structures on groups of automorphisms of symmetric spaces, *Moscow Univ. Math. Bulletin*, 1984, vol. 39, no. 6, pp. 44–47.