

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ
ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ
С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

И. С. Ломов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 02.09.2023 г., после доработки 18.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Оператор Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом определён на отрезке числовой прямой. Заданы условия сопряжения во внутренней точке отрезка. Потенциал оператора может иметь неинтегрируемую особенность. Для сильного решения задачи Коши для уравнения с параметром получены асимптотические формулы и оценки на каждом из отрезков гладкости решения.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, сингулярный коэффициент, асимптотическое представление решения, условия сопряжения, лемма Гронуолла–Беллмана.

DOI: 10.31857/S0374064124030015, EDN: PSEVBO

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В книге [1, с. 28–38] представлены исследования автора по вопросам спектральной теории дифференциальных операторов второго порядка на отрезке с нелокальными краевыми условиями, в частности, изучены спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля с интегрируемым на отрезке потенциалом. Цель данной статьи — показать, что часть из этих свойств справедлива и для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами, имеющими неинтегрируемые особенности. Получены асимптотические формулы для решения задачи Коши для уравнения с параметром, которые позволяют получить асимптотические представления для собственных функций оператора с краевыми условиями и для сопряжённого оператора. Установив асимптотические формулы для собственных значений, доказав справедливость неравенства Бесселя для прямого и сопряжённого операторов и справедливость теоремы полноты для каждого из операторов, применим теорему Бари и придём к теореме о безусловной базисности систем собственных функций операторов в пространстве $\mathcal{L}^2$.

Изучим свойства решения при произвольных значениях спектрального параметра λ следующей модельной задачи:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y[1/2] = 0, \quad y'[1/2] = y'(0) = 1. \quad (2)$$

Будем изучать *сильное решение задачи* — решение, удовлетворяющее уравнению (1) почти всюду на интервале $G = (0, 1)$ при выполнении условий (2) в обычном смысле.

Задачу (1), (2) рассматриваем на множестве функций $y(x)$, абсолютно непрерывных вместе с первой производной на каждом из отрезков $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ и принадлежащих классу $\mathcal{L}^2(G)$ функций, интегрируемых с квадратом на множестве G .

Через $y[1/2]$ обозначен скачок функции $y(x)$ в точке $x=1/2$: $y[1/2]=y(1/2+0)-y(1/2-0)$, $q(x)$ — комплекснозначная функция из класса $\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)=\{f(x): \int_0^1 x^{1-\varepsilon}|f(x)|dx < \infty\}$ для некоторого числа $\varepsilon \in [0, 1]$. Таким образом, потенциал $q(x)$ может иметь неинтегрируемую особенность в нуле.

Отметим, что краевая задача для уравнения (1) с потенциалом $q(x) \in \mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)$, $\varepsilon \in (1/2, 1]$, исследована в статье [2]. Рассмотрены гладкие на интервале G решения. Получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений соответствующего оператора. Решена обратная задача по нахождению потенциала. Некоторые идеи из этой статьи используются для получения оценок решения задачи (1), (2).

В работе [3] изучена краевая задача для уравнения (1) с потенциалом из класса $\mathcal{L}^{1,\varrho}(G)$, т.е. $\varrho(x)q(x) \in \mathcal{L}^1(G)$, где через $\varrho(x)$ обозначено расстояние от точки x до границы интервала G . Рассмотрены гладкие на интервале G решения, найдены условия безусловной базисности в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$ системы корневых функций оператора.

В статье [4] для общего дифференциального оператора второго порядка на интервале G (в случае оператора Шрёдингера потенциал $q(x) \in \mathcal{L}^{1,\sqrt{\varrho}}(G)$) найдены условия, гарантирующие безусловную базисность системы корневых функций в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$. Рассмотрены нерегулярные решения. В [3, 4] корневые функции понимаются в обобщённом по В.А. Ильину смысле [5, с. 347].

Основы теории сингулярных задач Коши и теории сингулярных краевых задач на примере двухточечных задач и задач об ограниченных и монотонных решениях дифференциальных уравнений второго порядка изложены в фундаментальной работе [6].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Выведем асимптотические формулы для функции $y(x, \mu, q) \equiv y(x)$ — решения задачи (1), (2). Здесь $\mu^2 = \lambda$, $\operatorname{Re} \mu \geq 0$.

Методом вариации постоянных найдём интегральные уравнения для функции $y(x)$ на каждом из отрезков $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$. Пусть $\mu \neq 0$, ищем решение задачи в виде $y(x) = c_1(x) \sin(\mu x) + c_2(x) \cos(\mu x)$ и получим следующие уравнения:

$$y(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \int_0^x \frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu} q(t) y(t) dt, \quad x \in [0, 1/2], \quad (3)$$

$$y(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu} + \int_0^x \frac{\sin \mu(x-t)}{\mu} q(t) y(t) dt, \quad x \in [1/2, 1], \quad (4)$$

где функция $y(t)$ при $t \in [0, 1/2]$ в уравнении (4) является решением уравнения (3).

