ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 298–311

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.923+517.925.54

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА НА ПОЛУОСИ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

А. Э. Маматов

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Узбекистан

e-mail: aematatov@mail.ru

Поступила в редакцию 14.07.2023 г., после доработки 17.10.2023 г.; принята к публикации 13.11.2023 г.

Изучена прямая задача рассеяния на полуоси для системы дифференциальных уравнений Дирака в случае конечной плотности с граничным условием $y_1(0)=y_2(0)$. Исследован спектр, построены резольвента, а также спектральное разложение по собственным функциям оператора Дирака.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, непрерывный спектр, собственное значение, теорема разложения по собственным функциям.

DOI: 10.31857/S0374064124030029, EDN: PPIXSE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гильбертовом пространстве вектор-функций $L_2^2(0,+\infty)$ рассмотрим самосопряжённый оператор Дирака D, порождённый дифференциальным выражением вида

$$dy=i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{dy}{dx}+i\begin{pmatrix}0&-\overline{q(x)}\\q(x)&0\end{pmatrix}y=\lambda y,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad 0\leqslant x<\infty,\tag{1}$$

с граничным условием

$$y_1(0)=y_2(0),\tag{2}$$

где функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{+\infty}(1+x)|q(x)-m|dx<\infty,\tag{3}$$

а $m>0$ — масса.

В качестве области определения этого оператора мы принимаем множество D_D всех вектор-функций f, абсолютно непрерывных в каждом промежутке $[0,a]$, $a>0$, таких,что $f,d(f)\in L_2^2(0,+\infty)$ и $f_1(0)=f_2(0)$. При $f\in D_D$ будем полагать, что $Df=d(f)$.

Обратная задача рассеяния для системы уравнений (1) на полупрямой с граничным условием $y_1(0)=0$ рассматривалась в статье [1]. Обобщение на случай $2n$-компонентных векторов было получено в работе [2]. Для системы уравнений (1) с массой $m=0$ обратная задача решена в работе [3]. Обратная задача рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля на полупрямой изучена в [4]. Следует отметить, что задачи для несамосопряжённого оператора Дирака на всей оси, а также на полуоси, исследованы в работах [5–9].

В настоящей статье решается прямая задача рассеяния для системы уравнений (1) с граничным условием (2).

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА

Известно [10, стр. 57], что если выполняется условие (3), то система уравнений (1) при действительных λ и $|\lambda|>m$ имеет специальные решения

$$f^{+}(x,\lambda)=\begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}+\int\limits_{x}^{+\infty}\Gamma(x,y)\begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1 \end{pmatrix} e^{iky}dy,$$

$$f^{-}(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda-k)/m \end{pmatrix} e^{-ikx}+\int\limits_{x}^{+\infty}\Gamma(x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda-k)/m \end{pmatrix} e^{-iky}dy,$$

где $k=\sqrt{\lambda^2-m^2}$, $\operatorname{sign}k(\lambda)=\operatorname{sign}\lambda$, ядро $\Gamma(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,y)+\sigma_3\frac{\partial}{\partial y}\Gamma(x,y)\sigma_3-U_0(x)\Gamma(x,y)+\sigma_3\Gamma(x,y)\sigma_3 U=0$$

и условиям $\Gamma(x,x)-\sigma_3\Gamma(x,x)\sigma_3=U-U_0(x)$, $\lim_{y\to\infty}\Gamma(x,y)=0$, где

$$\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad U_0=\begin{pmatrix} 0 & \overline{q(x)} \\ q(x) & 0 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{pmatrix},$$

причём для элементов матрицы $\Gamma(x,y)$ справедливы оценки

$$|\Gamma_{ij}|\leqslant C_1/\big((1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}\big),\quad i\neq j;\quad |\Gamma_{ii}|\leqslant C_1/(1+t)^{1+\varepsilon},$$

C_1 и ε — положительные константы.

При $\lambda\in(-\infty,-m)\cup(m,+\infty)$ имеет место свойство инволюции $\sigma_1 f^{-}(x,\lambda)=\overline{f^{+}(x,\lambda)}$, где

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для ядра $\Gamma(x,y)$ справедливо свойство инволюции $\overline{\Gamma}(x,y)=\sigma_1\Gamma(x,y)\sigma_1$.

Непрерывный спектр задачи (1), (2) состоит из вещественных λ, удовлетворяющих условию $\lambda^2\geqslant m^2$. Множество таких λ обозначим через R_m, т.е.

$$R_m=\{\lambda:\lambda\in R^1,\lambda^2\geqslant m^2\}=(-\infty,-m)\cup(m,+\infty).$$

Аналитические свойства решений $f^{\pm}(x,\lambda)$ естественно формулировать на римановой поверхности Γ функции $k(\lambda)$. Эта поверхность состоит из двух частей Γ_+ и Γ_- комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами на вещественной оси от $-\infty$ до $-m$ и от m до $+\infty$ (рис. 1) с отождествлёнными надлежащим образом берегами разрезов.

