ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 187–210

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА С ПАМЯТЬЮ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

М. В. Турбин[1], А. С. Устюжанинова[2]

Воронежский государственный университет

e-mail: [1]mrmike@mail.ru, [2]nastyzhka@gmail.com

Поступила в редакцию 01.06.2023 г., после доработки 16.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Доказана разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для модифицированной модели Кельвина–Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения частиц жидкости. Для доказательства рассмотрена аппроксимационная задача, для которой на основе теоремы Лере–Шаудера о неподвижной точке установлена разрешимость. На основе априорных оценок показано, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Ключевые слова: слабое решение, модифицированная модель Кельвина–Фойгта, траектория, жидкость с памятью, начально-краевая задача, теорема существования.

DOI: 10.31857/S0374064124020046, EDN: QMTGVM

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С середины XX века известно достаточно большое число моделей неньютоновой гидродинамики, описывающих движение различных полимерных растворов и расплавов, эмульсий и суспензий одной ньютоновской жидкости в другой, жидкостей с полимерными добавками и др. Подобные модели активно изучаются в связи с наличием большого числа приложений в медицине, в химической и фармацевтической промышленности и во многих других областях.

Одной из хорошо известных моделей неньютоновской жидкости является модель движения жидкости Кельвина–Фойгта. Реологическое соотношение для этой модели имеет вид

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E}(v) + 2\varkappa\frac{d}{dt}\mathcal{E}(v). \tag{1}$$

Здесь σ — девиатор тензора напряжений, $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформаций, ν — вязкость жидкости, $\varkappa$ — время запаздывания, а $d/dt = \partial/\partial t + \sum_{i=1}^n v_i\partial/\partial x_i$ — субстанциональная производная по времени. Соотношение (1) предложено в статье [1] и было подтверждено экспериментальными исследованиями растворов полиэтиленоксида, полиакриламида [2] и гуаровой смолы [3].

Подставляя реологическое соотношение (1) в систему уравнений движения жидкости в форме Коши и пренебрегая членами, содержащими произведения производных в силу принципа малости относительных скоростей деформаций при течении жидкости, в [1] была получена система уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\Delta v+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-\varkappa\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial\Delta v}{\partial x_i}+\nabla p=f;\quad \operatorname{div}v=0. \tag{2}$$

Исследование разрешимости начально-краевой задачи для системы уравнений (2) было начато в работах А.П. Осколкова [4, 5]. Однако в статье [6] им было замечено, что доказательства в упомянутых работах содержат ошибки, и вопрос разрешимости начально-краевой задачи с условием прилипания на границе оставался открытым. Об этом также писала О.А. Ладыженская [7]. Доказательство существования слабого решения начально-краевой задачи для системы (2) было получено в [8]. В работах [8–12] для системы (2) исследованы задачи оптимального управления и вопросы предельного поведения решений.

На основе моделей жидкостей Максвелла, Кельвина–Фойгта и Олдройта была создана общая феноменологическая теория линейных вязкоупругих жидкостей с конечным числом дискретно распределённых времён релаксации и времён запаздывания [13]. В основе этой теории лежит предположение — принцип суперпозиции Л. Больцмана — о том, что все воздействия на среду независимы и аддитивны, а реакции среды на внешние воздействия линейны. Реологическое соотношение для модели Кельвина–Фойгта порядка L, $L\in\mathbb{N}$, имеет вид

$$\left(1+\sum_{i=1}^{L}\lambda_i\frac{d^i}{dt^i}\right)\sigma=2\left(\mu+\sum_{i=1}^{L+1}\varkappa_i\frac{d^i}{dt^i}\right)\mathcal{E}(v), \tag{3}$$

где λ_i, $i=\overline{1,L}$, — времена релаксации, а $\varkappa_i$, $i=\overline{1,L+1}$, — времена ретардации. Используя преобразование Лапласа (см., например, [14]) и пренебрегая в силу принципа малости относительных скоростей и деформаций членами, содержащими произведения производных $v(t,x)$ по пространственным переменным, получаем следующую систему уравнений, описывающую движение несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта с памятью:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\nu\Delta v-\varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-\varkappa\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial\Delta v}{\partial x_i}-$$

$$-\int_0^t\sum_{i=1}^{L}\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\Delta v(s,z(s,t,x))\,ds+\nabla p=f;\quad \operatorname{div}v=0,\quad (t,x)\in Q_T=[0,T]\times\Omega; \tag{4}$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^{\tau}v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad 0\leqslant t,\tau\leqslant T,\quad x\in\Omega. \tag{5}$$

Здесь Ω — выпуклая область с гладкой границей; v — вектор скорости частицы жидкости; p — давление жидкости; f — вектор плотности внешних сил; $\nu>0$, $\varkappa>0$ — вязкость жидкости и время ретардации соответственно; β_i, α_i, $i=\overline{1,L}$, — некоторые константы. Исходя из физического смысла предполагается, что константы α_i, $i=\overline{1,L}$, различны, вещественны и отрицательны. Требование вещественности и отрицательности обусловлено физическим смыслом задачи, требование различности продиктовано упрощением вычислений. Функция $z(\tau;t,x)$ — траектория движения жидкости, соответствующая полю скоростей v.

