ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 211–223

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.21

О РАЗРЕШИМОСТИ НА СПЕКТРЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА ТРЁХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

А. А. Каширин[1], С. И. Смагин[2]

Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН, Хабаровск

e-mail: [1]elomer@mail.ru, [2]smagin@ccfebras.ru

Поступила в редакцию 27.10.2023 г., после доработки 25.12.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Рассмотрены два слабо сингулярных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода, к каждому из них может быть сведена стационарная трёхмерная задача дифракции акустических волн. Свойства этих уравнений изучены на спектрах, на которых они являются некорректными. Для одного уравнения показано, что если его решение на спектре существует, то оно позволяет получать решение задачи дифракции. Второе уравнение в этом случае всегда имеет бесконечно много решений, но только одно даёт решение задачи дифракции. Обсуждается метод интерполяции для отыскания приближённых решений рассматриваемых интегральных уравнений и задачи дифракции.

Ключевые слова: задача дифракции, волновое число, интегральное уравнение, собственное значение, приближённое решение.

DOI: 10.31857/S0374064124020054, EDN: QMJVAD

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются два различных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода со слабыми особенностями в ядрах. Каждое уравнение условно эквивалентно задаче дифракции гармонических по времени акустических волн на локальном трёхмерном включении (задаче трансмиссии для уравнения Гельмгольца) [1, 2]. Они получаются с применением к исходной задаче дифракции в неограниченной области непрямого метода сведения к граничным интегральным уравнениям [3, 4]. В соответствии с этим методом в качестве неизвестных функций выбираются плотности вспомогательных источников волнового поля, распределённые по компактной границе включения. В прямом методе искомыми функциями являются граничные значения волнового поля и его нормальные производные [3, 5].

Оба упомянутых метода позволяют сводить исходную задачу дифракции к полностью эквивалентным ей системам двух интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями на границе включения [6]. Одна из таких систем использовалась, например, для численного решения задачи дифракции в работе [7].

Важным достоинством непрямого метода получения интегральных уравнений является возможность сформулировать задачи дифракции в виде граничных интегральных уравнений с одной неизвестной плотностью. Такие уравнения имеют определённые преимущества при численном исследовании задач дифракции перед другими интегральными формулировками, поскольку требуют меньше вычислительных ресурсов для численного решения [8].

Однако рассматриваемые интегральные уравнения некорректны на счётном множестве собственных значений, связанных с собственными частотами (значениями) внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца [3, 4]. В этих случаях, в силу теории Фредгольма, интегральные уравнения либо не имеют решений, либо имеют бесконечно много решений [9, с. 220]. Для областей сложной формы собственные значения заранее неизвестны, а их поиск является весьма трудоёмкой задачей [10, 11]. Поэтому для получения достоверных результатов необходимо исследовать свойства упомянутых интегральных уравнений на спектрах и учитывать эти свойства при их численном решении.

Отметим, что методы исследования и численного решения граничных интегральных уравнений на спектрах активно развиваются с 1960-х годов. Однако большая их часть позволяет решить относительно простые краевые задачи, характерные для рассеяния на непроницаемых препятствиях [12–16]. На рассматриваемые нами интегральные уравнения эти методы непосредственно не переносятся.

Первое из упомянутых выше уравнений разрешимо на спектре только тогда, когда его правая часть ортогональна нетривиальным решениям сопряжённого однородного уравнения. Если это условие выполнено, то интегральное уравнение имеет бесконечно много решений, и любое из них, подставленное в интегральные представления решения задачи дифракции, даёт решение этой задачи. Задача дифракции на основе такого уравнения численно решена в работе [17]. Поскольку для рассматриваемой задачи интегральное уравнение на спектре не имеет решения, численно решалась задача дифракции с “близкими” волновыми числами, где интегральное уравнение корректно разрешимо. Затем приближённое решение на соответствующей собственной частоте находилось с помощью интерполяции.

Решение второго интегрального уравнения на собственных частотах всегда существует, но не является единственным. При этом только одно решение этого уравнения позволяет получить решение задачи дифракции. Оно может быть приближённо найдено, например, интерполяцией решений корректно разрешимых интегральных уравнений с “близкими” к собственным значениям волновыми числами [17]. Ранее такой подход применялся для численного решения трёхмерных краевых задач для уравнения Гельмгольца [18, 19].

Следует заметить, что рассмотренные нами уравнения могут быть получены из уравнений (5.6) и (6.8) работы [3] при значениях параметров $a=1$, $b=0$. Такой выбор параметров приводит к интегральным уравнениям с более простыми и удобными для аппроксимации и численного решения интегральными операторами. Они равносильны исходным задачам дифракции и корректно разрешимы почти для всех имеющих физический смысл значений волновых чисел на комплексной плоскости. Исключение составляет упомянутое выше счётное множество вещественных чисел, связанных с собственными значениями внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца. В таких случаях можно воспользоваться методикой работ [17–19]. Другие подходы к численному решению интегральных уравнений задачи дифракции на собственных значениях предложены в статьях [20–22].

1. ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ И УСЛОВНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЕЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ

Рассмотрим трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с ортогональной системой координат $Ox_1x_2x_3$, заполненное однородной изотропной средой с плотностью ρ_e, скоростью распространения акустических колебаний c_e и коэффициентом поглощения γ_e, в котором имеется ограниченное произвольной замкнутой поверхностью Γ однородное изотропное включение с плотностью ρ_i, скоростью звука c_i и коэффициентом поглощения γ_i. Области $\mathbb{R}^3$, занятые включением и вмещающей средой, обозначим через Ω_i и Ω_e $(\Omega_e=\mathbb{R}^3\backslash\bar{\Omega}_i)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что граница $\Gamma\in C^2$ и граничные функции достаточно гладкие.

