ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 273–279

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.54

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Я. Т. Султанаев[1], Н. Ф. Валеев[2], Э. А. Назирова[3]

[1]*Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы, г. Уфа*
[1]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*
[2]*Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, г. Уфа*
[3]*Уфимский университет науки и технологий*
e-mail: [1]sultanaevyt@gmail.com, [2]valeevnf@yandex.ru, [3]ellkid@gmail.com

Поступила в редакцию 13.08.2023 г., после доработки 03.12.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Рассмотрено развитие метода построения асимптотических формул при $x\to+\infty$ фундаментальной системы решений двучленных сингулярных симметрических дифференциальных уравнений нечётного порядка с коэффициентами из широкого класса функций, допускающих осцилляцию (с ослабленными условиями на регулярность, не удовлетворяющими классическим условиям регулярности Титчмарша–Левитана). На примере двучленного уравнения третьего порядка $(i/2)\big[(p(x)y')''+(p(x)y'')'\big]+q(x)y=\lambda y$ исследована асимптотика решений при различном поведении коэффициентов $q(x)$, $h(x)=-1+1/\sqrt{p(x)}$. Получены новые асимптотические формулы для случая, когда $h(x)\notin L_1[1,\infty)$.

Ключевые слова: асимптотический метод, осциллирующий коэффициент, сингулярное дифференциальное уравнение нечётного порядка, тождество Кэмпбелла, квазипроизводная, матрица Шина–Зеттла.

DOI: 10.31857/S0374064124020091, EDN: QFFECV

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений (ФСР) двучленного уравнения чётного порядка

$$(-1)^n(p(x)y^{(n)})^{(n)}+q(x)y=\lambda y,\quad x\in[1,\infty),$$

где p — локально суммируемая функция, допускающая представление $p(x)=(1+r(x))^{-1}$, $r\in L_1[1,\infty)$; q — обобщённая функция, представимая при некотором фиксированном k, $0\leqslant k\leqslant n$, в виде $q=\sigma^{(k)}$ ($\sigma\in L_1[1,\infty)$, если $k<n$, $|\sigma|(1+|r|)(1+|\sigma|)\in L_1[1,\infty)$, если $k=n$).

В отличие от уравнений чётного порядка, уравнения нечётного порядка для классов нерегулярных в смысле Титчмарша–Левитана коэффициентов менее исследованы. Отметим, что в статьях [2–4] рассмотрена асимптотика решений уравнений нечётного порядка для некоторых классов коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$.

В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $x\to+\infty$ ФСР для двучленных уравнений нечётного порядка вида

$$ly=\frac{i}{2}\big[(p(x)y^{(n)})^{(n+1)}+(p(x)y^{(n+1)})^{(n)}\big]+q(x)y=\lambda y,\quad x\geqslant 1. \tag{1}$$

Ниже будем следовать подходу, предложенному в работах [3–6]. Он может быть реализован и для двучленного уравнения произвольного нечётного порядка с коэффициентом при старшей производной, отличным от постоянной.

Основная цель настоящей работы — исследовать асимптотику ФСР для случаев различного поведения коэффициентов $q(x)$, $h(x)=-1+1/\sqrt{p(x)}$ на примере уравнения третьего порядка

$$ly=\frac{i}{2}\big[(p(x)y')''+(p(x)y'')'\big]+q(x)y=\lambda y. \tag{2}$$

1. ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КВАЗИПРОИЗВОДНЫХ

Запишем уравнение (2) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Для этого воспользуемся аппаратом квазипроизводных (см. подробнее в [2, 7]). Определим функцию $q_1(x)$ так, что $q_1'(x)=q(x)$, и введём в рассмотрение квазипроизводные по следующим формулам:

$$z_1=y,\quad z_2=\sqrt{p}y'=\sqrt{p}z_1',\quad z_3=\sqrt{p}(\sqrt{p}y')'-iq_1(x)y=\sqrt{p}z_2'-iq_1(x)z_1,$$