Точку на поверхности Γ, отличную от точек ветвления $\pm m$, будем задавать парой (λ,ε), где λ — комплексное число, а $\varepsilon=\pm1$, причём $\varepsilon=1$ на листе Γ_+ и $\varepsilon=-1$ на листе Γ_-. Функция $k(\lambda)$ вводится на Γ формулой $k(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-m^2}$, где $\pm\operatorname{Im}k(\lambda)\geqslant0$ на листах $\Gamma_\pm$ соответственно. Альтернативным образом лист Γ_+ характеризуется условием $k(\lambda+i0)>0$ при $\operatorname{Im}\lambda=0$ и $\lambda>m$; а $k(\lambda+i0)<0$ при $\operatorname{Im}\lambda=0$, $\lambda<-m$. Таким образом, равенство

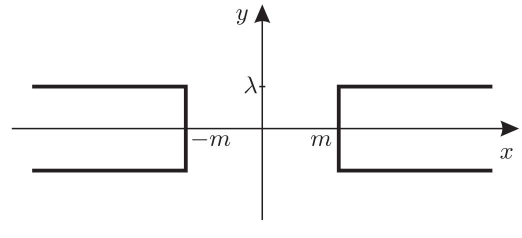

Рис. 1. Риманова поверхность.

$\operatorname{sign} k(\lambda) = \operatorname{sign}\lambda$ выполняется для предельных значений k на верхних берегах разрезов на листе Γ_+ и на нижних берегах разрезов на листе Γ_-.

В дальнейшем будем опускать в тексте зависимость функции $k(\lambda)$ от λ, а в формулах, где участвуют k и λ, всегда подразумевается, что k является функцией от λ.

При значениях λ вне разрезов вектор-функции

$$f_0^+(x,\lambda) = \begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad f_0^-(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda-k)/m \end{pmatrix} e^{-ikx}$$

не являются ограниченными функциями от x. При этом $f_0^+(x,\lambda)$ на Γ_+ и $f_0^-(x,\lambda)$ на Γ_- экспоненциально убывают при $x\to+\infty$.

Функция $f^+(x,\lambda)$ $(f^-(x,\lambda))$ допускает аналитическое продолжение по λ в верхнюю (нижнюю) полуплоскость, причём при $\operatorname{Im}\lambda>0$ $f^+(x,\lambda)\in L_2^2(0,+\infty)$ (при $\operatorname{Im}\lambda<0$ $f^-(x,\lambda)\in$ $\in L_2^2(0,+\infty)$).

При фиксированных x и $|\lambda|\to\infty$ имеют место асимптотики

$$f^+(x,\lambda)e^{-ikx} = \begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1 \end{pmatrix} + O(1),$$

если λ на листе Γ_+, и

$$f^-(x,\lambda)e^{ikx} = \begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda-k)/m \end{pmatrix} + O(1),$$

если λ на листе Γ_-.

На поверхности Γ введём инволюцию $\lambda\to\overline{\lambda}$, $k\to-\overline{k}$, которую можно задать следующим образом: $J(\lambda,\varepsilon)=(\overline{\lambda},\varepsilon)$, так что она оставляет на месте листы $\Gamma_\pm$. При всех λ из Γ_+ и Γ_-, соответственно, имеем

$$\overline{f^+(x,J(\lambda))} = -\frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^+(x,\lambda) \quad \text{и} \quad \overline{f^-(x,J(\lambda))} = \frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^-(x,\lambda).$$

В частности, отсюда получим связь значений функций $f^\pm(x,\lambda)$ на верхних и нижних берегах разрезов соответствующих листов аналитичности:

$$\overline{f^+(x,\lambda-i0)} = -\frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^+(x,\lambda+i0), \quad \overline{f^-(x,\lambda-i0)} = \frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^-(x,\lambda+i0),$$

где λ вещественно, $|\lambda|\geqslant m$.

Во всей полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ справедлива оценка

$$|f^+(x,\lambda)| \leqslant \exp\left\{-\operatorname{Im}\lambda x + \int_x^{+\infty} |q(y)-m|\,dy\right\}, \tag{4}$$

где $|f^+(x,\lambda)| = |f_1^+(x,\lambda)| + |f_2^+(x,\lambda)|$ — векторная норма.

Вронскианом двух решений $f(x,\lambda)$ и $g(x,\lambda)$ уравнения (1) называется выражение

$$W(f,g) = f_1(x,\lambda)g_2(x,\lambda) - f_2(x,\lambda)g_1(x,\lambda). \tag{5}$$

Легко доказать, что $W(f,g)$ не зависит от x, т.е. $dW(f,g)/dx=0$, а решения $f(x,\lambda)$ и $g(x,\lambda)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(f,g)\neq 0$.

При действительных λ, $|\lambda|>m$, решения $f^+(x,\lambda)$ и $f^-(x,\lambda)$ линейно независимы, что видно из следующих равенств:

$$W(f^+,f^-)=f_1^+(x,\lambda)f_2^-(x,\lambda)-f_2^+(x,\lambda)f_1^-(x,\lambda)=\lim_{x\to+\infty}W(f^+,f^-)=-\frac{2k}{k+\lambda}.$$

В дальнейшем важную роль будет играть решение $\Phi(x,\lambda)$ системы уравнений (1) с начальным условием

$$\Phi_1(0,\lambda)=\Phi_2(0,\lambda)=1.$$

Известно [3], что это решение удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\Phi_1(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}-\frac{1}{i}\int\limits_0^x e^{\lambda(y-x)}\overline{q(y)}\Phi_2(y,\lambda)dy,$$

$$\Phi_2(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\frac{1}{i}\int\limits_0^x e^{i\lambda(x-y)}q(y)\Phi_1(y,\lambda)dy.$$

Очевидно, что для любого $x\geqslant 0$ векторная функция $\Phi(x,\lambda)$ является целой аналитической функцией параметра λ. Рассмотрим теперь связь решения $\Phi(x,\lambda)$ с решениями $f^\pm(x,\lambda)$.