Пусть в области Ω_e имеются гармонические источники звука, возбуждающие во вмещающей среде исходное волновое поле давлений с комплексной амплитудой u_0. Звуковые волны распространяются в пространстве и, достигая включения, рассеиваются на нём. В результате в области Ω_e возникают отражённые волны, а в области Ω_i появляются проходящие волны. Поэтому комплексную амплитуду полного поля давлений u можно представить в виде

$$u = \begin{cases} u_i, & x \in \Omega_i, \\ u_e + u_0, & x \in \Omega_e, \end{cases}$$

где u_i, u_e — комплексные амплитуды проходящего и отражённого волновых полей.

Задача дифракции. Найти две комплекснозначные функции $u_{i(e)} \in C^2(\Omega_{i(e)}) \cap C^1(\bar{\Omega}_{i(e)})$, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u_{i(e)} + k_{i(e)}^2 u_{i(e)} = 0, \quad x \in \Omega_{i(e)}, \tag{1}$$

условиям сопряжения

$$u_i^- - u_e^+ = f_0, \quad p_i (N_x u_i)^- - p_e (N_x u_e)^+ = p_e f_1, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

а также условию излучения Зоммерфельда равномерно по всем направлениям $x/|x|$

$$\frac{\partial u_e}{\partial |x|} - i k_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty. \tag{3}$$

Здесь $f_0 \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $f_1 \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, — известные функции, $f_0 = u_0^+$, $f_1 = (N_x u_0)^+$, "$-$" и "$+$" обозначают предельные значения соответствующих выражений, когда $x \to \Gamma$ из Ω_i и из Ω_e, $N_x \equiv \partial/\partial n_x$, n_x — нормаль к границе Γ в точке x, направленная в область Ω_e,

$$p_{i(e)} = (\rho_{i(e)} \omega (\omega + i \gamma_{i(e)}))^{-1}, \quad k_{i(e)}^2 = \omega(\omega + i\gamma_{i(e)})/c_{i(e)}^2, \quad \operatorname{Im}(k_{i(e)}) \geqslant 0,$$

ω — круговая частота колебаний, $k_{i(e)}$ — волновые числа, $c_{i(e)} > 0$, $\rho_{i(e)} > 0$, $\gamma_{i(e)} \geqslant 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1 [2, с. 114]. *Задача дифракции имеет единственное решение.*

Введём обозначения

$$(A_{i(e)}\phi)(x) \equiv \int\limits_\Gamma G_{i(e)}(x,y)\phi(y)\, d\Gamma_y, \quad G_{i(e)}(x,y) = \frac{\exp\{ik_{i(e)}|x-y|\}}{4\pi|x-y|},$$

$$(B_{i(e)}\phi)(x) \equiv \int\limits_\Gamma N_y G_{i(e)}(x,y)\phi(y)\, d\Gamma_y, \quad (B^*_{i(e)}\phi)(x) \equiv \int\limits_\Gamma N_x G_{i(e)}(x,y)\phi(y)\, d\Gamma_y$$

и рассмотрим потенциалы

$$u_e(x) = (A_e\phi)(x), \quad x \in \Omega_e, \tag{4}$$
$$u_i(x) = p_{ei}(A_i((Nu_e)^+ + f_1))(x) - (B_i(u_e^+ + f_0))(x), \quad x \in \Omega_i.$$

Здесь ϕ — неизвестная плотность, $p_{ei} = p_e/p_i$.

Ядрами потенциалов (4) являются фундаментальные решения уравнений Гельмгольца в областях Ω_i и Ω_e и их нормальные производные, поэтому они удовлетворяют уравнениям (1) и условию излучения на бесконечности (3). Кроме того, если ω не является собственной частотой внутренней задачи Дирихле, выполнение для потенциалов (4) первого из условий сопряжения (2) автоматически влечёт за собой выполнение второго условия сопряжения. Подставив их в первое условие сопряжения, получим эквивалентное задаче дифракции слабо сингулярное граничное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$(C\phi)(x) = f_2(x), \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

где

$$(C\phi)(x) \equiv \big((0.5(A_e + p_{ei}A_i) + B_iA_e - p_{ei}A_iB_e^*)\phi\big)(x),$$

$$f_2(x) = -0.5f_0(x) + p_{ei}(A_if_1)(x) - (B_if_0)(x).$$

Справедливо следующее утверждение [4, с. 63–65; 23].

Теорема 2. *Пусть* $f_0 \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $f_1 \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, $\gamma_e > 0$ *или* ω *не является собственной частотой внутренней задачи Дирихле*

$$\Delta v + k_e^2 v = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad v^- = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{6}$$

Тогда интегральное уравнение (5) корректно разрешимо в классе плотностей $\phi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, *и формулы (4) дают решение задачи дифракции.*

Мы можем получить для задачи дифракции ещё одно интегральное уравнение Фредгольма первого рода со слабой особенностью в ядре. Будем искать её решение в виде

$$u_i(x) = (A_i\psi)(x), \quad x \in \Omega_i, \tag{7}$$

$$u_e(x) = (A_e(f_1 - p_{ie}(Nu_i)^-))(x) - (B_e(f_0 - u_i^-))(x), \quad x \in \Omega_e, \tag{8}$$

где $p_{ie} = p_i/p_e$. В этом случае задача сводится к интегральному уравнению

$$(D\psi)(x) = f_0(x), \quad x \in \Gamma, \tag{9}$$

$$(D\psi)(x) \equiv ((0.5\,(A_i + p_{ie}A_e) + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\,\psi)\,(x)$$