откуда найдём

$$z_3'=-\frac{iq_1(x)}{\sqrt{p(x)}}z_2+\lambda z_1.$$

Тогда уравнение (2) равносильно системе

$$\mathbf{z}'=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{p} & 0\\ iq_1/\sqrt{p} & 0 & 1/\sqrt{p}\\ -i\lambda & -iq_1/\sqrt{p} & 0\end{pmatrix}\mathbf{z},\quad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},$$

которую, учитывая, что $1/\sqrt{p(x)}=1+h(x)$, перепишем в виде

$$\mathbf{z}'=[L_0+h(x)L_1+iq_1(x)(1+h(x))L_2]\mathbf{z},$$

$$L_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -i\lambda & 0 & 0\end{pmatrix},\quad L_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{3}$$

2. СЛУЧАЙ 1

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$h(x)\in L_1[1,\infty),\quad q_1(x)\in L_1[1,\infty).$$

Данные условия выполняются, например, для функций

$$h(x)=\frac{a}{x^\gamma},\quad \gamma>1;\quad q(x)=x^\alpha\sin x^\beta,\quad \alpha>0,\quad \beta>\alpha+2.$$

Пусть постоянная матрица T приводит матрицу L_0 к диагональному виду. Сделаем замену

$$\mathbf{z}=T\mathbf{u},\quad T^{-1}L_0T=\Lambda,\quad \mu_i^3=-i\lambda,\quad i=1,2,3,$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2\end{pmatrix}.$$

Тогда систему (3) запишем как

$$\mathbf{u}' = \left[\Lambda + h(x)T^{-1}L_1T + iq_1(x)(1+h(x))T^{-1}L_2T\right]\mathbf{u}. \tag{4}$$

Очевидно, что в силу наложенных условий система (4) удовлетворяет условиям леммы 1 из [8, с. 284] и является L-диагональной, а значит, мы можем выписать асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для ФСР этой системы:

$$\mathbf{z}_i(x,\lambda) = T\mathbf{u}_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}T(\mathbf{e}_i + o(1)), \quad i = 1,2,3,$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичные векторы.

Отметим, что аналогичные результаты для уравнений нечётного порядка были получены в работе [2].

3. СЛУЧАЙ 2

Положим $\tilde q_1(x) = q_1(x)(1+h(x))$. Пусть функция $\tilde q_2(x)$ такая, что $\tilde q_2'(x) = \tilde q_1(x)$. Предположим, что выполняются условия

$$h(x) \in L_1[1,\infty), \quad \tilde q_2 \in L_1[1,\infty),$$

например, для функций

$$h(x) = \frac{1}{x^\gamma}, \quad \gamma > 1; \quad q(x) = x^\alpha \sin x^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > \frac{\alpha+3}{2}.$$

Следуя подходу, изложенному в работах [3–6], замена

$$\mathbf{z} = e^{\tilde q_2(x)L_2}\mathbf{u} \tag{5}$$

переводит (3) в систему

$$\mathbf{u}' = e^{-\tilde q_2(x)L_2}(L_0 + h(x))L_1 e^{-\tilde q_2(x)L_2}\mathbf{u}. \tag{6}$$

Применим тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа для преобразования правой части (6):

$$e^{-\tilde q_2(x)L_2}L_0 e^{\tilde q_2(x)L_2} = L_0 - \tilde q_2(x)[L_2,L_0] + \frac{\tilde q_2(x)^2}{2!}[L_2,[L_2,L_0]] - \frac{\tilde q_2(x)_1^3}{3!}[L_2,[L_2,[L_2,L_0]]] + \ldots,$$