Для системы (4), (5) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0}=a(x),\quad x\in\Omega;\quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0. \tag{6}$$

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для того чтобы ввести понятие слабого решения, нам потребуются определения некоторых пространств. Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций на Ω со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω. Пусть $\mathcal{V}=\{v(x)=(v_1,\ldots,v_n)\in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v=0\}$. Определим V^0 и V^1 как пополнение $\mathcal{V}$ по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно. Пусть $V^2=H^2(\Omega)^n\cap V^1$.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор $A=-\pi\Delta$, где $\pi : L_2(\Omega)^n\to V^0$ — проектор Лере. Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряжённым положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то собственные функции $\{e_j\}$ оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$ — собственные значения оператора A. Обозначим через E_∞ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^α, $\alpha\in\mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha}=\left(\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^\alpha|v_k|^2\right)^{1/2}$. В книге [14] показано, что такие нормы в пространствах V^α, $\alpha\in\mathbb{N}$, эквивалентны нормам $\|v\|_{V^\alpha}=\|A^{\alpha/2}v\|_{V^0}$.

Символ “:” обозначает покомпонентное произведение матриц.

Также введём пространства

$$W_1=\{u : u\in L_\infty(0,T;V^2), u'\in L_2(0,T;V^1)\},\quad W_2=\{u : u\in C([0,T],V^5), u'\in L_2(0,T;V^5)\}$$

с нормами $\|u\|_{W_1}=\|u\|_{L_\infty(0,T;V^2)}+\|u'\|_{L_2(0,T;V^1)}$, $\|u\|_{W_2}=\|u\|_{C([0,T],V^5)}+\|u'\|_{L_2(0,T;V^5)}$.

Будем использовать следующую теорему Лере–Шаудера.

Теорема 1. *Пусть G — открытое ограниченное подмножество банахового пространства X, $0\in G$, и пусть $\Xi(\tau,\cdot) : \overline{G}\to X$, $\tau\in[0,1]$, — однопараметрическое семейство отображений, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) отображение $\Xi : [0,1]\times\overline{G}\to X$ компактно по совокупности переменных;

2) $\Xi(\tau,x)\neq x$ для всех $\tau\in[0,1]$ и $x\in\partial G$, т.е. отображение $\Xi(\tau,\cdot)$ не имеет неподвижных точек на границе G;

3) $\Xi(0,\cdot)\equiv 0$.

Тогда отображение $\Xi(1,\cdot)$ имеет неподвижную точку, т.е. существует точка $x_1\in G$ такая, что $x_1=\Xi(1,x_1)$.

В дальнейшем нам потребуется теорема Обена–Дубинского–Симона.

Теорема 2 [15]. *Пусть $X\subset E\subset Y$ — банаховы пространства, причём вложение $X\subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E\subset Y$ непрерывно. Пусть $F\subset L_p(0,T;X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Будем предполагать, что для любого $f\in F$ его обобщённая производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y)$, $1\leqslant r\leqslant\infty$. Далее пусть множество F ограничено в $L_p(0,T;X)$, а множество $\{f' : f\in F\}$ ограничено в $L_r(0,T;Y)$.*

Тогда при $p<\infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0,T;E)$, а при $p=\infty$ и $r>1$ множество F относительно компактно в $C([0,T],E)$.

Нам потребуется одна абстрактная теорема о разрешимости уравнений с вольтерровыми операторами. Чтобы её сформулировать, необходимо дать следующее определение (мы даём его в частном случае, более подробно см. [16]).

Определение 1. Пусть X_1, X_2 — линейные пространства. Отображение $G : L_{p_1}(0,T;X_1)\to L_{p_2}(0,T;X_2)$ называется *оператором Вольтерры*, если из равенства $u(s)=v(s)$ для почти всех $s\in[0,t]$, $t\in[0,T]$ следует, что $(Gu)(s)=(Gv)(s)$ для почти всех $s\in[0,t]$.