и имеет место

Теорема 3 [4, с. 65]. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда интегральное уравнение (9) корректно разрешимо в классе плотностей* $\psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, *и формулы (7), (8) дают решение задачи дифракции.*

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА СПЕКТРАХ

Пусть теперь ω — собственная частота задачи (6) кратности m, $m \geqslant 1$ (или, другими словами, k_e^2 — собственное значение задачи (6)). В этом случае из [3, теорема 5.2; 4, лемма 2.3.1] следует, что уравнение

$$(A_e\phi)(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

имеет линейно независимые нетривиальные решения ϕ_s. Они связаны с нетривиальными решениями v_s задачи (6) равенствами

$$\phi_s = (Nv_s)^-, \quad s = \overline{1, m}, \quad x \in \Gamma. \tag{10}$$

Кроме того, ϕ_s являются решениями однородного уравнения (5), и любое нетривиальное решение этого уравнения можно представить в виде

$$\phi_0 = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s\phi_s, \tag{11}$$

где α_s — произвольные комплексные числа.

Введём обозначение

$$\langle\varphi,\psi\rangle\equiv\int_\Gamma \varphi\psi\,d\Gamma.$$

Нам понадобится

Лемма. *Для операторов* C: $C(\Gamma)\to C(\Gamma)$ *и* D: $C(\Gamma)\to C(\Gamma)$ *и произвольных* $\varphi,\psi\in C(\Gamma)$ *справедливо равенство*

$$\langle p_iC\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,p_eD\psi\rangle,$$

т.е. операторы p_iC *и* p_eD *являются сопряжёнными.*

Доказательство. В работе [2, § 2.7] показано, что интегральные операторы $A_{i(e)}$: $C(\Gamma)\to\to C(\Gamma)$ являются самосопряжёнными, а интегральные операторы $B_{i(e)}$: $C(\Gamma)\to C(\Gamma)$ и $B^*_{i(e)}$: $C(\Gamma)\to C(\Gamma)$ — сопряжёнными. Это означает, что для всех $\varphi,\psi\in C(\Gamma)$

$$\langle A_{i(e)}\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,A_{i(e)}\psi\rangle,\quad \langle B_{i(e)}\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,B^*_{i(e)}\psi\rangle.$$

Таким образом, для всех $\varphi,\psi\in C(\Gamma)$ имеют место равенства

$$\langle B_iA_e\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,A_eB_i^*\psi\rangle,\quad \langle A_iB_e^*\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,B_eA_i\psi\rangle,$$

и, следовательно, $\langle p_iC\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,p_eD\psi\rangle$. Лемма доказана.

В силу фредгольмовости операторов C и D [3, с. 319, 322; 4, теоремы 2.2.2, 2.2.3] из леммы непосредственно вытекает

Следствие [9, с. 220]. *Количество линейно независимых нетривиальных решений однородных уравнений (5) и (9) совпадает и равно* m.

Выберем базис $\psi_1,\ldots,\psi_m\in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ в пространстве нулей оператора D: $C^{0,\alpha}(\Gamma)\to C^{1,\alpha}(\Gamma)$. Тогда существуют элементы $a_1,\ldots,a_m\in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ и $b_1,\ldots,b_m\in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ такие, что [9, с. 221]

$$\langle\phi_j,a_l\rangle=\delta_{jl},\quad j,l=\overline{1,m},$$

$$\langle b_j,\psi_l\rangle=\delta_{jl},\quad j,l=\overline{1,m},$$

где δ_{jl} — символ Кронекера.

Покажем, что уравнение (9) разрешимо на всех собственных частотах задачи (6), хотя и неединственным образом.

Теорема 4. *Пусть* $f_0\in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $f_1\in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, *и* ω — *собственная частота задачи (6) кратности* m, $m\geqslant1$. *Тогда интегральное уравнение (9) разрешимо и его общее решение может быть представлено в виде*

$$\psi=\widetilde{\psi}+\psi_0,\quad \psi_0=\sum_{s=1}^m\alpha_s\psi_s, \tag{12}$$

где $\widetilde{\psi}$ — *произвольное частное решение этого уравнения,* α_s — *произвольные комплексные числа,* ψ_s — *линейно независимые решения однородного уравнения (9).*

Доказательство. По условию задачи источник волн находится в области Ω_e, поэтому u_0 удовлетворяет уравнению (6) в области Ω_i и $u_0^+=u_0^-=f_0$ на Γ.

Учитывая, что v_s — решения задачи (6), используя соотношения (10), (11) и вторую формулу Грина [2, с. 79], имеем

$$\langle f_0,\phi_0\rangle=\sum_{s=1}^m\alpha_s\langle u_0^-,(Nv_s)^-\rangle=\sum_{s=1}^m\alpha_s\biggl(\int\limits_{\Omega_i}(u_0\Delta v_s-v_s\Delta u_0)\,dx+\langle(Nu_0)^-,v_s^-\rangle\biggr)=$$

$$= -\sum_{s=1}^{m} \alpha_s \int\limits_{\Omega_i} (\Delta u_0 + k_e^2 u_0) v_s \, dx = 0.$$

Таким образом, решение уравнения (9) существует в силу второй теоремы Фредгольма [2, теорема 1.29; 9, с. 220].

По условию теоремы ω — собственная частота задачи (6) кратности m. В этом случае однородные уравнения (5) и (9) имеют m линейно независимых нетривиальных решений (см. следствие). Поэтому общее решение уравнения (9) можно представить в виде (12) [2, следствия 1.19, 1.20]. Теорема доказана.