Лемма 1. *При всех вещественных значениях λ, $|\lambda|>m$, справедливо тождество*

$$-\frac{2k}{k+\lambda}\,\frac{\Phi(x,\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}=f^-(x,\lambda)+S(\lambda)f^+(x,\lambda), \tag{6}$$

где

$$S(\lambda)=\frac{f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}=\overline{S^{-1}(\lambda)}.$$

Доказательство. Так как функции $f^+(x,\lambda)$ и $f^-(x,\lambda)$ при вещественных λ, $|\lambda|>m$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), то

$$\Phi(x,\lambda)=A(\lambda)f^+(x,\lambda)+B(\lambda)f^-(x,\lambda).$$

Из формулы (5) вытекает, что

$$W(\Phi,f^-)=-\frac{2k}{k+\lambda}A(\lambda),\quad W(\Phi,f^+)=\frac{2k}{k+\lambda}B(\lambda).$$

Здесь

$$W(\Phi,f^\pm)=\lim_{x\to 0}\big[\Phi_1(x,\lambda)f_2^\pm(x,\lambda)-\Phi_2(x,\lambda)f_1^\pm(x,\lambda)\big]=f_2^\pm(0,\lambda)-f_1^\pm(0,\lambda)=f_2^\pm(\lambda)-f_1^\pm(\lambda),$$

т.е.

$$A(\lambda)=-\frac{k+\lambda}{2k}\big[f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)\big],\quad B(\lambda)=-\frac{k+\lambda}{2k}\big[f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)\big].$$

Поэтому

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{k+\lambda}{2k}\big[f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)\big]f^+(x,\lambda)-\frac{k+\lambda}{2k}\big[f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)\big]f^-(x,\lambda).$$

Отсюда имеем

$$-\frac{2k}{k+\lambda}\frac{\Phi(x,\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}=S(\lambda)f^+(x,\lambda)+f^-(x,\lambda),$$

где

$$S(\lambda)=\frac{f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}=\frac{\overline{f_1^+(\lambda)}-\overline{f_2^+(\lambda)}}{\overline{f_2^-(\lambda)}-\overline{f_1^-(\lambda)}}=\overline{\left(\frac{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}{f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)}\right)}=\overline{S^{-1}(\lambda)}.$$

Лемма доказана.

Функция

$$S(\lambda)=\frac{f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)} \tag{7}$$

называется *функцией рассеяния задачи* (1), (2).

Рассмотрим некоторые простейшие свойства функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$.

Лемма 2. *Функция* $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)\neq 0$ *для всех* λ *при* $\operatorname{Im}\lambda>0$.

Доказательство. Докажем это утверждение от противного. Допустим, что при некотором λ_0, $\operatorname{Im}\lambda_0>0$, выполняется равенство $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$. Следовательно, функция $f^+(x,\lambda_0)\in L_2^2(0,+\infty)$ удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2). Отсюда вытекает, что самосопряжённая задача (1), (2) имеет комплексное собственное значение λ_0, но это невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 3. *Для всех* λ *из интервалов* $(-\infty,-m)\cup(m,+\infty)$ *функция* $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ *отлична от нуля.*

Доказательство. При вещественном λ, $|\lambda|>m$, вронскиан двух решений уравнения (1) не зависит от x и $W(f^+,f^-)=-2k/(k+\lambda)$. Пусть утверждение леммы неверно, т.е. существует точка $\lambda_0\in(-\infty,-m)\cup(m,+\infty)$ такая, что $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$.

Тогда

$$-\frac{2k}{k+\lambda_0}=W(f^+,f^-)=\lim_{x\to 0}\big[f_1^+(x,\lambda_0)f_2^-(x,\lambda_0)-f_2^+(x,\lambda_0)f_1^-(x,\lambda_0)\big]=$$

$$=\begin{vmatrix} f_1^+(\lambda_0) & f_1^-(\lambda_0)\\ f_2^+(\lambda_0) & f_2^-(\lambda_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0) & f_1^-(\lambda_0)-f_2^-(\lambda_0)\\ f_1^+(\lambda_0) & f_1^-(\lambda_0)\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Так как при $\lambda\in(-\infty,-m)\cup(m,+\infty)$ $\overline{f_1^+(\lambda)}=f_2^-(\lambda)$ и $\overline{f_2^+(\lambda)}=f_1^-(\lambda)$, то $f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda)=\overline{f_2^+(\lambda)}-\overline{f_1^+(\lambda)}=\overline{f_2^+(\lambda)-f_1^+(\lambda)}$. Отсюда и из $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$ следует, что $f_1^-(\lambda_0)-f_2^-(\lambda_0)=0$, поэтому правая часть равенства (8) равна нулю, а левая отлична от нуля. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 4. *Оператор (1), (2) имеет только конечное число простых дискретных собственных значений из интервала* $(-m,m)$.

Доказательство. Из формулы (7) видно, что для того чтобы некоторое число λ_0 из интервала $(-m,m)$ было собственным значением задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$. Действительно, пусть при $\lambda_0\in(-m,m)$ $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$, тогда $f_1^+(\lambda_0)=f_2^+(\lambda_0)$, и поэтому функция $f^+(x,\lambda_0)\in L_2^2(0,+\infty)$ является решением системы уравнений (1) и удовлетворяет граничному условию (2), т.е. $f^+(x,\lambda_0)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_0\in(-m,m)$.