Прежде чем переходить к получению асимптотических формул для функции $y(x)$, убедимся в том, что особенность потенциала $q(x)$ в точке $x=0$ не мешает существованию интегралов в правых частях равенств (3), (4). Из леммы 1.1 [6] следует, что для решения уравнения (1) с потенциалом $q(x)$ из рассматриваемого класса справедлива оценка $|y(x)| \leq sx$ для значений $x > 0$, близких к точке $x=0$. Это означает, что поведение функции $y(x)$ в окрестности нуля компенсирует возможную особенность потенциала.

Будем использовать обозначение $\nu = |\operatorname{Im} \mu|$.

Лемма 1. Пусть коэффициент $q(x)$ уравнения (1) принадлежит пространству $\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)$ для некоторого числа $\varepsilon \in [0, 1]$. Тогда для произвольного комплексного числа $\mu \neq 0$ дифференциальное уравнение (1) при начальных условиях (2) в промежутке $[0, 1/2]$ имеет единственное решение $y(x)$, допускающее оценки

$$|y(x)| \leq r(\delta, \mu, x) |\mu|^{-\delta} x^{1-\delta}, \quad x \in [0, 1/2], \quad \delta \in [0, \varepsilon], \quad (5)$$

$$\left| y(x) - \frac{\sin(\mu x)}{\mu} \right| \leq r(\delta, \mu, x) |\mu|^{-1-\delta} \int_0^x t^{1-\delta} |q(t)| dt, \quad x \in [0, 1/2], \quad \delta \in [0, \varepsilon], \quad (6)$$

где $r(\delta, \mu, x) = \exp\{\nu x + |\mu|^{-\delta} \int_0^x t^{1-\delta} |q(t)| dt\}$.

Доказательство. В силу леммы 1.1 [6] задача (1), (2) имеет единственное решение y . Прежде чем доказывать оценки леммы, установим некоторые неравенства, связанные с функцией $\sin z$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin z| \leq |z| \operatorname{ch} y \leq |z| e^{|y|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Действительно, для значений $|z| \leq 1$ получаем оценку (7), исходя из известных соотношений

$$|\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x \leq y^2 \operatorname{ch}^2 y + x^2 \operatorname{ch}^2 y = (x^2 + y^2) \operatorname{ch}^2 y,$$

где использованы неравенства $\operatorname{ch} y \geq 1$ и $|\operatorname{th} y| \leq |y|$ для $y \in [-1, 1]$.

Для $|z| > 1$ имеем $|\sin z/z| \leq |\sin z| \leq \operatorname{ch} y$, тем самым устанавливаем оценку (7) для остальных значений z .

При $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$, $0 \leq t_j - t_{j+1} \leq 1$, $t_j, t_{j+1} \in [0, 1]$, из неравенства (7) следует оценка

$$\frac{|\sin(\mu(t_j - t_{j+1}))|}{|\mu| t_j} \leq e^{\nu(t_j - t_{j+1})}. \quad (8)$$

Если число $\delta \in [0, 1]$, то из (8) получим

$$\frac{|\sin(\mu(t_j - t_{j+1}))|}{|\mu| t_j^{1-\delta}} \leq e^{\nu(t_j - t_{j+1})}.$$

Уточним последнюю оценку. Используя неравенство $|\sin z| \leq \operatorname{ch} y$, справедливое для всех значений $z \in \mathbb{C}$, $y = \operatorname{Im} z$, и оценку (8), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{|\sin(\mu(t_j - t_{j+1}))|}{|\mu| t_j^{1-\delta}} &= \frac{|\sin(\mu(t_j - t_{j+1}))|^\delta}{|\mu|^\delta} \frac{|\sin(\mu(t_j - t_{j+1}))|^{1-\delta}}{(|\mu| t_j)^{1-\delta}} \leq \\ &\leq \frac{1}{|\mu|^\delta} e^{\delta \nu(t_j - t_{j+1})} e^{(1-\delta) \nu(t_j - t_{j+1})} = \frac{1}{|\mu|^\delta} e^{\nu(t_j - t_{j+1})}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{|\sin(\mu(t_j - t_{j+1}))|}{|\mu| t_j^{1-\delta}} \leq \frac{1}{|\mu|^\delta} e^{\nu(t_j - t_{j+1})}, \quad \mu \neq 0. \quad (9)$$