Для таких операторов имеет место

Теорема 3. *Пусть X — вещественное банахово пространство. Пусть оператор Вольтерры $G: L_2(0,T;X)\to L_2(0,T;X)$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$\|Gu-Gv\|_{L_2(0,T;X)}\leqslant C\|u-v\|_{L_2(0,T;X)}, \quad C=\mathrm{const}\,. \tag{7}$$

Тогда при любых $a\in X$, $f\in L_2(0,T;X)$ существует точно одно решение $u\in W=\{u: u\in \in C([0,T],X),\ u'\in L_2(0,T;X)\}$ задачи

$$u'+Gu=f, \quad u(0)=a.$$

Определяемое тем самым соответствие $\{a,f\}\to\{u,u'\}$ непрерывно как отображение из $X\times L_2(0,T;X)$ в $C([0,T],X)\times L_2(0,T;X)$.

Также нам потребуется неравенство Гронуолла–Беллмана (см., например, [17]).

Теорема 4. *Пусть $v(t)$, $g(t)$ — непрерывные неотрицательные на отрезке $[0,T]$ функции и пусть $C\geqslant 0$. Если v удовлетворяет интегральному неравенству*

$$v(t)\leqslant C+\int\limits_0^t g(s)v(s)\,ds \quad \textit{для} \quad t\in[0,T],$$

то $v(t)\leqslant C\exp\left\{\int_0^t g(s)ds\right\}$ для $t\in[0,T]$.

3. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРАЕКТОРИЙ

Приведём необходимые нам утверждения о разрешимости задачи (5). Следуя работе [18], начнём с гладкого случая. Пусть $v\in L_1(0,T;C(\overline{\Omega})^n)$. Решение (5) определяется как функция $z(\tau)\equiv z(\tau;t,x)$ ($\tau,t\in[0,T]$, $x\in\overline{\Omega}$), такая что $z(\tau)\in C([0,T],\overline{\Omega})$ и удовлетворяет (5). Обозначим через $\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})^n$ множество непрерывных функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

Лемма 1. *Пусть $v\in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n\cap\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})^n)$ и $\partial\Omega\in C^1$. Тогда задача (5) имеет единственное решение z. Более того, z, $\partial z/\partial x$ непрерывны по переменным $\tau,t\in[0,T]$, $x\in\overline{\Omega}$.*

Лемма 2. *Пусть $v^k\in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n\cap\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})^n)$, $k=1,2$, $\partial\Omega\in C^1$, и z^k, $k=1,2$, — решения задачи (5). Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left\|z^1(\tau;t,x)-z^2(\tau;t,x)\right\|_{L_q(\Omega)^n}\leqslant C\left|\int\limits_t^\tau \|v^1(s,x)-v^2(s,x)\|_{L_q(\Omega)^n}\,ds\right|\times$$
$$\times\exp\left\{C\min_{k=1,2}\left|\int\limits_t^\tau \|v^k(s,x)\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}\,ds\right|\right\}, \quad 1\leqslant q\leqslant\infty. \tag{8}$$

Здесь C — константа, не зависящая от τ, t и v^k, $k=1,2$.

Для суммируемой функции v требуется более общая концепция решения задачи (5).

Определение 2. Функция $z(\tau;t,x)\colon [0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}\to R^n$ называется *регулярным лагранжевым потоком*, соответствующим v, если выполнены следующие условия:

1) для почти всех x и любых $t\in[0,T]$ функция $\gamma(\tau)=z(\tau;t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (5);

2) для любых $\tau,t\in[0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B\subset\overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо равенство $m(z(\tau,t,B))=m(B)$;

3) для любых $t_1,t_2,t_3\in[0,T]$ и почти всех $x\in\overline{\Omega}$ имеет место равенство $z(t_3,t_1,x)= =z(t_3,t_2,z(t_2,t_1,x))$.

Отметим, что для гладкого векторного поля v регулярный лагранжев поток совпадает с классическим решением задачи Коши (5).

Теорема 5. *Пусть $v\in L_1(0,T;W_p^1(\Omega)^n)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $\operatorname{div} v(t,x)=0$ и $v(t,x)|_{\partial\Omega}=0$. Тогда существует единственный регулярный лагранжев поток z, соответствующий v.*

Пусть v_x — матрица Якоби вектор-функции v.

Теорема 6. *Пусть $v,v^m\in L_1(0,T;W_1^p(\Omega)^n)$, $m=1,2,\ldots,$ для некоторого $p>1$. Пусть $\operatorname{div} v^m=0$, $v^m|_{\partial\Omega}=0$, $\operatorname{div} v=0$, $v|_{\partial\Omega}=0$ и пусть выполняются неравенства*

$$\|v_x\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega)^{n^2})}+\|v\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega)^n)}\leqslant M,\quad \|v_x^m\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega)^{n^2})}+\|v^m\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega)^n)}\leqslant M.$$

Пусть v^m сходится к функции v в $L_1(Q_T)^n$ при $m\to\infty$. Пусть z^m и z — регулярные лагранжевы потоки, соответствующие v^m и v. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега в $[0,T]\times\Omega$ равномерно по $t\in[0,T]$.