здесь $[A,B] = AB - BA$ — матричный коммутатор. Вычисляя последовательно коммутаторы в правой части последнего соотношения, получаем, что все слагаемые, начиная с пятого, равны нулю, а ненулевые слагаемые могут быть найдены:

$$[L_2,L_0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [L_2,[L_2,L_0]] = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [L_2,[L_2,[L_2,L_0]]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные вычисления можно провести для правой части соотношения

$$e^{-\tilde q_2(x)L_2}L_1 e^{-\tilde q_2(x)L_2} = L_1 - \tilde q_2(x)[L_2,L_1] + \frac{\tilde q_2^2(x)}{2!}[L_2,[L_2,L_1]] - \frac{\tilde q_2^3(x)}{3!}[[L_2,[L_2,[L_2,L_1]]] + \ldots$$

Учитывая, что $[L_2,L_0] = [L_2,L_1]$, запишем систему (6) в виде

$$\mathbf{u}' = \left[L_0 + hL_1 - \tilde q_2(1+h)[L_2,L_1] + \frac{\tilde q_2^2(1+h)}{2!}[L_2[L_2,L_1]] - \frac{\tilde q_2^3(1+h)}{3!}[L_2,[L_2,[L_2,L_1]]]\right]\mathbf{u}.$$

В силу условий на функции $h(x)$ и $q(x)$ запишем последнюю систему как

$$\mathbf{u}' = (L_0 + D(x))\mathbf{u},$$

где $D(x)$ — матрица, элементы которой принадлежат пространству $L_1[1,\infty)$. Как и в случае 1, сделаем замену $\mathbf{u} = T\mathbf{v}$, тогда

$$\mathbf{v}' = (\Lambda + T^{-1}D(x)T)\mathbf{v}. \tag{7}$$

Система (7) удовлетворяет условиями леммы 1 в [7, с. 288] и является L-диагональной, а значит, с учётом (5) мы можем выписать асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для её ФСР:

$$\mathbf{z}_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x} T(\mathbf{e}_i + o(1)), \quad i = 1,2,3.$$

4. СЛУЧАЙ 3

Рассмотрим далее ситуацию, когда функция $h(x)$ не суммируема. Отметим, что она может принадлежать одному из классов осциллирующих функций (подробнее см. в [6]).

Обозначим через $h_1(x)$ функцию, такую что $h_1' = h(x)$, и предположим

$$h_1(x) \in L_1[1,\infty), \quad \tilde{q}_1(x) \in L_1[1,\infty).$$

Данные условия выполняются, например, для функций

$$h(x) = \sin x^\gamma, \quad \gamma > 2; \quad q(x) = x^\alpha \sin x^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \gamma \neq \beta > \alpha + 2.$$

Замена

$$\mathbf{z} = e^{h_1 L_1}\mathbf{u}$$

приводит (5) к виду

$$\mathbf{u}' = e^{-h_1 L_1}(L_0 + i\tilde{q}_1(x))L_2 e^{-h_1 L_1}\mathbf{u}. \tag{8}$$

Как и случае 2, применим тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа для преобразования правой части системы (8):

$$e^{-h_1 L_1} L_0 e^{-h_1 L_1} = L_0 - h_1[L_1, L_0] + \frac{h_1^2}{2!}[L_1,[L_1,L_0]] - \frac{h_1^3}{3!}\big[L_1,[L_1,[L_1,L_0]]\big] + \ldots$$

Вычисляя последовательно коммутаторы в правой части последнего соотношения, получаем, что все слагаемые, начиная с шестого, равны нулю, а оставшиеся могут быть вычислены:

$$e^{-h_1 L_1} L_0 e^{-h_1 L_1} = L_0 - \lambda h_1 L_2 + \frac{\lambda h_1^2}{2!}[L_1, L_2] - \frac{\lambda h_1^3}{3!}[L_1,[L_1,L_2]] + \frac{\lambda h_1^4}{4!}\big[L_1,[L_1,[L_1,L_2]]\big],$$