Изучим теперь вопрос о возможности решения задачи дифракции на собственных частотах с использованием уравнения (9).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда существует единственное решение интегрального уравнения (9), при котором представления (7), (8) дают решение задачи дифракции.*

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что уравнение (9) разрешимо и его решение имеет вид (12). Пусть ψ — произвольное решение этого уравнения. Тогда для потенциалов (7), (8) справедливо равенство

$$u_i^- - u_e^+ = D\psi, \quad x \in \Gamma. \tag{13}$$

Следовательно, любое решение уравнения (9) обеспечивает выполнение первого условия сопряжения (2).

Проверим выполнение второго условия сопряжения. Для этого продолжим u_e формулой (8) в область Ω_i:

$$u_e = u_0 - (0.5 p_{ie} A_e + p_{ie} A_e B_i^* - B_e A_i)\,\psi, \quad x \in \Omega_i. \tag{14}$$

Функция (14) удовлетворяет уравнению (6) с граничным условием

$$u_e^- = f_0 - D\psi, \quad x \in \Gamma. \tag{15}$$

Используя свойства поверхностных потенциалов и их нормальных производных при переходе через границу Γ [2, следствие 2.20, теорема 2.23], имеем

$$p_i(Nu_i)^- - p_e(Nu_e)^+ = p_i(Nu_i)^- - p_e[Nu_e] - p_e(Nu_e)^- =$$
$$= p_i(Nu_i)^- + p_e f_1 - p_i(Nu_i)^- - p_e(Nu_e)^- = p_e f_1 - p_e(Nu_e)^-, \tag{16}$$

где $[u] \equiv u^+ - u^-$.

Отсюда получаем, что для проверки выполнения второго условия сопряжения достаточно, чтобы продолжение u_e формулой (14) было равно нулю всюду в Ω_i. Для проверки этого условия рассмотрим свойства решения в форме (12) более детально.

Из (12) и (15) следует, что u_e из (14) с плотностью $\psi = \psi_0 \neq 0$ удовлетворяет уравнению (6) с граничным условием $u_e^- = f_0$, $x \in \Gamma$. Учитывая это, покажем, что потенциалы с плотностями ψ_s в (14) линейно независимы. Предположим, что это не так. Тогда существуют ненулевые коэффициенты α_s, при которых $u_e = u_0$ в Ω_i. Следовательно, $(Nu_e)^- = (Nu_0)^- = f_1$. Отсюда и из (16) получаем, что выполняется однородное второе условие сопряжения (2). Первое однородное условие сопряжения (2) в этом случае также выполняется, что следует из определения ψ_0 и равенства (13). Таким образом, мы получили решение задачи дифракции при $f_0 = f_1 = 0$. Эта задача имеет только тривиальное решение [2, теорема 3.40], поэтому $u_i = 0$ в Ω_i.

Подставим теперь ψ_0 в формулу (7) и рассмотрим полученный потенциал во всём пространстве $\mathbb{R}^3$. Поскольку $A_i\psi_0 = u_i = 0$ всюду в Ω_i, то отсюда и из непрерывности этого потенциала как потенциала простого слоя при переходе через границу Γ [2, теорема 2.12] следует, что он является решением однородной внешней задачи Дирихле

$$\Delta u_i + k_i^2 u_i = 0, \quad x\in\Omega_e, \quad u_i^+ = 0, \quad x\in\Gamma,$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial |x|} - ik_i u_i = o(|x|^{-1}), \quad |x|\to\infty. \tag{17}$$

Эта задача также имеет только тривиальное решение [2, теорема 3.21], поэтому $A_i\psi_0 = u_i = 0$ всюду в Ω_e. Используя формулу для скачка нормальных производных потенциала простого слоя, получаем $\psi_0 = -[Nu_i] = 0$ на Γ. Отсюда и из линейной независимости ψ_s следует, что все коэффициенты α_s в (12) равны нулю. А это противоречит первоначальному предположению.

Введём обозначения

$$v_s \equiv (0.5p_{ie}A_e + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\,\psi_s, \quad x\in\Omega_i, \quad s=\overline{1,m}.$$

Функции $v_s\neq 0$ удовлетворяют уравнению (6) с граничными условиями $v_s^- = D\psi_s = 0$. Они являются линейно независимыми и образуют базис в m-мерном пространстве нетривиальных решений задачи (6).

Покажем теперь, что существует единственное решение уравнения (9), при котором формулы (7), (8) дают решение задачи дифракции. Для этого определим линейный конечномерный оператор $T: C^{0,\alpha}(\Gamma)\to C^{1,\alpha}(\Gamma)$ по формуле

$$T\psi \equiv \sum_{s=1}^{m}\langle b_s,\psi\rangle a_s.$$

Тогда, в силу леммы Шмидта [9, с. 221], оператор $D+T: C^{0,\alpha}(\Gamma)\to C^{1,\alpha}(\Gamma)$ непрерывно обратим и уравнение

$$((D+T)\psi)(x) = f_0(x), \quad x\in\Gamma,$$

имеет единственное решение $\psi=\widetilde{\psi}\in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ такое, что $\langle b_j,\widetilde{\psi}\rangle = 0$, $j=\overline{1,m}$, и $D\widetilde{\psi} = f_0$.