В более общем виде эти результаты можно найти в работах [19, 20].

Приведём также лемму, которая понадобится нам для предельного перехода.

Лемма 3. *Пусть $h\in L_\infty([0,T]\times[0,T])$, последовательность v^m равномерно ограничена по норме пространства $L_2(0,T;V^2)$, т.е. $\|v^m\|_{L_2(0,T;V^2)}\leqslant C$, и сходится слабо в $L_2(0,T;V^2)$ к некоторой функции v при $m\to\infty$. Тогда*

$$\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds\rightharpoonup\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v(s,z(s;t,x))\,ds \tag{9}$$

слабо в $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ при $m\to\infty$. Здесь z^m и z — регулярные лагранжевы потоки, соответствующие v^m и v соответственно.

Доказательство. Покажем, что последовательность $\int_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$. С учётом неравенства Гёльдера имеем

$$\Big\|\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds\Big\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)}=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Big|\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds\Big|^2dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\bigg(\int\limits_0^t\big|\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\big|\,ds\bigg)^2dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\bigg(\sqrt{t}\bigg(\int\limits_0^t\big|\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\big|^2ds\bigg)^{1/2}\bigg)^2dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant T\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\int\limits_0^T\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\big|\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\big|^2\,dx\,ds\,dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $x=z^m(t;s,y)$ и получим

$$T\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\int\limits_0^T\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\big|\Delta v^m(s,y)\big|^2\,dy\,ds\,dt\leqslant$$

$$\leqslant T^2\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\|v^m\|^2_{L_2(0,T;V^2)}\leqslant C^2T^2\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}.$$

Следовательно, существует $w\in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ такая, что $\int_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds$ сходится слабо к w в $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ при $m\to\infty$. Но в смысле распределений эта последовательность сходится к $\int_0^t h(s,t)\Delta v(s,z(s;t,x))\,ds$. На самом деле, для любой функции $\varphi\in\mathcal{V}$,

$\chi\in\mathcal{D}(0,T)$, сделав замену переменной $x=z^m(t;s,y)$ и поменяв порядок интегрирования, имеем

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds\,\varphi(x)\,dx\,\chi(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,y)\,ds\,\varphi(z^m(t;s,y))\,dy\,\chi(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Delta v^m(s,y)\int\limits_s^T h(s,t)\varphi(z^m(t;s,y))\chi(t)\,dt\,dyds=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Delta v^m(s,y)H^m(s,y)\,dy\,ds,$$

где $H^m(s,y)=\int_s^T h(s,t)\varphi(z^m(t;s,y))\chi(t)\,dt$.

По теореме 6 последовательность z^m сходится к z по мере Лебега в $[0,T]\times\Omega$ равномерно на промежутке $t\in[0,T]$. В силу гладкости функция $\varphi(z^m(t;s,y))$ сходится к функции $\varphi(z(t;s,y))$ почти всюду на Q_T при $m\to\infty$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла равномерно ограниченная последовательность $H^m(s,y)$ сходится почти всюду на Q_T к ограниченной функции $H(s,y)=\int_s^T h(s,t)\varphi(z(s;t,y))\chi(t)\,dt$.

В результате получаем

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Delta v^m(s,y)H^m(s,y)\,dy\,ds\to\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Delta v(s,y)H(s,y)\,dy\,ds$$

при $m\to\infty$. Здесь первый сомножитель сходится слабо в $L_2(Q_T)^n$, а второй сомножитель сходится почти всюду на Q_T. В полученном интеграле меняем порядок интегрирования и делаем замену $y=z(s;t,x)$:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Delta v(s,y)H(s,y)\,dy\,ds=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Delta v(s,y)\int\limits_s^T h(s,t)\varphi(z(t;s,y))\chi(t)\,dt\,dy\,ds=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v(s,y)\,ds\,\varphi(z(t;s,y))\,dy\,\chi(t)\,dt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v(z(s;t,x))\,ds\,\varphi(t,x)\,dx\,\chi(t)\,dt.$$

В силу единственности предела $w=\int_0^t h(s,t)\Delta v(z(s;t,x))\,ds$. Лемма доказана.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Будем предполагать, что $a\in V^2$, $f\in L_2(0,T;V^0)$.

Определение 3. Функция $v\in W_1$ называется *слабым решением начально-краевой задачи* (4)–(6) если удовлетворяет для любой пробной функции $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ тождеству

$$\int\limits_\Omega v'\varphi\,dx-\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\nu\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx+\varkappa\int\limits_\Omega\nabla v':\nabla\varphi\,dx+$$

$$+\varkappa\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_i\Delta v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_\Omega\Delta v(s,z(s,t,x))\varphi\,dx\,ds=\int\limits_\Omega f\varphi\,dx \qquad (10)$$

и начальному условию $v(0)=a$.

