ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 224–236

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55+517.956

ГРАДИЕНТ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. М. Романенков

Московский авиационный институт,
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, г. Москва
e-mail: romanaleks@gmail.com

Поступила в редакцию 01.08.2023 г., после доработки 19.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Рассмотрена задача управления процессами, математической моделью которых является начально-краевая задача для псевдогиперболического линейного дифференциального уравнения высокого порядка по пространственной переменной и второго порядка по временно́й переменной. Псевдогиперболическое уравнение является обобщением обычного гиперболического уравнения, типичного в теории колебаний. В качестве примеров изучены модели колебаний движущихся упругих материалов. Для модельных задач установлено энергетическое тождество, сформулированы условия единственности решения. Как оптимизационная рассмотрена задача управления правой частью с целью минимизации квадратичного интегрального функционала, который оценивает близость решения к целевой функции. От изначального функционала выполнен переход к мажорантному функционалу, для которого установлена соответствующая оценка сверху. Получено явное выражение градиента этого функционала, выведены сопряжённые начально-краевые задачи.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, градиент, оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0374064124020068, EDN: QKNNLQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $L_j^{2n_j}(z)\in\mathbb{R}[z]$, здесь $n_j\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,2,3\}$. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L_1^{2n_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+L_2^{2n_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+L_3^{2n_3}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=F(x,t). \tag{1}$$

В нём операторы $L_j^{2n_j}(\partial/\partial x)$ можно рассматривать как линейные дифференциальные операторы порядка $2n$, $n=\max_{j=1,2,3} n_j$, которые порождаются соответствующими многочленами от одной переменной и определяются соотношениями

$$L_j^{2n}(z)=\sum_{k=0}^{2n}p_{j,k}z^k,\quad p_{j,k}\in\mathbb{R},\quad \sum_{k=0}^{2n}|p_{j,k}|\neq 0,$$

а при $z=\partial/\partial x$ имеем

$$L_j^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=0}^{2n}p_{j,k}\frac{\partial^k}{\partial x^k},\quad p_{j,k}\in\mathbb{R}.$$

Решение уравнения (1) удовлетворяет краевым условиям

$$\alpha_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \beta_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=l} = 0, \quad k = \overline{0, 2n-1}, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x). \tag{3}$$

При этом числа α_k, β_k не все равны нулю. Отметим, что выполняются условия согласования на краях, а именно, условиям (2) удовлетворяют производные по переменной t от функции $u(x,t)$ и функции из начальных условий.

Стоит отметить, что начально-краевую задачу (1)–(3) можно рассматривать как обобщённую математическую модель колебательных процессов самой различной природы. В работе [1] приводится обзор различных математических моделей колебаний упругих материалов, для них устанавливается теорема единственности решения задачи Коши. В [2, 3] предлагаются алгоритмы для построения численных решений начально-краевой задачи для линейного и нелинейного псевдогиперболических уравнений. В статье [4] применяется проекционный метод Галёркина для линейного псевдогиперболического уравнения второго порядка по пространственной переменной с переменными коэффициентами. Важными результатами этой работы являются теорема единственности и оценки погрешности численного метода. Ниже рассмотрим конкретные примеры, в которых будем считать, что внешнего воздействия на колеблющуюся систему не оказывается, т.е. $F(x,t) = 0$ (описание числовых параметров соответствующих моделей можно найти в источниках из предложенного списка литературы).

Пример 1 (уравнение колебаний струны). Пусть $n = 1$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z) = 1, \quad L_2^{2n}(z) = 0, \quad L_3^{2n}(z) = -a^2 z^2.$$

Тогда получаем (см. [5, 6]) уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Пример 2 (уравнение колебаний балки). Пусть $n = 2$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z) = 1, \quad L_2^{2n}(z) = 0, \quad L_3^{2n}(z) = A^2 z^4.$$

Тогда (см. [5, 6])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Пример 3 (уравнение колебаний двутавровой балки). Пусть $n = 2$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z) = 1, \quad L_2^{2n}(z) = 0, \quad L_3^{2n}(z) = -a^2 z^2 + A^2 z^4.$$