Подставим $\widetilde{\psi}$ в формулы (14) и (15). Тогда потенциал u_e в области Ω_i будет решением задачи (6). Эта задача имеет как тривиальное, так и m линейно независимых нетривиальных решений. Любое её решение можно единственным образом разложить по базису v_s. Поэтому существует единственный набор коэффициентов $\widetilde{\alpha}_s$, $s=\overline{1,m}$, для которого справедливо равенство

$$u_e = u_0 - (0.5p_{ie}A_e + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\,\widetilde{\psi} = \sum_{s=1}^{m}\widetilde{\alpha}_s v_s = \sum_{s=1}^{m}\widetilde{\alpha}_s\,(0.5p_{ie}A_e + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\,\psi_s, \quad x\in\Omega_i.$$

Подставив функцию

$$\psi = \widetilde{\psi} + \sum_{s=1}^{m}\widetilde{\alpha}_s\psi_s \tag{18}$$

в формулы (14), будем иметь

$$u_e = u_0 - (0.5p_{ie}A_e + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\left(\widetilde{\psi} + \sum_{s=1}^{m}\widetilde{\alpha}_s\psi_s\right) = 0, \quad x\in\Omega_i.$$

Поэтому $(Nu_e)^- = 0$, $x \in \Gamma$, и из (16) следует выполнение второго условия сопряжения (2). Выполнение первого условия сопряжения (2) следует из определения ψ и формулы (13).

Таким образом, подставив (18) в формулы (7), (8), получим решение задачи дифракции. Теорема доказана.

Покажем теперь, что уравнение (5) тоже можно использовать для решения задачи дифракции.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и*

$$\langle f_2, \psi_0 \rangle = 0, \tag{19}$$

ψ_0 имеет вид (12). Тогда уравнение (5) разрешимо и его общее решение можно записать как

$$\phi = \widetilde{\phi} + \phi_0, \quad \phi_0 = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \phi_s, \tag{20}$$

где $\widetilde{\phi}$ — произвольное частное решение этого уравнения, α_s — произвольные комплексные числа, ϕ_s — линейно независимые решения однородного уравнения (5). Подстановка любого решения уравнения (5) в формулы (4) даёт решение задачи дифракции.

Доказательство. Операторы p_iC и p_eD из уравнений (5) и (9) являются сопряжёнными в силу сформулированной леммы, ψ_0 из (12) — нетривиальное решение однородного уравнения (9). Поэтому если условие (19) выполнено, из второй теоремы Фредгольма следует, что решение уравнения (5) существует [2, теорема 1.29; 9, с. 220] и имеет вид (20) [2, следствия 1.19, 1.20].

Выражения (4), где ϕ — решение уравнения (5), удовлетворяют уравнениям (1), условию излучения (3) и первому из условий сопряжения (2). Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать выполнение второго условия из (2).

Продолжим потенциал u_i формулой (4) в область Ω_e. Вычислив предельное значение этого продолжения на границе Γ, имеем

$$u_i^+ = f_2 - C\phi = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Таким образом, потенциал u_i — решение внешней задачи (17) с однородным граничным условием. Эта задача имеет только тривиальное решение $u_i = 0$ в Ω_e [2, теорема 3.21], поэтому $(Nu_i)^+ = 0$. Отсюда и из формул для скачка нормальных производных потенциала простого слоя и непрерывности этих производных для потенциала двойного слоя при переходе через границу Γ находим

$$p_i(Nu_i)^- - p_e(Nu_e)^+ = p_i[Nu_i] - p_e(Nu_e)^+ = p_e(Nu_e)^+ + p_ef_1 - p_e(Nu_e)^+ = p_ef_1.$$

Второе условие сопряжения в (2) также выполнено. Теорема доказана.

Отметим, что для произвольных областей нетривиальные решения однородного уравнения (9) на спектре неизвестны. Воспользуемся задачей дифракции с известным аналитическим решением и покажем для конкретного случая, что уравнение (5) на спектре, в отличие от уравнения (9), не всегда имеет решение.

Пример. Рассмотрим задачу дифракции, где Γ — единичная сфера с центром в начале координат, а комплексная амплитуда исходного волнового поля давлений определяется уравнением плоской волны $u_0(x) = \exp\{ik_ex_3\}$, $f_0 = u_0^+$, $f_1 = (Nu_0)^+$.

Разложение u_0 по сферическим функциям и точное решение этой задачи имеют вид [24, § 7.4]

$$u_0(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)i^m j_m(k_e r)P_m(\cos\theta),\quad r\geqslant 0, \tag{21}$$

$$u_e(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)i^m\alpha_m}{\beta_m}h_m(k_e r)P_m(\cos\theta),\quad r\geqslant 1,$$

$$u_i(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)i^{m+1}p_e}{k_e\beta_m}j_m(k_i r)P_m(\cos\theta),\quad r\leqslant 1.$$

Здесь и далее $r=|x|,\ \cos\theta=x_3/r,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ P_m$ — полиномы Лежандра m-го порядка,

$$\alpha_m=p_i k_i j_m(k_e)j'_m(k_i)-p_e k_e j_m(k_i)j'_m(k_e),$$

$$\beta_m=p_e k_e j_m(k_i)h'_m(k_e)-p_i k_i h_m(k_e)j'_m(k_i),$$

$$j_m(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{m+1/2}(z),\quad h_m(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}H^{(1)}_{m+1/2}(z),$$

$J_{m+1/2}$, $H^{(1)}_{m+1/2}$ — функции Бесселя и Ханкеля первого рода порядка $m+1/2$ соответственно.

Пусть выполнены условия теоремы 3. В этом случае задача дифракции сводится к уравнению (9). Покажем, что его решение имеет вид

$$\psi(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)i^m p_e}{k_i k_e\beta_m}\,\frac{P_m(\cos\theta)}{h_m(k_i)}. \tag{22}$$

Для этого используем равенства

$$A_{i(e)}P_m=ik_{i(e)}j_m(k_{i(e)})h_m(k_{i(e)})P_m, \tag{23}$$

$$B_{i(e)}P_m=B^*_{i(e)}P_m=0.5ik^2_{i(e)}\left(j_m(k_{i(e)})h_m(k_{i(e)})\right)'P_m \tag{24}$$

и тождество

$$j_m(z)h'_m(z)-j'_m(z)h_m(z)=i/z^2 \tag{25}$$

из работы [25].