Здесь z — регулярный лагранжев поток, порождённый v. Заметим, что по теореме 5 регулярный лагранжев поток z существует для любой функции $v \in W_1$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 7. *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи (4)–(6).*

Для доказательства этой теоремы рассматривается задача, аппроксимирующая исходную, и доказывается её разрешимость. После на основе априорных оценок решений, не зависящих от параметра аппроксимации, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

5. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \Delta^3 v}{\partial t} - \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \Delta v}{\partial x_i} -$$

$$- \int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{\alpha_i (t-s)} \Delta v(s, z(s,t,x))\, ds + \nabla p = f; \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (t,x) \in Q_T = [0,T] \times \Omega; \tag{11}$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \quad x \in \Omega; \tag{12}$$

$$v|_{t=0} = b(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = \Delta v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = \Delta^2 v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0. \tag{13}$$

Будем предполагать, что $b \in V^5$, $f \in L_2(0,T; V^0)$.

Определение 4. Функция $v \in W_2$ называется *решением аппроксимационной задачи* (11)–(13), если удовлетворяет для любой функции $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ тождеству

$$\int_\Omega v' \varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\, dx + \varkappa \int_\Omega \nabla v' : \nabla \varphi\, dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla(\Delta^2 v') : \nabla \varphi\, dx +$$

$$+ \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{\alpha_i (t-s)} \int_\Omega \Delta v(s, z(s,t,x)) \varphi\, dx\, ds = \int_\Omega f \varphi\, dx$$

и начальному условию $v(0) = b$.

Здесь z — решение задачи (12). Отметим, что в силу вложения $V^5 \subset C^1(\overline{\Omega})^n$ задача (12) имеет единственное классическое решение.

Имеет место следующая

Теорема 8. *Существует хотя бы одно решение аппроксимационной задачи (11)–(13).*

Доказательство этой теоремы (опираясь на теорему 1) приводится в п. 6.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8

Доказательство теоремы приведём в несколько этапов.

Этап 1. Пусть u — фиксированная функция из $C([0,T], V^3)$, $\|u\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant M$ (здесь M — константа, точное значение которой будет указано ниже). В силу непрерывного вложения $V^3 \subset C^1(\overline{\Omega})^n$ получаем, что $u \in C([0,T], C^1(\overline{\Omega})^n)$, причём u обращается в нуль на $\partial\Omega$. Тогда по лемме 1 существует единственное решение Z_u задачи Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s; t, x))\, ds. \tag{14}$$

Этап 2. На этом этапе для исходной функции u и найденной по ней функции Z_u доказывается существование функции $w\in W_2$, удовлетворяющей для любой пробной функции $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ тождеству

$$\int\limits_\Omega w'\varphi\,dx-\xi\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_iw_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\xi\nu\int\limits_\Omega\nabla w:\nabla\varphi\,dx+\varkappa\int\limits_\Omega\nabla w':\nabla\varphi\,dx+\varepsilon\int\limits_\Omega\nabla(\Delta^2w'):\nabla\varphi\,dx+$$
$$+\xi\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i\Delta w_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-\xi\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_\Omega\Delta w(s,Z_u(s,t,x))\varphi\,dx\,ds=\xi\int\limits_\Omega f\varphi\,dx \tag{15}$$

и начальному условию

$$w(0)=\xi b,\quad \xi\in[0,1]. \tag{16}$$

Для доказательства существования единственного решения этой задачи воспользуемся теоремой 3. Для этого сначала введём операторы при помощи следующих равенств:

$$A:V^1\to V^{-1},\quad \langle Av,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx,\quad v,\varphi\in V^1;$$
$$J:V^1\to V^{-1},\quad \langle Jv,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega v\varphi\,dx,\quad v,\varphi\in V^1;$$
$$A^3:V^5\to V^{-1},\quad \langle A^3v,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\nabla(\Delta^2v):\nabla\varphi\,dx,\quad v\in V^5,\quad \varphi\in V^1.$$

Также для фиксированной функции $u\in C([0,T],V^3)$ и найденной на первом этапе функции $Z_u\in C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^n)$ введём операторы при помощи равенств

$$B_1(u,\cdot):L_4(\Omega)^n\to V^{-1},\quad \langle B_1(u,v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx,\quad v\in L_4(\Omega)^n,\quad \varphi\in V^1;$$
$$B_2(u,\cdot):V^2\to V^{-1},\quad \langle B_2(u,v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i\Delta v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx,\quad v\in V^2,\quad \varphi\in V^1;$$
$$C(\cdot,Z_u):L_2(0,T;V^2)\to L_2(0,T;V^{-1}),$$
$$\langle C(v,Z_u)(t),\varphi\rangle=\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_\Omega\Delta v(s,Z_u(s,t,x))\varphi\,dx\,ds,\quad v\in L_2(0,T;V^2),\quad \varphi\in V^1.$$

Тогда задача о поиске функции $w\in W_2$, удовлетворяющей для любой пробной функции $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ тождеству (15) и начальному условию (16), эквивалентна задаче о поиске функции $w\in W_2$, являющейся решением операторного уравнения

$$(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)w'+\xi\nu Aw-\xi B_1(u,w)+\xi\varkappa B_2(u,w)-\xi C(w,Z_u)=\xi f \tag{17}$$

и удовлетворяющей начальному условию (16).