Тогда (см. [7])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Пример 4 (уравнение Аллера–Лыкова). Простейшее псевдогиперболическое уравнение получается при $n = 1$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z) = A_1, \quad L_2^{2n}(z) = 1 - A^2 z^2, \quad L_3^{2n}(z) = -D z^2.$$

Имеем (см. [8])

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}-A^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-D^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Пример 5 (уравнение колебаний движущейся струны). Пусть $n=1$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}=1,\quad L_2^{2n}=2v_0z,\quad L_3^{2n}(z)=\left(v_0^2-c^2\right)z^2.$$

Тогда [9]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2v_0\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(v_0^2-c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{4}$$

Пример 6 (уравнение колебаний движущегося упругого полотна). Пусть $n=2$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z)=1,\quad L_2^{2n}(z)=2v_0z,\quad L_3^{2n}(z)=\left(v_0^2-c^2\right)z^2+\frac{D}{m}z^4.$$

Получаем [9]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2v_0\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(v_0^2-c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{D}{m}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \tag{5}$$

Пример 7 (уравнение колебаний движущегося вязкоупругого полотна). Пусть $n=3$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z)=1,\quad L_2^{2n}(z)=2cz+\gamma\alpha z^4,\quad L_3^{2n}(z)=(c^2-1)z^2+\alpha z^4+\gamma\alpha c z^5.$$

В результате получаем [9]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\gamma\alpha\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial t}+\left(c^2-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\gamma\alpha c\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}=0. \tag{6}$$

Для дальнейшего изложения потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям (2). Тогда существуют числа α_k, β_k при $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ такие, что имеют место тождества*

$$\int\limits_0^l\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=\frac{(-1)^k}{2}\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2dx, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^l\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=(-1)^k\int\limits_0^l\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t\partial x^k}\,dx, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^l\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k}\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=(-1)^k\int\limits_0^l\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2dx, \tag{9}$$

$$\int\limits_0^l\left(\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=\frac{(-1)^k}{2}\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k\partial t}\right)^2\Bigg|_{x=0}^{x=l}, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^l\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=\frac{(-1)^k}{2}\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t\partial x^k}\right)^2dx, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^l\left(\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=(-1)^{k+1}\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t\partial x^k}\right)dx. \tag{12}$$

Доказательство. Для доказательства необходимо применить формулу интегрирования по частям к интегралам, стоящим слева от знака равенства в формулах (7)–(12), и учесть краевые условия (2) при соответствующих значениях α_k, β_k.

Далее поставим дополнительные ограничения на операторы $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$, $L_3^{2n}(\partial/\partial x)$, на которые существенно будем опираться в дальнейшем. Введём обозначения: $\Omega(\tau) := (x,t)$: $x\in(0,l),\ t\in(0,\tau)\}$, $\Omega := \Omega(T)$; $\widehat{W}^{2,2n}(\Omega(\tau))$ — множество функций, которые удовлетворяют краевым условиям (2), имеют производные до второго порядка по t и производные до порядка $2n$ по переменной x и интегрируемы с квадратом по области Ω.

Пусть операторы $L_j^{2n}(\partial/\partial x)$ симметричные при $j=\overline{1,3}$, т.е. для любых функций $v_1, v_2 \in \widehat{W}^{2,2n}(\Omega)$ имеет место тождество

$$\left(L_j^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v_1, v_2\right) = \left(v_1, L_j^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v_2\right), \tag{13}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, определяемое формулой $(v_1,v_2)=\int_0^l v_1v_2\,dx$. Также потребуем, чтобы эти операторы были положительно определены, т.е. потребуем выполнения неравенства

$$\left(L_j^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v_1, v_1\right) \geqslant C_j\,(v_1,v_1)\,, \tag{14}$$

где $C_j>0$, $j=\overline{1,3}$. Так, при $p_k\neq 0$ дифференциальный оператор

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \tag{15}$$

является примером симметричного положительного оператора на пространстве функций, удовлетворяющих краевым условиям (2).