Подействуем оператором D из уравнения (9) на P_m:

$$DP_m=0.5ik_i j_m(k_i)h_m(k_i)\left(1-ik_e^2(2j_m(k_e)h'_m(k_e)-i/k_e^2)\right)P_m+$$
$$+0.5p_{ie}ik_e j_m(k_e)h_m(k_e)\left(1+ik_i^2(2j'_m(k_i)h_m(k_i)+i/k_i^2)\right)P_m=k_i k_e j_m(k_e)h_m(k_i)\beta_m P_m/p_e.$$

Поэтому

$$D\psi=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)i^m p_e}{k_i k_e\beta_m}\,\frac{DP_m(\cos\theta)}{h_m(k_i)}=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)i^m j_m(k_e)P_m(\cos\theta). \tag{26}$$

Отсюда и из (21) следует, что $D\psi=f_0$.

Пусть теперь ω — собственная частота задачи (6). Тогда для однородного уравнения (9) существует нетривиальное решение ψ_0 в силу теоремы 4, и для некоторой функции Бесселя имеет место равенство $j_l(k_e)=0$ [2, § 3.3]. Из (22) и (26) следует, что это нетривиальное решение имеет вид $\psi_0=\alpha P_l(\cos\theta)$, где $\alpha\neq 0$ — произвольное комплексное число.

Проверим, выполняется ли условие разрешимости (19). Используя разложение u_0 по сферическим функциям, равенства (23), (24) и ортогональность функций P_m [24, с. 715], получаем

$$\langle f_2,P_l\rangle = p_{ei}k_ek_i(2l+1)i^{l+1}j_l(k_i)h_l(k_i)j_l'(k_e)\langle P_l,P_l\rangle = 4\pi p_{ei}k_ek_ii^{l+1}j_l(k_i)h_l(k_i)j_l'(k_e).$$

Из определения функций j_l, h_l и тождества (25) следует, что функция h_l не имеет действительных корней и $j_l'(k_e)\neq 0$ при $j_l(k_e)=0$. Поэтому условие разрешимости (19) выполняется только при $j_l(k_i)=0$. Если же $j_l(k_i)\neq 0$, то решения уравнения (5) не существует.

3. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА СПЕКТРАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В п. 2 было показано, что для решения задачи дифракции достаточно найти одно из решений интегрального уравнения (9) и воспользоваться потенциалами (7), (8). Рассмотрим возможность получить это решение приближённо.

Обозначим через $k>0$ некоторое собственное волновое число задачи (6), а через $\psi(k)$ — зависящее от него решение (18). Выберем достаточно малое число $\delta>0$. Тогда для решения интегрального уравнения имеют место интерполяционные формулы для плотности

$$\psi(k)=\psi(k+i\delta)+O(\delta),\quad \psi(k)=2\psi(k+i\delta)-\psi(k+2i\delta)+O(\delta^2),$$
$$\psi(k)=4\psi(k+i\delta)-\psi(k-\delta+i\delta)-\psi(k+\delta+i\delta)-\psi(k+2i\delta)+O(\delta^4). \tag{27}$$

Отметим, что в этом случае все плотности в правой части (27) являются решениями корректно разрешимых интегральных уравнений. Подстановка найденной плотности в интегралы (7), (8) даёт приближённое решение задачи дифракции.

Формулы (27) подразумевают, что искомое решение интегрального уравнения существует. В тех случаях, когда это не так, приближённое решение задачи дифракции может быть найдено по тем же формулам, где ψ следует заменить на $u_{i(e)}$. Однако этот способ решения является более трудоёмким.

Описанный подход ранее использовался для численного решения на спектре трёхмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца [19]. Они были сформулированы в виде граничных слабо сингулярных интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

В работе [17] приведены результаты применения данного подхода для численного решения задачи дифракции плоской акустической волны на единичном шаре на собственных значениях волновых чисел задачи (6). Интегральные уравнения (5) и (9) аппроксимировались системами линейных алгебраических уравнений, которые затем решались численно итерационным методом вариационного типа. При этом для вычисления второго и последующих слагаемых в формулах (27) в качестве начального приближения использовалось найденное ранее первое слагаемое. Это позволило значительно сократить необходимое число итераций.

Сравнение точного и приближённого решений задачи дифракции показало, что интерполяция по формулам (27) позволяет находить решение этой задачи с достаточно высокой точностью. При этом вычисления на собственных волновых числах без применения интерполяции дают неудовлетворительные результаты.

Другие формулы для поиска приближённого решения задачи дифракции на спектрах интегральных уравнений были предложены в работе [26].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы два слабо сингулярных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода, к каждому из которых может быть сведена трёхмерная стационарная задача дифракции, на спектрах интегральных уравнений, где нарушаются условия эквивалентности интегральных уравнений исходной задаче. Установлено, что решение первого уравнения существует не во всех случаях. Если же оно существует, то, подставленное в интегральные представления решения задачи дифракции, даёт решение этой задачи. Доказано, что решение второго уравнения на спектре существует всегда, но не является единственным. Только одно решение этого уравнения, подставленное в интегральные представления решения задачи дифракции, даёт решение этой задачи.

Описан метод численного решения интегральных уравнений и задачи дифракции на спектрах интегральных уравнений. Его эффективность подтверждена результатами численных экспериментов [17].