Для того чтобы воспользоваться теоремой 3, нужно установить некоторые свойства операторов. Отметим, что мы установим только те свойства, которые нам необходимы.

Лемма 4. *Справедливы следующие свойства.*

1. Для функции $g\in L_2(0,T;V^1)$ значение $Ag\in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $A:L_2(0,T;V^1)\to$ $\to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка

$$\|Ag\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant\|g\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{18}$$

2. Оператор $(J+\varkappa A)\colon V^1\to V^{-1}$ *непрерывен и обратим. Для любой функции* $g\in L_2(0,T;V^1)$ *значение* $(J+\varkappa A)g\in L_2(0,T;V^{-1})$*, оператор* $(J+\varkappa A):L_2(0,T;V^1)\to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывен и имеет место оценка*

$$\varkappa\|g\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant\|(J+\varkappa A)g\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{19}$$

3. Для $g\in L_2(0,T;V^5)$ *значение* $(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)g\in L_2(0,T;V^{-1})$*, оператор* $(J+\varepsilon A^3+\varkappa A):$ $L_2(0,T;V^5)\to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывен, обратим и имеет место оценка*

$$\varepsilon\|g\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)g\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant(C_1+\varepsilon+\varkappa C_2)\|g\|_{L_2(0,T;V^5)}. \tag{20}$$

Обратный оператор $(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}:L_2(0,T;V^{-1})\to L_2(0,T;V^5)$ *непрерывен и для него справедливо неравенство*

$$\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}h\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\|h\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{21}$$

4. Пусть функция $u\in C([0,T],V^3)$ *фиксирована,* $\|u\|_{C([0,T],V^3)}\leqslant M$*. Для любой функции* $g\in L_2(0,T;V^1)$ *значение* $B_1(u,g)\in L_2(0,T;V^{-1})$*, отображение* $B_1(u,\cdot):L_2(0,T;V^1)\to$ $\to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывно и для него имеет место оценка*

$$\|B_1(u,g)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_3M\|g\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{22}$$

5. Пусть функция $u\in C([0,T],V^3)$ *фиксирована,* $\|u\|_{C([0,T],V^3)}\leqslant M$*. Для любой функции* $g\in L_2(0,T;V^2)$ *значение* $B_2(u,g)\in L_2(0,T;V^{-1})$*, отображение* $B_2(u,\cdot):L_2(0,T;V^2)\to$ $\to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывно и для него имеет место оценка*

$$\|B_2(u,g)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_4M\|g\|_{L_2(0,T;V^2)}. \tag{23}$$

Доказательства свойств 1 и 2 леммы представлены в статье [8], доказательство свойства 3 содержится в [14]. Свойства операторов B_1, B_2 являются частными случаями для аналогичных операторов из работы [8].

Лемма 5. *Пусть функция* $u\in C([0,T],V^3)$ *фиксирована и* $Z_u\in C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^n)$ *— найденное по* u *решение задачи (14). Отображение* $C(\cdot,Z_u):L_2(0,T;V^2)\to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывно и для него имеет место неравенство*

$$\|C(g,Z_u)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_5\|g\|_{L_2(0,T;V^2)}. \tag{24}$$

Доказательство. По определению $C(\cdot,Z_u)$ для любой функции $g\in L_2(0,T;V^1)$ при почти всех $t\in[0,T]$ и для любой $\varphi\in V^1$ имеем

$$|\langle C(g,Z_u)(t),\varphi\rangle|=\left|\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_\Omega\Delta g(s,Z_u(s,t,x))\varphi\,dx\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int\limits_0^te^{\alpha_i(t-s)}\left(\int\limits_\Omega|\Delta g(s,Z_u(s;t,x))|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega|\varphi|^2\,dx\right)^{1/2}ds.$$

В первом интеграле в правой части этого соотношения сделаем замену переменной $y=$ $=Z_u(s;t,x)$ (обратная замена $x=Z_u(t;s,y)$). Так как $\operatorname{div}u=0$, то $\det\partial Z_u/\partial x=1$. Поэтому

$$\int\limits_\Omega|\Delta g(s,Z_u(s;t,x))|^2\,dx=\int\limits_\Omega|\Delta g(s,y)|^2\,dy=\|\Delta g(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}.$$