Из оценки (9) при $\delta \in [0, 1]$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$, получим

$$\frac{|\sin(\mu t_n)|}{|\mu| t_n^{1-\delta}} \leq \frac{1}{|\mu|^\delta} e^{\nu t_n}. \quad (10)$$

Для установления оценки (5) используем представление (3) и неравенство (10). Имеем

$$|y(x)| \leq e^{\nu x} |\mu|^{-\delta} x^{1-\delta} + |\mu|^{-\delta} \int_0^x e^{\nu(x-t)} (x-t)^{1-\delta} |q(t) y(t)| dt \leq e^{\nu x} |\mu|^{-\delta} x^{1-\delta} \left(1 + \int_0^x e^{-\nu t} |q(t) y(t)| dt \right)$$

и, следовательно,

$$e^{-\nu x} |\mu|^\delta x^{\delta-1} |y(x)| \leq 1 + |\mu|^{-\delta} \int_0^x t^{1-\delta} |q(t)| (e^{-\nu t} |\mu|^\delta t^{\delta-1} |y(t)|) dt, \quad x \in (0, 1/2].$$

Из этого неравенства, в силу леммы Гроуолла–Беллмана [7, с. 49; 8, с. 46], вытекает оценка (5).

С учётом полученной оценки (5) находим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu} q(t)y(t) dt \right| &\leq \frac{1}{|\mu|} \int_0^x e^{\nu(x-t)} |q(t)| |y(t)| dt \leq \frac{1}{|\mu|} \int_0^x e^{\nu(x-t)} |q(t)| r(\delta, \mu, t) \frac{t^{1-\delta}}{|\mu|^\delta} dt = \\ &= \frac{1}{|\mu|^{1+\delta}} \int_0^x e^{\nu(x-t)} t^{1-\delta} |q(t)| \exp \left\{ \nu t + \frac{1}{|\mu|^\delta} \int_0^t t_1^{1-\delta} |q(t_1)| dt_1 \right\} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{|\mu|^{1+\delta}} \exp \left\{ \nu x + \frac{1}{|\mu|^\delta} \int_0^x t^{1-\delta} |q(t)| dt \right\} \int_0^x t^{1-\delta} |q(t)| dt = r(\delta, \mu, x) \frac{1}{|\mu|^{1+\delta}} \int_0^x t^{1-\delta} |q(t)| dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из представления (3) получаем оценку (6):

$$\left| y(x) - \frac{\sin(\mu x)}{\mu} \right| = \left| \int_0^x \frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu} q(t)y(t) dt \right| \leq r(\delta, \mu, x) \frac{1}{|\mu|^{1+\delta}} \int_0^x t^{1-\delta} |q(t)| dt, \quad x \in [0, 1/2].$$

Лемма доказана.

Используем интегральное уравнение (4) для получения оценок решения задачи (1), (2) при $x \in [1/2, 1]$. Обозначим

$$c_q = \|\tilde{q}\|_1 e^{\|\tilde{q}\|_1}, \quad \tilde{q}(x) = x^{1-\varepsilon} q(x), \quad y_0(x) = \int_0^{1/2} \frac{\sin \mu(x-t)}{\mu} q(t)y(t) dt, \quad x \in [1/2, 1],$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве $\mathcal{L}^1(G)$.

Лемма 2. Пусть коэффициент $q(x)$ уравнения (1) принадлежит пространству $\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)$ для некоторого числа $\varepsilon \in [0, 1]$. Тогда для любого комплексного параметра μ , $|\mu| \geq 1$, задача (1), (2) имеет единственное решение $y(x)$, допускающее оценки

$$|y(x)| \leq \frac{2+c_q}{|\mu|} e^{2\nu+\|\tilde{q}\|_1}, \quad |y_0(x)| \leq \frac{r(\varepsilon, \mu, 1)}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \int_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)| dt, \quad x \in [1/2, 1].$$

Для этого решения справедливо равенство

$$y(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu} + y_0(x) + O(\mu^{-2}), \quad x \in [1/2, 1], \quad (11)$$

где слагаемое $O(\mu^{-2})$ удовлетворяет оценке

$$|O(\mu^{-2})| \leq 2c_q \frac{2+c_q}{|\mu|^2} e^{3\nu}, \quad x \in [1/2, 1].$$

Доказательство. Запишем интегральное уравнение (4) для функции $y(x)$ в следующем виде:

$$y(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu} + y_0(x) + \int_{1/2}^x \frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu} q(t)y(t) dt. \quad (12)$$