Теперь предположим, что $\lambda_0\in(-m,m)$ — любое собственное значение задачи (1), (2), тогда существует решение системы (1) $\varphi(x,\lambda_0)\neq 0$, принадлежащее пространству $L_2^2(0,+\infty)$, и

$$\varphi_1(0,\lambda_0)=\varphi_2(0,\lambda_0).$$

Числа $\varphi_1(0,\lambda_0)$, $\varphi_2(0,\lambda_0)$ отличны от нуля, иначе в противном случае, в силу единственности решения задачи Коши для системы (1), будет выполнено тождество $\varphi(x,\lambda_0)\equiv 0$.

Так как определитель Вронского решений $\varphi(x,\lambda_0)$ и $f^+(x,\lambda_0)$, принадлежащих $L_2^2(0,+\infty)$, не зависит от x, то существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$\varphi_1(0,\lambda_0)\Big[f_2^+(0,\lambda_0)-f_1^+(0,\lambda_0)\Big]=W(\varphi,f^+)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big[\varphi_1(x_n,\lambda_0)f_2^+(x_n,\lambda_0)-\varphi_2(x_n,\lambda_0)f_1^+(x_n,\lambda_0)\Big]=0.$$

Отсюда следует, что $f_2^+(0,\lambda_0)-f_1^+(0,\lambda_0)=0$.

Покажем, что корни уравнения $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)=0$ простые.

Условимся точками обозначать дифференцирование по λ, а штрихами — по x:

$$\dot f^+(x,\lambda)=\frac{d}{d\lambda}f^+(x,\lambda),\quad f^{+'}(x,\lambda)=\frac{d}{dx}f^+(x,\lambda).$$

Продифференцировав систему уравнений

$$f_1^{+'}(x,\lambda)-\overline{q(x)}f_2^+(x,\lambda)=-i\lambda f_1^+(x,\lambda),\quad f_2^{+'}(x,\lambda)-q(x)f_1^+(x,\lambda)=i\lambda f_2^+(x,\lambda) \tag{9}$$

по λ, видим, что функция $\dot f^+(x,\lambda)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\dot f_1^{+'}(x,\lambda)-\overline{q(x)}\dot f_2^+(x,\lambda)=-i\lambda\dot f_1^+(x,\lambda)-if_1^+(x,\lambda),$$

$$\dot f_2^{+'}(x,\lambda)-q(x)\dot f_1^+(x,\lambda)=i\lambda\dot f_2^+(x,\lambda)+if_2^+(x,\lambda). \tag{10}$$

Первые уравнения систем (9) и (10) умножим соответственно на $\dot f_2^+(x,\lambda)$ и $f_2^+(x,\lambda)$ и, вычислив разность, получим

$$f_1^{+'}(x,\lambda)\dot f_2^+(x,\lambda)-\dot f_1^{+'}(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda)=$$

$$=-i\lambda\big[f_1^+(x,\lambda)\dot f_2^+(x,\lambda)-\dot f_1^+(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda)\big]+if_1^+(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda). \tag{11}$$

Вторые уравнения систем (9) и (10) умножим соответственно на $\dot f_1^+(x,\lambda)$ и $f_1^+(x,\lambda)$ и, вычислив разность, найдём

$$f_2^{+'}(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^{+'}(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)=$$

$$=i\lambda\big[f_2^+(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^+(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)\big]-if_1^+(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda). \tag{12}$$

Вычитая (11) из (12), получаем

$$f_2^{+'}(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^{+'}(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)-f_1^{+'}(x,\lambda)\dot f_2^+(x,\lambda)+\dot f_1^{+'}(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda)=$$

$$=-2if_1^+(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda).$$

Это выражение можно записать как

$$\frac{d}{dx}\big[f_2^+(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^+(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)\big]=-if^{+T}(x,\lambda)\sigma_1 f^+(x,\lambda),$$

а с помощью инволюции

$$\overline{f^+(x,\lambda)}=-\frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^+(x,\lambda)$$

оно преобразуется к виду

$$\left(f_2^+(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^+(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)\right)\Big|_a^b=-\frac{m}{\lambda+k}\int\limits_a^b f^{+^T}(x,\lambda)\overline{f^+(x,\lambda)}\,dx.$$

Если $\lambda_0\in(-m,m)$ — нуль функции $f_1^+(\lambda)-f^+(\lambda)$, то $\gamma_0^{-1}=f_1^+(\lambda_0)=f_2^+(\lambda_0)$, и согласно оценке (4) справедливы равенства

$$\lim_{x\to 0}\left[f_2^+(x,\lambda_0)\dot f_1^+(x,\lambda_0)-\dot f_2^+(x,\lambda_0)f_1^+(x,\lambda_0)\right]=\gamma_0^{-1}(\dot f_1^+(\lambda_0)-\dot f_2^+(\lambda_0)),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f_2^+(x,\lambda_0)\dot f_1^+(x,\lambda_0)-\dot f_2^+(x,\lambda_0)f_1^+(x,\lambda_0)\right]=0,$$

из которых следует, что

$$\dot f_1^+(\lambda_0)-\dot f_2^+(\lambda_0)=\frac{m\gamma_0}{\lambda_0+k}\int\limits_0^{+\infty}f^{+T}(x,\lambda_0)\overline{f^+(x,\lambda_0)}\,dx=\frac{m\gamma_0}{\lambda_0+k}\|f^+(x,\lambda_0)\|^2.$$

Так как $\|f^+(x,\lambda_0)\|>0$, то $\dot f_1^+(\lambda_0)-\dot f_2^+(\lambda_0)\neq 0$ и простота нулей функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ доказана.