В этой работе будем говорить о *слабых решениях задачи* (1)–(3), т.е. таких функциях $u(x,t)$, которые для любых $v(x)\in H_0^{2n}(0;l)$ и для любого $t\in[0;T]$ при $u(x,t)\in H_0^{2n}(0;l)$, $F(x,t)\in L^2(0;l)$ удовлетворяют тождеству

$$\left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + \left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, v\right) = (F(x,t), v(x)). \tag{16}$$

Стоит обратить внимание на вопрос существования решения таких задач. Так, например, следуя [5], с использованием метода Галёркина можно построить последовательность конечномерных приближений, которая в слабом смысле будет сходиться к решению, которое удовлетворяет тождеству (16).

Пусть оператор $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$ имеет вид (15), т.е.

$$p_{1,r} = \begin{cases} 0, & r=2k+1,\\ (-1)^k p_{2k}^2, & r=2k.\end{cases}$$

Далее введём на множестве $\widehat{W}^{2,2n}(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u,v] = \left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, v\right). \tag{17}$$

Формула (17) при $p_0\neq 0$ корректно определяет скалярное произведение в силу построения оператора $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$, симметричность следует из равенства (13), положительная определённость — из (14).

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$\|w\|_2^2 \leqslant \sigma_l \|w\|^2_{L_1^{2n}},$$

где $\|w\|_2^2 = (w,w)$, $\|w\|^2_{L_1^{2n}} = [w,w]$, $\sigma_l = 1/(L_1^{2n}(1/l))$.

Доказательство. В силу формулы Ньютона–Лейбница, свойств интеграла и неравенства треугольника имеем

$$|w(x,t)| - |w(0,t)| \leqslant |w(x,t) - w(0,t)| = \left|\int\limits_0^x \frac{\partial w}{\partial x} dx\right| \leqslant \int\limits_0^x \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| dx. \tag{18}$$

После возведения в квадрат получаем соотношения

$$|w|^2 \leqslant \left(\int\limits_0^l \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| dx\right)^2 + 2|w(x,t)|\,|w(0,t)| \leqslant \left(\int\limits_0^l \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| dx\right)^2 + 2|w(0,t)| \max_{x\in[0,l]} |w(x,t)|,$$

и, применив неравенство Гёльдера,

$$|w|^2 \leqslant l C_w \int\limits_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{19}$$

где

$$C_w = 1 + 2|w(0,t)| \max_{x\in[0,l]} |w(x,t)| \bigg/ \left(l \int\limits_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right).$$

С помощью леммы 1 и неравенства (19) оценим слагаемые в выражении нормы, порождённой оператором L_1^{2n}:

$$\|w\|^2_{L_1^{2n}} = \left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w, w\right) = \int\limits_0^l \sum_{k=0}^n p_{2k}^2 \left(\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right)^2 dx. \tag{20}$$

Заметим, что неравенство (19) можно применять для производных, тогда получим

$$\left|\frac{\partial^s w}{\partial x^s}\right|^2 \leqslant l C_{\frac{\partial^s w}{\partial x^s}} \int\limits_0^l \left(\frac{\partial^{s+1} w}{\partial x^{s+1}}\right)^2 dx,$$

откуда следует, что для любых $s \in \{0,1,\ldots,2n-1\}$ выполняется оценка

$$\left\|\frac{\partial^s w}{\partial x^s}\right\|_2^2 \leqslant l^2 C_{\frac{\partial^s w}{\partial x^s}} \left\|\frac{\partial^{s+1} w}{\partial x^{s+1}}\right\|_2^2. \tag{21}$$

Поменяем в (20) порядок интегрирования и суммирования и применим неравенство (21):

$$\|w\|^2_{L_1^{2n}} = \sum_{k=0}^n p_{2k}^2 \int\limits_0^l \left(\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right)^2 dx = \sum_{k=0}^n p_{2k}^2 \left\|\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right\|_2^2 \geqslant \|w\|_2^2 \sum_{k=0}^n \frac{p_{2k}^2}{l^{2k}} \left(\prod_{s=0}^k C_{\frac{\partial^s w}{\partial x^s}}\right)^{-1}.$$

Так как $\min\limits_{s\in\{0,1,\ldots,n\}} C_{\frac{\partial^s w}{\partial x^s}} = 1$, то окончательно получим

$$\|w\|^2_{L_1^{2n}} \geqslant L_1^{2n}\left(\frac{1}{l}\right) \|w\|_2^2.$$

Полагая $\sigma_l = 1/(L_1^{2n}(1/l))$, завершаем доказательство леммы 2.