Применив неравенства (5) и (7), получим оценку слагаемого $y_0(x)$:

$$\begin{aligned} |y_0(x)| &\leq \int_0^{1/2} \frac{e^{\mu(x-t)}}{|\mu|} |q(t)| r(\varepsilon, \mu, t) \frac{t^{1-\varepsilon}}{|\mu|^\varepsilon} dt = \\ &= \frac{1}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \int_0^{1/2} e^{\nu(x-t)} t^{1-\varepsilon} |q(t)| \exp \left\{ \nu t + \frac{1}{|\mu|^\varepsilon} \int_0^t t_1^{1-\varepsilon} |q(t_1)| dt_1 \right\} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \exp \left\{ \nu x + \frac{1}{|\mu|^\varepsilon} \int_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)| dt \right\} \int_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \exp \left\{ \nu + \frac{1}{|\mu|^\varepsilon} \int_0^1 t^{1-\varepsilon} |q(t)| dt \right\} \int_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)| dt = \frac{r(\varepsilon, \mu, 1)}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \int_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)| dt, \quad x \in [1/2, 1], \end{aligned}$$

здесь $\mu \neq 0$ — любое комплексное число. Если $|\mu| \geq 1$, то справедлива оценка $|y_0(x)| \leq c_q |\mu|^{-1-\varepsilon} e^\nu$.

Представим решение интегрального уравнения (12) в виде ряда

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x), \quad c_0(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu} + y_0(x), \quad x \in [1/2, 1], \\ c_n(x) &= \int_{1/2}^x dt_1 \int_{1/2}^{t_1} dt_2 \dots \int_{1/2}^{t_{n-1}} \left[\frac{\sin(\mu(x-t_1))}{\mu} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(\mu(t_j - t_{j+1}))}{\mu} c_0(t_n) \prod_{j=1}^n \tilde{q}(t_j) \right] dt_n. \end{aligned}$$

Для коэффициента $c_0(x)$ имеет место неравенство

$$|c_0(x)| \leq \frac{2+c_q}{|\mu|} e^\nu, \quad x \in [1/2, 1], \quad |\mu| \geq 1.$$

Чтобы получить оценки для остальных слагаемых ряда, воспользуемся неравенствами (9), (10) и равенством

$$\int_0^x f(t_1) \int_0^{t_1} f(t_2) \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 = \frac{1}{n!} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^n, \quad n \geq 1,$$

для доказательства которого нужно последовательно вводить новые переменные

$$\xi_1 = \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n, \quad \xi_2 = \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1}, \quad \dots, \quad \xi_{n-1} = \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2$$

и интегрировать функции ξ_k в промежутках $[0, \int_0^{t_{n-k}} f(t_{n-k+1}) dt_{n-k+1}]$.

Тем самым будет установлена оценка для решения уравнения

$$|y(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x)| \leq \frac{2+c_q}{|\mu|} e^{2\nu + \|\tilde{q}\|_1}, \quad |\mu| \geq 1, \quad x \in [1/2, 1].$$

Полученную для функции $y(x)$ оценку применим для доказательства равенства (11):

$$|y(x) - c_0(x)| = \left| \int_{1/2}^x \frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu} q(t)y(t) dt \right| \leq \frac{2+c_q}{|\mu|} e^{2\nu+\|\tilde{q}\|_1} \frac{e^\nu}{|\mu|} \|\tilde{q}\|_1 = 2c_q \frac{2+c_q}{|\mu|^2} e^{3\nu},$$

где $|\mu| \geq 1$, $x \in [1/2, 1]$. Эта оценка доказывает соотношение (11). Лемма доказана.

Отметим, что лемму 2 можно было бы доказать с помощью неравенства Гронуолла–Беллмана, как и при доказательстве леммы 1. При этом можно допустить наличие аналогичной сингулярной особенности у потенциала $q(x)$ и в точке $x=1$.

Сформулируем доказанные утверждения в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть коэффициент $q(x)$ уравнения (1) принадлежит пространству $\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)$ для некоторого числа $\varepsilon \in [0, 1]$. Тогда для любого комплексного параметра $\mu \neq 0$ задача (1), (2) имеет единственное решение $y(x)$, для которого справедливы следующие асимптотические формулы:

$$y(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + O\left(\frac{e^\nu}{\mu^{1+\varepsilon}}\right), \quad x \in [0, 1/2],$$

$$y(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu} + O\left(\frac{e^\nu}{\mu^{1+\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{e^{3\nu}}{\mu^2}\right), \quad x \in [1/2, 1],$$

здесь $|\mu| \geq 1$, $\nu = |\operatorname{Im} \mu|$, оценки выражений $O(\cdot)$ в правых частях равенств равномерны по переменной x .