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kress, R. Transmission problems for the Helmholtz equation / R. Kress, G.F. Roach // J. Math. Phys. — 1978. — V. 19, № 6. — P. 1433–1437.
2. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс; пер. с англ. Ю.А. Еремина, Е.В. Захарова — М. : Мир, 1987. — 311 с.
3. Kleinman, R.E. On single integral equations for the transmission problem of acoustics / R.E. Kleinman, P.A. Martin // SIAM J. Appl. Math. — 1988. — V. 48, № 2. — P. 307–325.
4. Смагин, С.И. Интегральные уравнения задач дифракции / С.И. Смагин. — Владивосток : Дальнаука, 1995. — 203 с.
5. Дмитриев, В.И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М. : МАКС Пресс, 2008. — 316 с.
6. Еремин, Ю.А. Свойства системы интегральных уравнений первого рода в задачах дифракции на проницаемом теле / Ю.А. Еремин, Е.В. Захаров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1230–1237.
7. Kleefeld, A. The transmission problem for the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^3$ / A. Kleefeld // J. Comput. Methods Appl. Math. — 2012. — V. 12, № 3. — P. 330–350.
8. Каширин, А.А. Параллельный алгоритм мозаично-скелетонного метода для численного решения трёхмерной скалярной задачи дифракции в интегральной форме / А.А. Каширин, С.И. Смагин, М.Ю. Тимофеенко // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 5. — С. 917–932.
9. Треногин, В.А. Функциональный анализ : учебник / В.А. Треногин. — 3-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2002. — 488 с.
10. Steinbach, O. Convergence analysis of a Galerkin boundary element method for the Dirichlet Laplacian eigenvalue problem / O. Steinbach, G. Unger // SIAM J. Numer. Anal. — 2012. — V. 50, № 2. — P. 710–728.
11. Fictitious eigenfrequencies in the BEM for interior acoustic problems / C.-J. Zheng, C.-X. Bi, C. Zhang [et al.] // Eng. Anal. Bound. Elem. — 2019. — V. 104. — P. 170–182.
12. Панич, О.И. К вопросу о разрешимости внешних краевых задач для волнового уравнения и для системы уравнений Максвелла / О.И. Панич // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, № 1 (121). — С. 221–226.
13. Schenck, H.A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems / H.A. Schenck // J. Acoust. Soc. Am. — 1968. — V. 44, № 1. — P. 41–58.

14. Burton, A.J. The application of the integral equation method to the numerical solution of some exterior boundary value problems / A.J. Burton, G.F. Miller // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. — 1971. — V. 323, № 2. — P. 201–210.
15. Langrenne, C. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation / C. Langrenne, A. Garcia // J. Acoust. Soc. Am. — 2015. — V. 138, № 1. — P. 3332–3340.
16. Wu, Y.H. Isogeometric indirect boundary element method for solving the 3D acoustic problems / Y.H. Wu, C.Y. Dong, H.S. Yang // J. Comput. Appl. Math. — 2020. — V. 363, № 2. — P. 273–299.
17. Каширин, А.А. О численном решении скалярных задач дифракции в интегральных постановках на спектрах интегральных операторов / А.А. Каширин, С.И. Смагин // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2020. — Т. 494, № 2. — С. 38–42.
18. Lavie, A. Integral equation methods with unique solution for all wavenumbers applied to acoustic radiation / A. Lavie, A. Leblanc // Eur. J. Comput. Mech. — 2010. — V. 19, № 5-7. — P. 619–636.
19. Каширин, А.А. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов / А.А. Каширин, С.И. Смагин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 8. — С. 1492–1505.
20. Hiptmair, R. Stabilized FEM-BEM coupling for Helmholtz transmission problems / R. Hiptmair, P. Meury // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — V. 44, № 5. — P. 2107–2130.
21. Laliena, A.R. Symmetric boundary integral formulations for Helmholtz transmission problems / A.R. Laliena, M.L. Rapun, F.J. Sayas // Appl. Numer. Math. — 2009. — V. 59, № 11. — P. 2814–2823.
22. Regularized combined field integral equations for acoustic transmission problems / Y. Boubendir, V. Dominguez, D. Levadoux, C. Turc // SIAM J. Appl. Math. — 2015. — V. 75, № 3. — P. 929–952.
23. Каширин, А.А. Обобщённые решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции / А.А. Каширин, С.И. Смагин // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 79–90.
24. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — 6-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 798 с.
25. Vico, F. Boundary integral equation analysis on the sphere / F. Vico, L. Greengard, Z. Gimbutas // Numer. Math. — 2014. — V. 128. — P. 463–487.
26. Каширин, А.А. Исследование и численное решение интегральных уравнений трёхмерных стационарных задач дифракции акустических волн : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Каширин. — Хабаровск, 2006. — 118 с.

ON THE SOLVABILITY ON THE SPECTRUM OF FREDHOLM BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND FOR THE THREE-DIMENSIONAL TRANSMISSION PROBLEM

A. A. Kashirin[1], S. I. Smagin[2]

Computer Center of Far Eastern Branch of RAS, Khabarovsk, Russian Federation
e-mail: [1]elomer@mail.ru, [2]smagin@ccfebras.ru

The paper considers two weakly singular Fredholm boundary integral equations of the first kind, to each of which the three-dimensional Helmholtz transmission problem can be reduced. The properties of these equations are studied on spectra, where they are ill-posed. For the first equation, it is shown that if its solution exists on the spectrum, it allows us to find a solution to the transmission problem. The second equation in this case always has infinitely many solutions, only one of which gives a solution to the transmission problem. The interpolation method for finding approximate solutions of the considered integral equations and the transmission problem is discussed.