2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим уравнение (1) с краевыми условиями (2) и начальными условиями (3). Мы можем выбрать функцию $F(x,t)$ — правую часть уравнения (1). Пусть множество

$$\Phi := \left\{ F(x,t) : \int_0^T \int_0^l F^2(x,t)\,dx\,dt < +\infty \right\}.$$

Наша цель — определить функцию $f \in \Phi$, которая доставляет минимум функционалу

$$J(f) = \|u(x,T,f) - y_0(x)\|_2^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x) \right\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^l \int_0^T f^2(x,t)\,dtdx, \tag{22}$$

где $y_0(x)$, $y_1(x)$ — заданные функции; ε, T — заданные положительные числа. Такой вид функционала рассматривается в работах [6, 10]. Другими словами, необходимо определить функцию f такую, что к заданному моменту времени T решение задачи (1)–(3) приблизится к функции $y_0(x)$, а производная решения по t — к $y_1(x)$. Заметим, что если $y_0(x) \equiv 0$, $y_1(x) \equiv 0$, то задача состоит в гашении колебаний к заданному моменту времени.

Вместо (22) можно рассмотреть функционал

$$J_{L_1^{2n}}(f) = \|u(x,T,f) - y_0(x)\|_{L_1^{2n}}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x) \right\|_{L_1^{2n}}^2 + C_\varepsilon \int_0^l \int_0^T f^2(x,t)\,dtdx, \tag{23}$$

где $C_\varepsilon = 1/(\sigma_l \varepsilon^2)$.

Теорема 1 (об оценке функционала). *Имеет место неравенство*

$$J(f) \leqslant \sigma_l J_{L_1^{2n}}(f).$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 2 для первого и второго слагаемых в (22). Тогда, очевидно, получим

$$J(f) \leqslant \sigma_l \left(\|u(x,T,f) - y_0(x)\|_{L_1^{2n}}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x) \right\|_{L_1^{2n}}^2 + \frac{1}{\sigma_l \varepsilon^2} \int_0^l \int_0^T f^2(x,t)\,dtdx \right).$$

Положив $C_\varepsilon = 1/(\sigma_l \varepsilon^2)$, завершим доказательство теоремы.

Отметим, что если $J_{L_1^{2n}}(f_m) \to 0$ при $m \to \infty$, то в силу неравенства из теоремы 1 получим $J(f_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Далее, если определим минимизирующую последовательность функций $f_m \in \Phi$ такую, что $\lim_{m\to\infty} J_{L_1^{2n}}(f_m) = J_{L_1^{2n}}(f^*)$ (здесь $f^* \in \Phi$ — функция, доставляющая минимум функционалу (23)), то будет найден не оптимальный, а квазиоптимальный режим.

Перепишем формулу (23) в более удобном виде:

$$J_{L_1^{2n}}(f) = \big(u(x,T,f) - y_0(x), u(x,T,f) - y_0(x)\big) +$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x) \right) + C_\varepsilon(f,f).$$

Следующим стандартным шагом для получения необходимых условий оптимальности является вычисление вариации функционала $J_{L_1^{2n}}(f)$. Определим её как

$$\delta J_{L_1^{2n}} = J_{L_1^{2n}}(f+h) - J_{L_1^{2n}}(f),$$

где $h(x,t) \in \Phi$.

Получим выражение для вариации функционала:

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \big(u(x,T,f+h)-y_0(x), u(x,T,f+h)-y_0(x)\big)+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)-y_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)-y_1(x)\right)+C_\varepsilon(f+h,f+h)-$$

$$-\big(u(x,T,f)-y_0(x), u(x,T,f)-y_0(x)\big)-\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)-y_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)-y_1(x)\right)-C_\varepsilon(f,f)=$$

$$=\big(u(x,T,f+h)+u(x,T,f), u(x,T,f+h)-u(x,T,f)\big)+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)+\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f), \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)\right)-$$

$$-2\left(\big(u(x,T,f+h)-u(x,T,f), y_0(x)\big)+\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f), y_1(x)\right)\right)+$$

$$+C_\varepsilon\int\limits_0^l\int\limits_0^T\big(2f(x,t)h(x,t)+h^2(x,t)\big)\,dtdx.$$