Теперь докажем, что множество нулей функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ конечно. Для этого оценим снизу расстояние между её соседними нулями.

Пусть λ_1 и λ_2 — какие-нибудь нули функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$. Если функция $f^+(x,\lambda_1)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{gathered}{f_1^+}'(x,\lambda_1)-\overline{q(x)}f_2^+(x,\lambda_1)=-i\lambda_1 f_1^+(x,\lambda_1),\\ f_2^+(x,\lambda_1)-q(x)f_1^+(x,\lambda_1)=i\lambda_1 f_2^+(x,\lambda_1),\end{gathered}\tag{13}$$

то функция $\overline{f^+(x,\lambda_2)}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{gathered}\overline{(f_1^+(x,\lambda_2))'}-q(x)\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}=i\lambda_2\overline{f_1^+(x,\lambda_2)},\\ \overline{(f_2^+(x,\lambda_2))'}-\overline{q(x)}\,\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}=-i\lambda_2\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}.\end{gathered}\tag{14}$$

Первое уравнение системы (13) и второе уравнение системы (14) умножим соответственно на $\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}$ и $f_2^+(x,\lambda_1)$ и, вычислив разность, получим

$${f_1^+}'(x,\lambda_1)\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}-\overline{(f_2^+(x,\lambda_2))'}f_2^+(x,\lambda_1)=-i\lambda_1 f_1^+(x,\lambda_1)\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}+i\lambda_2\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}f_2^+(x,\lambda_1).\tag{15}$$

Второе уравнение системы (13) и первое уравнение системы (14) умножим соответственно на $\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}$ и $f_1^+(x,\lambda_1)$ и, вычислив разность, получим

$${f_2^+}'(x,\lambda_1)\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}-\overline{(f_1^+(x,\lambda_2))'}f_1^+(x,\lambda_1)=i\lambda_1 f_2^+(x,\lambda_1)\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}-i\lambda_2\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}f_1^+(x,\lambda_1).\tag{16}$$

Вычитание (16) из (15) даёт

$$\frac{d}{dx}\left(f_1^+(x,\lambda_1)\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}-f_2^+(x,\lambda_1)\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}\right)=i(\lambda_2-\lambda_1)f^{+T}(x,\lambda_1)\overline{f^+(x,\lambda_2)},$$

$$\frac{d}{dx}W\left(f^+(x,\lambda_1),\sigma_1\overline{f^+(x,\lambda_2)}\right)=i(\lambda_2-\lambda_1)f^{+T}(x,\lambda_1)\overline{f^+(x,\lambda_2)},$$

$$W\left(f^+(x,\lambda_1),\sigma_1\overline{f^+(x,\lambda_2)}\right)\Big|_a^b=i(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_a^b f^{+T}(x,\lambda_1)\overline{f^+(x,\lambda_2)}\,dx.$$

При $x=0$ имеем $f_1^+(\lambda_1)-f_2^+(\lambda_1)=0$ и $f_1^+(\lambda_2)-f_2^+(\lambda_2)=0$, следовательно, $f_1^+(\lambda_1)=f_2^+(\lambda_1)$ и $\overline{f_1^+(\lambda_2)}=\overline{f_2^+(\lambda_2)}$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} W\Big(f^+(x,\lambda_1),\sigma_1\overline{f^+(x,\lambda_2)}\Big)=0.$$

Из оценки (4) следует, что

$$\lim_{x\to +\infty} W\Big(f^+(x,\lambda_1),\sigma_1\overline{f^+(x,\lambda_2)}\Big)=0.$$

Таким образом,

$$i(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_0^{+\infty} f^{+T}(x,\lambda_1)\overline{f^+(x,\lambda_2)}\,dx=0. \tag{17}$$

Обозначим через δ точную нижную границу расстояния между двумя соседними нулями функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ и покажем, что $\delta>0$. Предполагая противное, мы смогли бы выделить такие последовательности нулей $\{\tilde\lambda_k\}$, $\{\lambda_k\}$ функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$, что $\lim_{k\to\infty}(\tilde\lambda_k-\lambda_k)=0$, $\tilde\lambda_k>\lambda_k\geqslant 0$ и $\max_k\tilde\lambda_k<M$. Из оценки (4) следует, что при достаточно большом A равномерно относительно $x\in[A,\infty)$ и $\lambda\in[0,\infty)$ выполняется неравенство $|f^{+T}(x,\lambda)|>e^{-\lambda x}/2$, так что

$$\int\limits_A^{\infty} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\lambda_k)}\,dx>\frac{e^{-A(\tilde\lambda_k-\lambda_k)}}{4(\tilde\lambda_k-\lambda_k)}>\frac{e^{-2AM}}{8M}. \tag{18}$$

С другой стороны, из равенства (17) получаем

$$0=\int\limits_0^{\infty} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\lambda_k)}\,dx=\int\limits_0^{A} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\Big[\overline{f^+(x,\lambda_k)}-\overline{f^+(x,\tilde\lambda_k)}\Big]\,dx+$$

$$+\int\limits_0^{A} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\tilde\lambda_k)}\,dx+\int\limits_A^{\infty} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\lambda_k)}\,dx$$