Keywords: transmission problem, wave number, integral equation, eigenvalue, approximate solution.

REFERENCES

1. Kress, R. Transmission problems for the Helmholtz equation / R. Kress, G.F. Roach // J. Math. Phys. — 1978. — V. 19, № 6. — P. 1433–1437.
2. Colton, D. Integral Equation Methods in Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. — New York : John Wiley & Sons, 1983. — 271 p.
3. Kleinman, R.E. On single integral equations for the transmission problem of acoustics / R.E. Kleinman, P.A. Martin // SIAM J. Appl. Math. — 1988. — V. 48, № 2. — P. 307–325.
4. Smagin, S.I. Integral Equations for Diffraction Problems / S.I. Smagin. — Vladivostok : Dalnauka, 1995. — 203 p. [in Russian]
5. Dmitriev, V.I. The Method of Integral Equations in Computational Electrodynamics / V.I. Dmitriev, E.V. Zakharov. — Moscow : MAKS Press, 2008. — 316 p. [in Russian]
6. Eremin, Yu.A. Properties of a system of integral equations of the first kind in problems of diffraction by a permeable body / Yu.A. Eremin , E.V. Zakharov // Differ. Equat. — 2021. — V. 57, № 9. — P. 1205–1213.
7. Kleefeld, A. The transmission problem for the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^3$ / A. Kleefeld // J. Comput. Methods Appl. Math. — 2012. — V. 12, № 3. — P. 330–350.
8. Kashirin A.A. Parallel mosaic-skeleton algorithm for the numerical solution of a three-dimensional scalar scattering problem in integral form / A.A. Kashirin, S.I. Smagin, M.Y. Timofeenko // Comput. Math. Math. Phys. — 2020. — V. 60, № 5. — P. 895–910.
9. Trenogin, V.A. Functional Analysis : textbook / V.A. Trenogin. — 3rd ed. — Moscow : Fizmatlit, 2002. — 488 p. [in Russian]
10. Steinbach, O. Convergence analysis of a Galerkin boundary element method for the Dirichlet Laplacian eigenvalue problem / O. Steinbach, G. Unger // SIAM J. Numer. Anal. — 2012. — V. 50, № 2. — P. 710–728.
11. Fictitious eigenfrequencies in the BEM for interior acoustic problems / C.-J. Zheng, C.-X. Bi, C. Zhang [et al.] // Eng. Anal. Bound. Elem. — 2019. — V. 104. — P. 170–182.
12. Panich, O.I. On the solvability of exterior boundary-value problems for the wave equation and for a system of Maxwell's equations / O.I. Panich // Uspekhi Mat. Nauk. — 1965. — V. 20, № 1 (121). — P. 221–226. [in Russian]
13. Schenck, H.A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems / H.A. Schenck // J. Acoust. Soc. Am. — 1968. — V. 44, № 1. — P. 41–58.
14. Burton, A.J. The application of the integral equation method to the numerical solution of some exterior boundary value problems / A.J. Burton, G.F. Miller // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. — 1971. — V. 323, № 2. — P. 201–210.
15. Langrenne, C. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation / C. Langrenne, A. Garcia // J. Acoust. Soc. Am. — 2015. — V. 138, № 1. — P. 3332–3340.
16. Wu, Y.H. Isogeometric indirect boundary element method for solving the 3D acoustic problems / Y.H. Wu, C.Y. Dong, H.S. Yang // J. Comput. Appl. Math. — 2020. — V. 363, № 2. — P. 273–299.
17. Kashirin, A.A. Numerical solution of scalar diffraction problems in integral statements on spectra of integral operators / A.A. Kashirin, S.I. Smagin // Dokl. Math. — 2020. — V. 102, № 2. — P. 387–391.
18. Lavie, A. Integral equation methods with unique solution for all wavenumbers applied to acoustic radiation / A. Lavie, A. Leblanc // Eur. J. Comput. Mech. — 2010. — V. 19, № 5-7. — P. 619–636.
19. Kashirin, A.A. Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation / A.A. Kashirin, S.I. Smagin // Comput. Math. Math. Phys. — 2012. — V. 52, № 8. — P. 1173–1185.
20. Hiptmair, R. Stabilized FEM-BEM coupling for Helmholtz transmission problems / R. Hiptmair, P. Meury // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — V. 44, № 5. — P. 2107–2130.
21. Laliena, A.R. Symmetric boundary integral formulations for Helmholtz transmission problems / A.R. Laliena, M.L. Rapun, F.J. Sayas // Appl. Numer. Math. — 2009. — V. 59, № 11. — P. 2814–2823.
22. Regularized combined field integral equations for acoustic transmission problems / Y. Boubendir, V. Dominguez, D. Levadoux, C. Turc // SIAM J. Appl. Math. — 2015. — V. 75, № 3. — P. 929–952.
23. Kashirin, A.A. Generalized solutions of the integral equations of a scalar diffraction problem / A.A. Kashirin, S.I. Smagin // Differ. Equat. — 2006. — V. 42, № 1. — P. 88–100.
24. Tikhonov, A.N. Equations of Mathematical Physics / A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii. — New York : Dover, 2011. — 800 p.
25. Vico, F. Boundary integral equation analysis on the sphere / F. Vico, L. Greengard, Z. Gimbutas // Numer. Math. — 2014. — V. 128. — P. 463–487.
26. Kashirin, A.A. Research and numerical solution of integral equations of three-dimensional stationary problems of diffraction of acoustic waves : PhD thesis / A.A. Kashirin. — Khabarovsk, 2006. — 118 p. [in Russian]