Пусть теперь $\delta u(x,t)=u(x,t,f+h)-u(x,t,f)$. Эта функция удовлетворяет исходному уравнению (1) с правой частью $F(x,t)=h(x,t)$, а именно

$$L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta u)+L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)+L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\delta u)=h(x,t), \tag{24}$$

краевым условиям (2) и нулевым начальным условиям

$$\delta u\big|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{25}$$

Тогда

$$\delta J_{L_1^{2n}}=(\delta u+2u(x,T,f),\delta u)+\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)-$$

$$-2\left((\delta u, y_0(x))+\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, y_1(x)\right)\right)+C_\varepsilon\int\limits_0^l\int\limits_0^T\big(2f(x,t)h(x,t)+h^2(x,t)\big)\,dt\,dx,$$

$$\delta J_{L_1^{2n}}=2\left(\big(u(x,T,f)-y_0(x),\delta u\big)+\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)-y_1(x), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)+C_\varepsilon(f,h)\right)+R_h, \tag{26}$$

где

$$R_h=(\delta u,\delta u)+\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)+C_\varepsilon(h,h). \tag{27}$$

Далее определим сопряжённую функцию $\psi(x,t)$, которая является решением краевой задачи для сопряжённого уравнения. Начальные условия для сопряжённой функции определяются условиями

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=T}=-2\big(u(x,T,f)-y_0(x)\big), \quad \psi\big|_{t=T}=2\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)-y_1(x)\right). \tag{28}$$

С учётом условий (28) выражение для вариации (26) можно записать как

$$\delta J_{L_1^{2n}}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,T),\delta u\right)+\left(\psi(x,T), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)+2C_\varepsilon(f,h)+R_h. \tag{29}$$

Запишем дифференциальное уравнение для $\psi(x,t)$. Из (29) временно отбросим величину R_h, тогда, изменив порядок дифференцирования под знаком интеграла и использовав симметричность оператора L_1^{2n}, получим

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int_0^l \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,T)(\delta u) + L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,T)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} + 2C_\varepsilon\int_0^T f(x,t)h(x,t)\,dt\biggr)dx =$$

$$= \int_0^l \biggl(-\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,t)\Bigr)\Bigr|_{t=T}(\delta u) + L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,T)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} + 2C_\varepsilon\int_0^T f(x,t)h(x,t)\,dt\biggr)dx =$$

$$= \int_0^l \biggl(\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\Bigl(-\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,t)\Bigr)(\delta u) + L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,t)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\Bigr)dt + 2C_\varepsilon\int_0^T f(x,t)h(x,t)\,dt\biggr)dx =$$

$$= \int_0^l\int_0^T \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)(\delta u) + L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta u) + 2C_\varepsilon f(x,t)h(x,t)\biggr)dt\,dx.$$

Учитывая симметричность оператора $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$ (см. (13)), преобразуем последний интеграл:

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int_0^l\int_0^T \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)(\delta u) + \psi(x,t)\cdot L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta u) + 2C_\varepsilon f(x,t)h(x,t)\biggr)dt\,dx,$$

выражая из (24) слагаемое $L_1^{2n}(\partial/\partial x)(\partial^2(\delta u)/\partial t^2)$, получаем

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int_0^l\int_0^T \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)\cdot\delta u +$$
$$+\psi(x,t)\Bigl(h(x,t) - L_2^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} - L_3^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)(\delta u)\Bigr) + 2C_\varepsilon f(x,t)h(x,t)\biggr)\,dt\,dx.$$

Здесь после раскрытия скобок и группировки слагаемых с сомножителем $h(x,t)$ окончательно будем иметь

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int_0^l\int_0^T \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(\delta u) - \psi L_2^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} - \psi L_3^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)(\delta u) + \Bigl(\psi + 2C_\varepsilon f\Bigr)h\biggr)dt\,dx. \quad (30)$$

В формуле (30) для краткости не указываем аргументы (x,t).