и, переходя к пределу при $k\to\infty$, находим

$$\varliminf_{k\to\infty}\int\limits_A^{\infty} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\lambda_k)}\,dx\leqslant 0, \tag{19}$$

так как равномерно относительно $x\in[0,A]$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}[f^+(x,\tilde\lambda_k)-f^+(x,\lambda_k)]=0.$$

Очевидно, что неравенства (18) и (19) приводят к противоречию, поэтому сделанное предположение неверно, т.е. $\delta>0$, а функция $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ имеет конечное число нулей. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если выполняется условие (3), то все числа λ, такие что $\lambda\notin(-\infty,-m)\cup\cup(m,+\infty)$, $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)\neq 0$, принадлежат резольвентному множеству оператора D. Резольвента $R_\lambda=(D-\lambda I)^{-1}$ является интегральным оператором вида*

$$R_\lambda g(x)=\int\limits_0^{\infty} R(x,y;\lambda)g(y)\,dy$$

с ядром

$$R(x,y;\lambda)=\begin{cases}R^+(x,y;\lambda), & \operatorname{Im}\lambda>0,\\ R^-(x,y;\lambda), & \operatorname{Im}\lambda<0,\end{cases}$$

где

$$R^{\pm}(x,y;\lambda)=\frac{-i}{f_1^{\pm}(\lambda)-f_2^{\pm}(\lambda)}\begin{cases}f^{\pm}(x,\lambda)(\sigma_1\Phi(y,\lambda))^T, & y<x,\\ \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^{\pm}(y,\lambda))^T, & y>x.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im}\lambda>0$ и резольвента R_λ существует, и пусть $g(x)$ входит в область определения R_λ. Положим $R_\lambda g=y$, тогда

$$Dy-\lambda y=g(x). \tag{20}$$

Равенство (20) означает, что y является решением уравнения

$$dy-\lambda y=g(x), \tag{21}$$

принадлежащим $L_2^2(0,+\infty)$ и удовлетворяющим условию (2). Так как $\Phi(x,\lambda)$ и $f^+(x,\lambda)$ — решения соответствующего однородного уравнения $dy-\lambda y=0$, то его общее решение будет следующим:

$$y=c_1\Phi(x,\lambda)+c_2f^+(x,\lambda),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Будем искать общее решение уравнения (21) в виде

$$y=c_1(x)\Phi(x,\lambda)+c_2(x)f^+(x,\lambda), \tag{22}$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ — неизвестные функции.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, найдём

$$i\sigma_3c_1'(x)\Phi(x,\lambda)+i\sigma_3c_2'(x)f^+(x,\lambda)=g(x). \tag{23}$$

Так как

$$\sigma_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\sigma_3,$$

то, умножив обе части равенства (23) на $-i\sigma_3$, получим

$$c_1'(x)\Phi(x,\lambda)+c_2'(x)f^+(x,\lambda)=-i\sigma_3g(x).$$

Найдём коэффициенты $c_1(x)$ и $c_2(x)$. Используя формулу для вронскиана $W(y,z)$, можем записать

$$W(-i\sigma_3g,f^+)=W(c_1'(x)\Phi(x,\lambda)+c_2'(x)f^+(x,\lambda),f^+(x,\lambda))=c_1'(x)W(\Phi,f^+),$$

$$c_1'(x)=\frac{W(-i\sigma_3g,f^+)}{W(\Phi,f^+)}=\frac{-i}{f_2^+(\lambda)-f_1^+(\lambda)}W(\sigma_3g,f^+). \tag{24}$$

Проинтегрировав обе части равенства (24) в пределах от x до $+\infty$ и воспользовавшись условием при $x\to+\infty$, $c_1\to0$, находим

$$c_1(x)=\frac{i}{f_2^+(\lambda)-f_1^+(\lambda)}\int\limits_x^{+\infty}W(\sigma_3g,f^+)(y)\,dy, \tag{25}$$

а при $x\to0$, $c_2\to0$ получаем

$$c_2(x)=\frac{-i}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}\int\limits_0^{x}W(\sigma_3g,\Phi)(y)\,dy. \tag{26}$$

Подставив соответственно в (25) и (26) выражения для вронскиана

$$W(\sigma_3 g, f^+) = W\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ -g_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1^+ \\ f_2^+ \end{pmatrix}\right) = g_1 f_2^+ + g_2 f_1^+ = (\sigma_1 f^+(x,\lambda))^T g(x),$$

$$W(\sigma_3 g, \Phi) = (\sigma_1 \Phi(x,\lambda))^T g(x),$$

получим

$$c_1(x) = \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \int\limits_x^{+\infty} (\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T g(y)\, dy,$$
$$c_2(x) = \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \int\limits_0^{x} (\sigma_1 \Phi(y,\lambda))^T g(y)\, dy. \tag{27}$$

Подстановка в (22) выражений для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ из (27) даёт

$$y(x) = \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \int\limits_0^{x} f^+(x,\lambda)(\sigma_1 \Phi(y,\lambda))^T g(y)\, dy +$$
$$+ \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \int\limits_x^{+\infty} \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T g(y)\, dy. \tag{28}$$

Положим

$$R^+(x,y;\lambda) = \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \begin{cases} f^+(x,\lambda)(\sigma_1 \Phi(y,\lambda))^T, & y < x, \\ \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T, & y > x, \end{cases} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