$$[L_1, L_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [L_1,[L_1,L_2]] = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [L_1,[L_1,[L_1,L_2]]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{-h_1 L_1} L_2 e^{-h_1 L_1} = L_2 - h_1[L_1, L_2] + \frac{h_1^2}{2!}[L_1,[L_1,L_2]] - \frac{h_1^3}{3!}\big[L_1,[L_1,[L_1,L_2]]\big] + \ldots =$$

$$= L_2 - h_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{h_1^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{h_1^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С учётом последних выкладок получим представление для системы (8):

$$\mathbf{u}' = \left(L_0 + (\tilde{q}_1 - \lambda h_1)L_2 - h_1\left(\tilde{q}_1 - \frac{\lambda h_1}{2}\right)[L_2, L_1] + \frac{h_1^2}{2!}\left(\tilde{q}_1 - \frac{\lambda h_1}{3}\right)[L_1, [L_1, L_2]] - \right.$$

$$\left. - \frac{h_1^3}{3!}\left(\tilde{q}_1 - \frac{\lambda h_1}{3}\right)\big[L_1, [L_1, [L_1, L_2]]\big]\right)\mathbf{u}.$$

В силу условий на функции $h(x)$, $q(x)$ эта система может быть записана в виде

$$\mathbf{u}' = (L_0 + C(x))\mathbf{u},$$

где $C(x)$ — матрица, элементы которой принадлежат $L_1[1,\infty)$. Аналогично случаям 1 и 2 сделаем замену $\mathbf{u} = T\mathbf{v}$ и получим

$$\mathbf{v}' = (\Lambda + T^{-1}C(x)T)\mathbf{v}. \tag{9}$$

Система (9) удовлетворяет условиями леммы 1 в [7, с. 288] и является L-диагональной, а значит, мы можем выписать асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для её ФСР:

$$\mathbf{z}_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}T(\mathbf{e}_i + o(1)), \quad i = 1, 2, 3.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных результатов вытекает справедливость теоремы об асимптотическом поведении при $x \to +\infty$ фуднаментальной системы решений уравнения (3). Сформулируем её в терминах собственных значений и векторов матрицы L_0 и функций $h(x)$, $q_1(x)$.

Теорема. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*
1) $h(x), q_1(x) \in L_1[1,\infty)$;
2) $h(x), \int_x^\infty q_1(\xi)(1 + h(\xi))\,d\xi \in L_1[1,\infty)$;
3) $\int_x^\infty h(\xi)\,d\xi, q_1(x)(1 + h(x)) \in L_1[1,\infty)$.
Тогда для решений системы уравнений (3) при $x \to +\infty$ *справедливо представление*

$$\mathbf{z}_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}T(\mathbf{e}_i + o(1)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Замечание 1. Элементами вектор-функции $\mathbf{z}_i(x,\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, являются решения уравнения (2) и их квазипроизводные. В частности, для ФСР уравнения (2) при $x \to +\infty$ справедливы следующие формулы:

$$y_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}(1 + o(1)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Замечание 2. Методы изучения решений сингулярных ОДУ с коэффициентами из классов осциллирующих функций, изложенные и реализованные в данной работе и в работах [3–5], могут быть применены к иследованию уравнений произвольного порядка, в том числе к уравнению (1).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование Я.Т. Султанаева и Э.А. Назировой выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00580).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конечная, Н.Н. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами / Н.Н. Конечная, К.А. Мирзоев, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 2018. — Т. 104, № 2. — С. 231–242.
2. Мирзоев, К.А. Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечётного порядка / К.А. Мирзоев, Н.Н. Конечная // Вестн. Московского. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2020. — № 1. — С. 23–28.
3. Султанаев, Я.Т. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений нечётного порядка с осциллирующими коэффициентами / Я.Т. Султанаев, А.Р. Сагитова, Б.И. Марданов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 717–720.
4. Валеев, Н.Ф. Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений нечётного порядка с осциллирующими коэффициентами / Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев // Мат. заметки. — 2021. — Т. 109, № 6. — С. 938–943.
5. Валеев, Н.Ф. О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений / Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев // Уфимский мат. журн. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 9–15.
6. Валеева, Л.Н. Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля с быстро осциллирующими коэффициентами / Л.Н. Валеева, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев // Мат. заметки. — 2022. — Т. 112, № 6. — С. 1059–1064.
7. Everitt, W.N. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators / W.N. Everitt, L. Markus. — Amer. Math. Soc., 1999.
8. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 526 с.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THIRD-ORDER BINOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ya. T. Sultanaev[1], N. F. Valeev[2], E. A. Nazirova[3]