Определим далее сопряжённое уравнение

$$\delta u\biggl(L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + L_3^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi\biggr) + \psi L_2^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} = 0. \quad (31)$$

Тогда из (30) с учётом (31) получаем окончательное выражение для вариации:

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int_0^l\int_0^T (\psi(x,t) + 2C_\varepsilon f(x,t))\,h(x,t)\,dt\,dx + R_h. \quad (32)$$

Формула (32) даёт представление приращения функционала (23), которое линейно относительно приращения управления $h(x,t)$. Если докажем, что R_h имеет более высокий порядок малости относительно приращения $h(x,t)$, то формула (32) даст явное выражение градиента функционала, что позволит использовать его для построения градиентных методов минимизации. Далее сформулируем вспомогательное утверждение.

Теорема 2 (энергетическое тождество). *Пусть $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$, $L_3^{2n}(\partial/\partial x)$ — дифференциальные операторы, которые имеют вид*

$$L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_{1,2k}^2\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},\quad L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_{3,2k}^2\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

а оператор $L_2^{2n}(\partial/\partial x)$ — оператор общего вида. Определим величину

$$E(\tau)=\frac{1}{2}\left[\int_0^l\sum_{k=0}^{n}\left(p_{1,2k}^2\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k\partial t}\right)^2+p_{3,2k}^2\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2\right)dx\right]\Bigg|_{t=\tau}, \tag{33}$$

где $u(x,t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и начальным условиям (3). Тогда для любого $\tau>0$ имеет место тождество

$$E(\tau)-E(0)+\int_0^l\int_0^\tau\left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx=\int_0^l\int_0^\tau F(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx. \tag{34}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1) на $\partial u/\partial t$ и проинтегрируем по области $\Omega(\tau)$, а после использования леммы 1 немедленно получим утверждение теоремы.

Установленную теорему 2 можно применять для доказательства единственности решения краевых задач.

Следствие (единственность решения). *Пусть существует решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи (1)–(3) и выполняется равенство*

$$\int_0^l\int_0^\tau\left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx=0.$$

Тогда это решение единственно.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$, $w(x,t)$ — различные (несовпадающие) решения начально-краевой задачи. Рассмотрим функцию $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$. Она является решением задачи (1), (2) при $F(x,t)=0$ и при нулевых начальных условиях (3). По теореме 2 для функции $v(x,t)$ имеем $E(\tau)-E(0)=0$ и $E(\tau)=0$. Тогда в силу (34) получаем $v(x,t)\equiv 0$, откуда $u(x,t)=w(x,t)$.

Теорема 3 (оценка остатка R_h). *Пусть*

$$\left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial t},\frac{\partial\delta u}{\partial t}\right)\geqslant 0$$

и выполнены условия теоремы 2. Тогда для величины R_h из (27) имеет место оценка

$$R_h=O\left(\int_0^l\int_0^T h^2(x,t)\,dtdx\right).$$

Доказательство. Рассмотрим первое и второе слагаемые в (27). Раскрыв скалярное произведение, с учётом леммы 1 будем иметь

$$\left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial t},\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right]=\int_0^l\int_0^T\left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\,dt\,dx.$$

Следующим шагом уравнение (24) скалярно умножим на $\partial(\delta u)/\partial t$:

$$\left[\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial t^2}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right] + \left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) + \left(L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\delta u), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) = \left(h(x,t), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right).$$

Применив теорему 2 для функции δu, будем иметь $E(0)=0$, и тогда из (34) получим

$$E(\tau) + \left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) = \int_0^\tau \int_0^l h(x,t)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\,dx\,dt. \tag{35}$$

С помощью (33) оценим левую часть (35):

$$E(\tau) + \left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) \geqslant \left[\int_0^l \sum_{k=0}^n \frac{p_{1,2k}^2}{2}\left(\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 dx\right]\Bigg|_{t=\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right).$$

Теперь возьмём $\varepsilon>0$ и оценим в (35) правую часть, используя лемму 2:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) \leqslant \int_0^\tau \int_0^l h(x,t)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\tau \int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\tau \int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt + \frac{\varepsilon\sigma_l}{2}\int_0^\tau \left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)dt.$$

Далее, умножив на 2 и положив $\varepsilon=1/\sigma_l$, получим неравенство

$$\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) \leqslant \sigma_l \int_0^\tau \int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt + \int_0^\tau \left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)dt,$$