Следовательно, пользуясь тем, что $\alpha_i < 0$, $i = \overline{1, L}$, имеем

$$|\langle C(g, Z_u)(t), \varphi\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \max_{s\in[0,t]} e^{\alpha_i(t-s)} \int_0^t \|\Delta g(s)\|_{L_2(\Omega)^n}\, ds\, \|\varphi\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant$$
$$\leqslant C_6\sqrt{t} \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \biggl(\int_0^t \|g(s)\|^2_{V^2}\, ds\biggr)^{1/2} \|\varphi\|_{V^1} \leqslant C_7 \|g\|_{L_2(0,T;V^2)} \|\varphi\|_{V^1}.$$

Отсюда при почти всех $t \in (0, T)$ получим неравенство $\|C(g, Z_u)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_7\|g\|_{L_2(0,T;V^2)}$. Возводя его в квадрат и интегрируя по $[0, T]$, получаем (24) с константой $C_5 = C_7\sqrt{T}$, из которой в силу линейности следует непрерывность оператора $C(\cdot, Z_u)$. Лемма доказана.

Теорема 9. *Пусть функция $u \in C([0,T], V^3)$ фиксирована, $\|u\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant M$. Для любых функций $b \in V^5$, $f \in L_2(0,T;V^0)$ при каждом $\xi \in [0,1]$ существует единственное решение $v \in W_2$ задачи (15), (16).*

Доказательство. Как уже было отмечено ранее, разрешимость задачи (15), (16) эквивалентна существованию решения операторного уравнения (17), удовлетворяющего начальному условию (16). В силу леммы 4 оператор $(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A) : L_2(0,T;V^5) \to L_2(0,T;V^{-1})$ обратим и обратный к нему оператор непрерывен. Применив оператор $(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)^{-1}$ к операторному уравнению (17), получим эквивалентное операторное уравнение

$$w' + \xi(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)^{-1}\bigl(\nu Aw - B_1(u, w) + \varkappa B_2(u, w) - C(w, Z_u)\bigr) =$$
$$= \xi(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)^{-1} f, \quad \xi \in [0,1]. \tag{25}$$

Отметим, что при $\xi = 0$ операторное уравнение (25) и начальное условие (16) имеют вид

$$w' = 0, \quad w(0) = 0.$$

Таким образом, при $\xi = 0$ задача (15), (16) имеет только нулевое решение.

Пусть теперь $\xi \in (0,1]$. Докажем существование решения $v \in W_2$ операторного уравнения (25), удовлетворяющего начальному условию (16). Для этого воспользуемся теоремой 3. Проверим выполнение её условий. Очевидно, что оператор $G : L_2(0,T;V^5) \to L_2(0,T;V^5)$:

$$G = \xi(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)^{-1}\bigl(\nu A - B_1(u, \cdot) + \varkappa B_2(u, \cdot) - C(\cdot, Z_u)\bigr)$$

является оператором Вольтерры (см. определение 1). Проверим выполнение условия (7). В силу линейности G покажем, что для любой $h \in L_2(0,T;V^5)$ имеет место неравенство

$$\|Gh\|_{L_2(0,T;V^5)} \leqslant L\|h\|_{L_2(0,T;V^5)}.$$

Для любой функции $h \in L_2(0,T;V^5)$ в силу определения оператора G, а также неравенств (18), (21)–(24), имеем

$$\|Gh\|_{L_2(0,T;V^5)} = \|\xi(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)^{-1}\bigl(\nu Ah - B_1(u,h) + \varkappa B_2(u,h) - C(h, Z_u)\bigr)\|_{L_2(0,T;V^5)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\xi}{\varepsilon}(\nu\|Ah\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B_1(u,h)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \varkappa\|B_2(u,h)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|C(\cdot, Z_u)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\xi}{\varepsilon}(\nu\|h\|_{L_2(0,T;V^1)} + C_3M\|h\|_{L_2(0,T;V^1)} + \varkappa C_4 M\|h\|_{L_2(0,T;V^2)} + C_5\|h\|_{L_2(0,T;V^2)}) \leqslant$$
$$\leqslant C_8\frac{\xi}{\varepsilon}\|h\|_{L_2(0,T;V^5)}.$$

Следовательно, по теореме 3 существует единственное решение $w \in W_2$ задачи (15), (16). Теорема доказана.