Замечание. Рассмотрим уравнение (1) с краевыми условиями $y(0)=0$, $y(1)=0$ и условиями сопряжения (2) в точке $x=1/2$. Если полученное в теореме 1 решение задачи (1), (2) удовлетворяет условию $y(1)=0$, то для решения краевой задачи справедливы соотношения теоремы 1. В противном случае аналогичные оценки можно получить, изменив интегральные уравнения (3), (4). Решение $\tilde{y}(x)$ краевой задачи можно представить в виде $\tilde{y}(x) = \tilde{y}'(0)y(x)$, где $y(x)$ — решение задачи (1), (2). При этом равенство $y(1) \equiv y(1, \mu) = 0$ будет уравнением на собственные значения соответствующего дифференциального оператора.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов, И.С. Спектральный метод В.А. Ильина. Несамосопряжённые операторы. I. Оператор второго порядка. Базисность и равномерная сходимость спектральных разложений / И.С. Ломов. — М. : МАКС Пресс, 2019. — 230 с.
2. Жорницкая, Л.А. Об одной теореме единственности для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с потенциалом, имеющим неинтегрируемую особенность / Л.А. Жорницкая, В.С. Серов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2125–2134.
3. Kritskov, L.V. Estimates for root functions of a singular second-order differential operator / L.V. Kritskov // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications / Eds. T.S. Kalmenov, E.D. Nursultanov, M.V. Ruzhansky, M.A. Sadybekov. — Cham : Springer, 2017. — P. 245–257.

4. Ломов, И.С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 9. — С. 1550–1563.
5. Ильин, В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов / В.А. Ильин. М. : Наука, 1991. — 386 с.
6. Кигурадзе, И.Т. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / И.Т. Кигурадзе, Б.Л. Шехтер // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Новые достижения. — 1987. — Т. 30. — С. 105–201.
7. Кигурадзе, И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. — Тбилисси : Изд-во Тбилисск. ун-та. 1975. — 351 с.
8. Беллман, Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман ; пер. с англ. А.Д. Мышкиса. — М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1954. — 216 с.

STUDY OF THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE SOLUTION TO A PROBLEM WITH A PARAMETER FOR THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH A SINGULAR POTENTIAL

I. S. Lomov

*Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: lomov@cs.msu.ru*

The Sturm–Liouville operator with a singular potential on an interval with conjugation conditions at the interior point of the interval is considered. The operator potential may have a non-integrable singularity. For a strong solution of the Cauchy problem for an equation with a parameter, asymptotic formulas and estimates are obtained on each of the smoothness segments of the solution.

Keywords: differential equation, singular coefficient, asymptotic representation of solution, conjugation conditions, Gronwall–Bellman lemma.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program for the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Lomov, I.S., *Spektral'nyy metod V.A. Il'ina. Nesamosopryazhonnyye operatory. I. Operator vtorogo poriyadka. Bазисnost' i ravnomernaya skhodimost' spektral'nykh razlozheniy* (The Il'in Spectral Method. Non-Self-Adjoint Operators. I. Operator of the Second Order. Basis Property and Uniform Convergence of Spectral Expansions), Moscow: MAKSPress, 2019.
2. Zhornitskaya, L.A. and Serov, V.S., On a uniqueness theorem for the Sturm–Liouville operator on an interval with a potential having a non-integrable singularity, *Differ. Uravn.*, 1993, vol. 29, no. 12, pp. 2125–2134.
3. Kritskov, L.V., Estimates for root functions of a singular second-order differential operator, *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications*, T.S. Kalmenov, E.D. Nursultanov, M.V. Ruzhansky, and M.A. Sadybekov eds., Cham: Springer, 2017, pp. 245–257.
4. Lomov, I.S., A Theorem on the Unconditional Basis Property of the Root Vectors of Loaded Second-Order Differential Operators, *Differ. Equat.*, 1991, vol. 27, no. 9, pp. 1098–1107.
5. Il'in, V.A., *Spectral Theory of Differential Operators*, New York: Springer, 1995.
6. Kiguradze, I.T. and Shekhter, B.L., Singular boundary value problems for ordinary differential equations of the second order, *Itoги nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Nov. dostizh.*, 1987, vol. 30, pp. 105–201.
7. Kiguradze, I.T., *Nekotoryye singulyarnyye krayevyye zadachi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Some Singular Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations), Tbilissi: Izd-vo Tbilissk. un-ta, 1975.
8. Bellman, R., *Stability Theory of Differential Equations*, New York–Toronto–London: McGraw Hill, 1953.