[1]Akmulla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia
[1]Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Russia
[2]Institute of Mathematics with Computing Centre-Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the RAS, Ufa, Russia
[3]Ufa University of Science and Technology, Russia
e-mail: [1]sultanaevyt@gmail.com, [2]valeevnf@yandex.ru, [3]ellkid@gmail.com

The paper discusses the development of a method for constructing asymptotic formulas for $x\to\infty$ of a fundamental system of solutions of two-term singular symmetric differential equations of odd order with coefficients from a wide class of functions that allow oscillation (with weakened regularity conditions that do not satisfy the classical Titchmarsh–Levitan regularity conditions). Using the example of a third-order binomial equation $(i/2)\big[(p(x)y')''+(p(x)y'')'\big]+q(x)y=\lambda y$ the asymptotics of solutions in the case of different behavior of the coefficients $q(x)$ is studied, $h(x)=-1+1/\sqrt{p(x)}$. New asymptotic formulas are obtained for the case when $h(x)\notin L_1[1,\infty)$.

Keywords: asymptotic method, oscillating coefficient, singular differential equation of odd order, Campbell's identity, quasi-derivatives, Shin–Zettl matrix.

FUNDING

Research by Ya.T. Sultanaev and E.A. Nazirova was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00580).

REFERENCES

1. Konechnaja, N.N. On the asymptotic behavior of solutions to two-term differential equations with singular coefficients / N.N. Konechnaja, K.A. Mirzoev, A.A. Shkalikov // Math. Notes. — 2018. — V. 104, № 2. — P. 244–252.
2. Mirzoev, K.A. Asymptotics of solutions to linear differential equations of odd order / K.A. Mirzoev, N.N. Konechnaja // Moscow Univ. Math. Bull. — 2020. — V. 75, № 1. — P. 22–26.
3. Sultanaev, Ya.T. On the asymptotic behavior of solutions of odd-order differential equations with oscillating coefficients / Ya.T. Sultanaev, A.R. Sagitova, B.I. Mardanov // Differ. Equat. — 2022. — V. 58, № 5. — P. 712–715.
4. Valeev, N.F. On a method for studying the asymptotics of solutions of odd-order differential equations with oscillating coefficients / N.F. Valeev, É.A. Nazirova, Ya.T. Sultanaev // Math. Notes. — 2021. — V. 109, № 6. — P. 980–985.
5. Valeev, N.F. On a new approach for studying asymptotic behavior of solutions to singular differential equations / N.F. Valeev, E.A. Nazirova, Ya.T. Sultanaev // Ufa Math. J. — 2015. — V. 7, № 3. — P. 9–14.
6. Valeeva, L.N. On a method for studying the asymptotics of solutions of Sturm–Liouville differential equations with rapidly oscillating coefficients / L.N. Valeeva, E.A. Nazirova, Ya.T. Sultanaev // Math. Notes. — 2022. — V. 112, № 6. — P. 1059–1064.
7. Everitt, W.N. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators / W.N. Everitt, L. Markus. — Amer. Math. Soc., 1999.
8. Naimark, M.A. Linear Differential Operators / M.A.Naimark. — Moscow : Nauka, 1969. — 526 p. [in Russian]