к которому применим неравенство Гронуолла:

$$\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) \leqslant e^T \sigma_l \int_0^T \int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt. \tag{36}$$

Выполним заключительную выкладку и будем иметь

$$(\delta u, \delta u) = \int_0^T \int_0^l \sum_{k=0}^n p_{1,2k}^2 \left(\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 dx\,dt.$$

Для $(\partial^k(\delta u)/\partial x^k)^2$ воспользуемся оценкой (19), но только через производную по t:

$$\left(\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 \leqslant C_k \int_0^\tau \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 dt,$$

и получим неравенство

$$(\delta u, \delta u) \leqslant T \max_k C_k \int_0^T \int_0^l \sum_{k=0}^n p_{1,2k}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 dx\,dt \leqslant \theta \int_0^T \int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt, \tag{37}$$

где $\theta = Te^T\sigma_l \max_k C_k$. Подставив в формулу (27) оценки (36) и (37), получим утверждение теоремы.

Теперь применим полученные результаты и выпишем градиенты и сопряжённые смешанные задачи для некоторых рассмотренных ранее примеров. Задачи в примерах 1–7 являются однородными, поэтому имеет место равенство

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int_0^l \int_0^\tau \psi(x,t) h(x,t)\, dt\, dx,$$

где $\psi(x,t)$ — решение сопряжённой начально-краевой задачи.

Для примеров 1–3 в силу формулы (31) уравнение для сопряжённой функции совпадет с исходным уравнением, краевые условия также совпадут, а начальные условия будут определяться формулами (28). Отметим, что данные факты согласуются с известными результатами [6].

Для примеров 5, 6 ситуация иная: краевые и начальные условия не меняются, но сопряжённое уравнение изменит свой вид. Отметим, что задачи управления колебаниями движущихся материалов рассматривались в работах разных исследователей, например, можно обратить внимание на обзор [11]. Для уравнения колебаний движущейся струны (4) имеем

$$\delta u \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \left(v_0^2 - c^2\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + 2v_0 \psi \frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial x \partial t} = 0,$$

здесь функция $\delta u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям (25) и уравнению (31):

$$\frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial x \partial t} + (v_0^2 - c^2) \frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial x^2} = h(x,t).$$

Для уравнения колебаний движущегося полотна (5) имеем

$$\delta u \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + (v_0^2 - c^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{D}{m} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right) + 2v_0 \psi \frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial x \partial t} = 0,$$

здесь функция $\delta u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям (25) и уравнению (31):

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} + \left(v_0^2 - c^2\right) \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{D}{m} \frac{\partial^4 \delta u}{\partial x^4} = h(x,t).$$

Замечание. Для уравнения колебаний движущегося вязкоупругого полотна (6) полученные результаты неприменимы, так как оператор $L_3^{2n}(\partial/\partial x)$ для этого уравнения не является симметричным.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hyperbolic models arising in the theory of longitudinal vibration of elastic bars / I. Fedotov, J. Marais, M. Shatalovand, H.M. Tenkam // The Australian J. of Math. Anal. and Appl. — 2011. — V. 7, № 2. — P. 1–18.
2. Abdulazeez, S.T. Solutions of fractional order pseudo-hyperbolic telegraph partial differential equations using finite difference method / S.T. Abdulazeez, M. Modanli // Alexandria Engineering J. — 2022. — V. 61, № 12. — P. 12443–12451.
3. Abdulazeez, S.T. Numerical scheme methods for solving nonlinear pseudo-hyperbolic partial differential equations / S.T. Abdulazeez, M. Modanli, A.M. Husien // J. of Appl. Math. and Comput. Mech. — 2022. — V. 4, № 21. — P. 5–15.