тогда формула (28) принимает вид

$$R_\lambda g(x) = y(x) = \int\limits_0^{+\infty} R^+(x,y;\lambda) g(y)\, dy.$$

Для $\operatorname{Im}\lambda < 0$ аналогично получим

$$R_\lambda g(x) = y(x) = \int\limits_0^{+\infty} R^-(x,y;\lambda) g(y)\, dy,$$

где

$$R^-(x,y;\lambda) = \frac{-i}{f_1^-(\lambda) - f_2^-(\lambda)} \begin{cases} f^-(x,\lambda)(\sigma_1 \Phi(y,\lambda))^T, & y < x, \\ \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^-(y,\lambda))^T, & y > x, \end{cases} \quad \operatorname{Im}\lambda < 0,$$

т.е. резольвента R_λ есть интегральный оператор с ядром

$$R(x,y;\lambda) = \begin{cases} R^+(x,y;\lambda), & \operatorname{Im}\lambda > 0, \\ R^-(x,y;\lambda), & \operatorname{Im}\lambda < 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

3. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Теорема 2. *Если коэффициент $q(x)$ дифференциального оператора D удовлетворяет условию (3), то каждая вектор-функция $g(x)\in L_2^2(0,+\infty)$ имеет следующее разложение:*

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\frac{-k}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(x,\lambda)\Phi^T(\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{-i}{(\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j))\gamma_j}\Phi(x,\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j),$$

где

$$\Phi^T(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}(\sigma_1\Phi(x,\lambda))^T g(x)\,dx.$$

Доказательство. Сначала докажем теорему разложения для гладких финитных вещественных вектор-функций $g(x)$, т.е. на плотном в $L_2^2(0,+\infty)$ множестве. Интегрируя, как обычно, $R_\lambda g$ по контуру (рис. 2), получаем

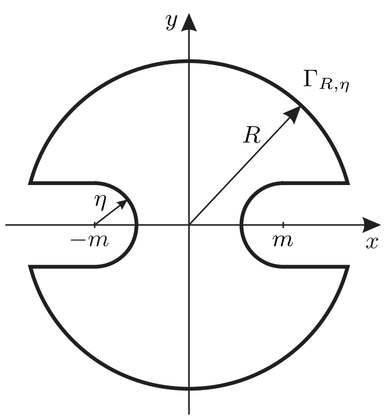

Рис. 2. Контур интегрирования.

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{R,\eta}\operatorname{Im}R_\lambda g\,d\lambda+\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}R_\lambda g. \tag{29}$$

Преобразуем формулу (29). Введём обозначение

$$\Phi^T(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}(\sigma_1\Phi(x,\lambda))^T g(x)\,dx.$$

Тогда

$$2i\operatorname{Im}R_\lambda g=\int\limits_0^{+\infty}[R^+(x,y;\lambda+i0)-R^-(x,y;\lambda-i0)]g(y)\,dy=$$

$$=-i\int\limits_0^{x}\frac{(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))f^+(x,\lambda)-(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))f^-(x,\lambda)}{(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}(\sigma_1\Phi(y,\lambda))^T g(y)\,dy-$$

$$-i\int\limits_x^{+\infty}\Phi(x,\lambda)\frac{(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T-(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T}{(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}g(y)\,dy=$$

$$=\frac{-2ik}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(x,\lambda)\int\limits_0^{+\infty}(\sigma_1\Phi(y,\lambda))^T g(y)\,dy=$$

$$=\frac{-2ik}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(x,\lambda)\Phi^T(\lambda). \tag{30}$$

Для собственных значений $\lambda_j\in(-m,m)$, $j=\overline{1,n}$, выполняется равенство $f_1^+(\lambda_j)-f_2^+(\lambda_j)=0$.

Функции $\Phi(x,\lambda_j)$ и $f^+(x,\lambda j)$ линейно зависимы, т.е. $\Phi(x,\lambda_j)=\gamma_j f^+(x,\lambda_j)$. Применяя известные формулы для нахождения вычетов, определяем вычеты вектор-функции $R_\lambda g$ в точках λ_j $(j=\overline{1,n})$:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j} R_\lambda g=\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\int\limits_0^{+\infty} R^+(x,y;\lambda)g(y)\,dy=$$

$$=\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\biggl(\frac{-i}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}\int\limits_0^x f^+(x,\lambda)(\sigma_1\Phi(y,\lambda))^T g(y)\,dy+$$

$$+\frac{-i}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}\int\limits_x^{+\infty}\Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T g(y)\,dy\biggr)=$$

$$=\frac{-i}{\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j)}\int\limits_0^x f^+(x,\lambda_j)(\sigma_1\Phi(y,\lambda_j))^T g(y)\,dy+$$

$$+\frac{-i}{\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j)}\int\limits_x^{+\infty}\Phi(x,\lambda_j)(\sigma_1 f^+(y,\lambda_j))^T g(y)\,dy=$$

$$=\frac{-i}{(\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j))\gamma_j}\Phi(x,\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j). \tag{31}$$

Подставив (30) и (31) в (29), получим выражение

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\frac{-k}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(x,\lambda)\Phi^T(\lambda)\,d\lambda+$$
$$+\sum_{j=1}^n\frac{-i}{(\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j))\gamma_j}\Phi(x,\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j). \tag{32}$$

Интеграл в (32) сходится в пространстве $L_2^2(0,+\infty)$. Обобщение на случай комплексных g получается линейной комбинацией разложения (32) для $\operatorname{Re} g$ и $\operatorname{Im} g$.