4. Zhao, Z. A continuous Galerkin method for pseudo-hyperbolic equations with variable coefficients / Z. Zhao, H. Li // J. of Math. Anal. and Appl. — 2019. — V. 473, № 2. — P. 1053–1072.
5. Эванс, Л.К. Уравнения с частными производными / Л.К. Эванс ; пер. с англ. — Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. — 560 с.
6. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации : учебное пособие / Ф.П. Васильев. — М. : МЦНМО, 2011. — 434 с.
7. Рудаков, И.А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами / И.А. Рудаков // Вестн. МГТУ имени Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2019. — № 3. — С. 4–21.
8. Керефов, М.А. Численно-аналитический метод решения краевой задачи для обобщённых уравнений влагопереноса / М.А. Керефов, С.Х. Геккиева // Вестн. Удмуртского ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2021. — Т. 31, № 1. — С. 19–34.
9. Mechanics of Moving Materials / Banichuk N., Jeronen J., Neittaanäki P. [et al.]. — Springer, 2014.
10. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М. : URSS, 2020. — 784 с.
11. Hong, K.-S. Control of axially moving systems / K.-S. Hong, P.-T. Pham // A Review. Int. J. Control Autom. Syst. — 2019. — V. 17. — P. 2983–3008.

GRADIENT IN THE PROBLEM OF CONTROLLING PROCESSES DESCRIBED BY LINEAR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS

A. M. Romanenkov

Moscow Avaition Institute, Moscow, Russia
Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, Moscow, Russia
e-mail: romanaleks@gmail.com

The paper considers the problem of controlling processes, the mathematical model of which is an initial-boundary value problem for a pseudohyperbolic linear differential equation of high order in the spatial variable and second order in the time variable. The pseudohyperbolic equation is a generalization of the ordinary hyperbolic equation, which is typical in vibration theory. As examples, models of vibrations of moving elastic materials were considered. For model problems, an energy identity is established, and conditions for the uniqueness of a solution are formulated. As an optimization problem, we considered the problem of controlling the right side in order to minimize the quadratic integral functional, which evaluates the proximity of the solution to the objective function. From the original functional a transition was made to the majorant functional, for which the corresponding upper bound was established. An explicit expression for the gradient of this functional is obtained, and conjugate initial-boundary value problems are derived.

Keywords: pseudohyperbolic equation, gradient, optimal control.

REFERENCES

1. Hyperbolic models arising in the theory of longitudinal vibration of elastic bars / I. Fedotov, J. Marais, M. Shatalovand, H.M. Tenkam // The Australian J. of Math. Anal. and Appl. — 2011. — V. 7, № 2. — P. 1–18.
2. Abdulazeez, S.T. Solutions of fractional order pseudo-hyperbolic telegraph partial differential equations using finite difference method / S.T. Abdulazeez, M. Modanli // Alexandria Engineering J. — 2022. — V. 61, № 12. — P. 12443–12451.
3. Abdulazeez, S.T. Numerical scheme methods for solving nonlinear pseudo-hyperbolic partial differential equations / S.T. Abdulazeez, M. Modanli, A.M. Husien // J. of Appl. Math. and Comput. Mech. — 2022. — V. 4, № 21. — P. 5–15.
4. Zhao, Z. A continuous Galerkin method for pseudo-hyperbolic equations with variable coefficients / Z. Zhao, H. Li // J. of Math. Anal. and Appl. — 2019. — V. 473, № 2. — P. 1053–1072.
5. Evans, L.C. Partial Differential Equations / L.C. Evans. — Berkeley : American Mathematical Society, 2010.
6. Vasil'ev, F.P. Optimization Methods : a textbook / F.P. Vasil'ev. Moscow : MCCME, 2011. — 434 p. [in Russian]

7. Rudakov, I.A. Oscillation problem for an I-beam with fixed and hinged end supports / I.A. Rudakov // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. — 2019. — № 3. — P. 4–21. [in Russian]
8. Kerefov, M.A. Numerical-analytical method for solving boundary value problem for the generalized moisture transport equation / M.A. Kerefov, S.H. Gekkieva // Vestn. Udmurtskogo un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki. — 2021. — V. 31, № 2. — P. 19–34. [in Russian]
9. Mechanics of Moving Materials / Banichuk N., Jeronen J., Neittaanäki P. [et al.]. — Springer, 2014.
10. Samarskij, A.A. Vychislitel'naya teploperedacha / A.A. Samarskij, P.N. Vabishchevich. Moscow : URSS, 2020. — 784 p.
11. Hong, K.-S. Control of axially moving systems / K.-S. Hong, P.-T. Pham // A Review. Int. J. Control Autom. Syst. — 2019. — V. 17. — P. 2983–3008.