Умножим теперь (32) на $\overline{g}^T$ и проинтегрируем полученное соотношение по переменной x. В результате имеем равенство Парсеваля для оператора D в виде

$$\|g\|^2=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\frac{-k}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(\lambda)\Phi^T(\lambda)\,d\lambda+$$
$$+\sum_{j=1}^n\frac{-i}{(\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j))\gamma_j}\Phi(\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j),$$

где

$$\Phi(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}\overline{g}^T(x)\Phi(x,\lambda)dx.$$

Равенство Парсеваля по непрерывности распространяется на всё пространство. Используя этот факт, замкнём (32) на всём пространстве $L_2^2(0,+\infty)$. Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00732).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гасымов, М.Г. Определение системы Дирака по фазе рассеяния / М.Г. Гасымов, Б.М. Левитан // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 167, № 6. — С. 1219–1222.
2. Гасымов, М.Г. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнения Дирака порядка $2n$ / М.Г. Гасымов // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1968. — Т. 19. — С. 41–190.
3. Фам, Л.В. Обратная задача рассеяния для системы уравнений Дирака на полуоси / Л.В. Фам // Линейные краевые задачи математической физики. Киев : Институт математики АН УССР, 1973. — С. 174–207.
4. Марченко, В.А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн / В.А. Марченко // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 104, № 5. — С. 695–698.
5. Соловьев, А.Н. Разложение по собственным функциям оператора, порождённого системой уравнений 1-го порядка / А.Н. Соловьев // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 1981. — № 5. — С. 31–37.
6. Маматов, А.Э. Разложение по собственным функциям для несамосопряжённого оператора Дирака на полуоси / А.Э. Маматов, А.Б. Хасанов // Докл. АН РУз. — 2002. — № 4. — С. 10–13.
7. Нижник, Л.П. Обратная задача рассеяния на полуоси с несамосопряжённой потенциальной матрицей / Л.П. Нижник, Л.В. Фам // Укр. мат. журн. — 1974. — № 4. — С. 469–486.
8. Хасанов, А.Б. Обратная задача теории рассеяния для системы дифференциальных уравнений первого порядка / А.Б. Хасанов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 277, № 3. — С. 559–562.
9. Хасанов, А.Б. Обратная задача теории рассеяния на полуоси для системы разностных уравнений / А.Б. Хасанов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 278, № 6. — С. 1316–1319.
10. Тахтаджян, Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. — М. : Наука, 1986. — 528 с.

DIRECT PROBLEM OF SCATTERING THEORY FOR A SYSTEM OF DIRAC DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE SEMI-AXIS IN THE CASE OF FINITE DENSITY

A. E. Mamatov

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Uzbekistan
e-mail: aemamatov@mail.ru

In this paper, we study the direct scattering problem on the semi-axis for the system of Dirac differential equations in the case of finite density with the boundary condition $y_1(0)=y_2(0)$. The spectrum was studied, the resolvent and spectral expansion in terms of eigenfunctions of the Dirac operator were constructed.

Keywords: systems of differential equations, continuous spectrum, eigenvalues, eigenfunction expansion theorem.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00732).

REFERENCES

1. Gasimov, M.G. and Levitan, B.M. Determination of the Dirac system by scattering phase, *Dokl. AN SSSR*, 1966, vol. 167, no. 6, pp. 1219–1222.
2. Gasimov, M.G. Inverse problem of scattering theory for the Dirac equation system of order 2n, *Tr. Mosk. mat. ob-va* (Proc. of the Moscow Math. Soc.), 1968, vol. 19, pp. 41–190.
3. Pham, L.V., Inverse scattering problem for the system of Dirac equations on the semi-axis, in *Lineynyye krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki* (Linear Boundary Value Problems of Mathematical Physics), Kyiv: Institute of Mathematics of Academy of Sciences of the USSR, 1973, pp. 174–207.
4. Marchenko, V.A., Reconstruction of potential energy from the phases of scattered waves, *Dokl. AN SSSR*, 1955, vol. 104, no. 5, pp. 695–698.
5. Soloviev, A.N., Expansion in eigenfunctions of the operator generated by the system of the 1st order equation, *Izv. AN AzSSR. Ser. fiz.-tekh. i mat. nauk* (News of the Academy of Sciences of the AzSSR, series of physics, technology and mathematical sciences), 1981, no. 5, pp. 31–37.
6. Mamatov, A.E. and Khasanov, A.B., Expansion in eigenfunctions for the non-self-adjoint Dirac operator on the semi-axis, *Dokl. AN RUz*, 2002, no. 4, pp. 10–13.
7. Nizhnik, L.P. and Pham Loy Vu. Inverse scattering problem on a semi-axis with a non-self-adjoint potential matrix, *Ukr. mat. zhurnal* (Ukrainian Math. J.), 1974, no. 4, pp. 469–486.
8. Khasanov, A.B., Inverse problem of scattering theory for a system of first order differential equations, *Dokl. AN SSSR*, 1984, vol. 277, no. 3, pp. 559–562.
9. Khasanov, A.B., Inverse problem of the theory of scattering on a semi-axis for a system of difference equations, *Dokl. AN SSSR*, 1984, vol. 278, no. 6, pp. 1316–1319.
10. Takhtadzhyan, L.A. and Faddeev, L.D., *Gamil'tonov podkhod v teorii solitonov* (Hamiltonian Approach to Soliton Theory), Moscow: Nauka, 1986.