Этап 3. Таким образом, построено семейство отображений T, которое числу $\xi \in [0,1]$ и функции $u \in C([0,T],V^3)$ ставит в соответствие функцию $w \in W_2$. Установим теперь непрерывность отображения $T : [0,1] \times \overline{B_M} \to W_2$, где B_M — шар в $C([0,T],V^3)$ радиуса M с центром в нуле. Имеет место следующая

Лемма 6. *Отображение* $T : [0,1] \times \overline{B_M} \to W_2$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\{u^k\}$ — последовательность функций, $u^k \in \overline{B_M} \subset C([0,T],V^3)$, которая сходится в $C([0,T],V^3)$ к функции u^* при $k \to \infty$. Пусть ξ_k — последовательность чисел из $[0,1]$, которая сходится к ξ_* при $k \to \infty$. Обозначим $w^k = T(\xi_k, u^k)$. Покажем, что w^k сходится в пространстве W_2 к функции $w^* = T(\xi_*, u^*)$ при $k \to \infty$.

По построению функция w^k является решением задачи

$$(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)(w^k)' + \xi_k \nu A w^k - \xi_k B_1(u^k, w^k) + \xi_k \varkappa B_2(u^k, w^k) - \xi_k C(w^k, Z_{u^k}) = \xi_k f, \tag{26}$$

$$Z_{u^k}(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u^k(s, Z_{u^k}(s; t, x))\, ds, \tag{27}$$

$$w^k(0) = \xi_k b. \tag{28}$$

Соответственно w^* является решением задачи

$$(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)(w^*)' + \xi_* \nu A w^* - \xi_* B_1(u^*, w^*) + \xi_* \varkappa B_2(u^*, w^*) - \xi_* C(w^*, Z_{u^*}) = \xi_* f, \tag{29}$$

$$Z_{u^*}(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u^*(s, Z_{u^*}(s; t, x))\, ds, \tag{30}$$

$$w^*(0) = \xi_* b. \tag{31}$$

Вычитая (29) из (26) и преобразуя стандартным образом слагаемые, получаем

$$\begin{gathered}(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)(w^k - w^*)' + \xi_k \nu A(w^k - w^*) + (\xi_k - \xi_*)\nu A w^* - \\ - (\xi_k - \xi_*) B_1(u^*, w^*) + \xi_k B_1(u^k - u^*, w^*) - \xi_k B_1(u^k, w^k - w^*) + \\ + (\xi_k - \xi_*)\varkappa B_2(u^*, w^*) - \xi_k \varkappa B_2(u^k - u^*, w^*) + \xi_k \varkappa B_2(u^k, w^k - w^*) - \\ - (\xi_k - \xi_*) C(w^k, Z_{u^k}) - \xi_* C(w^k - w^*, Z_{u^k}) - \xi_* \bigl(C(w^*, Z_{u^k}) - C(w^*, Z_{u^*})\bigr) = (\xi_k - \xi_*) f.\end{gathered} \tag{32}$$

Применим последнее равенство к функции $w^k - w^*$. Преобразовав первые два слагаемых при помощи формулы Грина, будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^1} + \\ + \xi_k \nu \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^1} + (\xi_k - \xi_*)\nu \langle A w^*(t), (w^k - w^*)(t)\rangle - \\ - (\xi_k - \xi_*)\langle B_1(u^*(t), w^*(t)), (w^k - w^*)(t)\rangle + \xi_k \langle B_1((u^k - u^*)(t), w^*(t)), (w^k - w^*)(t)\rangle + \\ + (\xi_k - \xi_*)\varkappa \langle B_2(u^*(t), w^*(t)), (w^k - w^*)(t)\rangle - \xi_k \varkappa \langle B_2((u^k - u^*)(t), w^*(t)), (w^k - w^*)(t)\rangle + \\ + \xi_k \varkappa \langle B_2(u^k(t), (w^k - w^*)(t)), (w^k - w^*)(t)\rangle - (\xi_k - \xi_*)\langle C(w^k(t), Z_{u^k}), (w^k - w^*)(t)\rangle - \\ - \xi_* \langle C((w^k - w^*)(t), Z_{u^k}), (w^k - w^*)(t)\rangle - \xi_* \langle (C(w^*(t), Z_{u^k}) - C(w^*(t), Z_{u^*}))\,, (w^k - w^*)(t)\rangle = \\ = (\xi_k - \xi_*)\langle f(t), (w^k - w^*)(t)\rangle.\end{gathered} \tag{33}$$

Здесь мы воспользовались равенством $\langle B_1(h, g), g\rangle = 0$ (см. [8]).

Перенесём в правую часть оставшиеся слагаемые и оценим её сверху при помощи неравенств Гёльдера и Коши. Для первого слагаемого в силу определения оператора A имеем

$$|(\xi_k-\xi_*)\nu\langle Aw^*(t),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant|\xi_k-\xi_*|\nu\left|\int\limits_\Omega\nabla(w^*(t)):\nabla(w^k-w^*)(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\nu\|w^*(t)\|_{V^1}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant\frac{1}{2}|\xi_k-\xi_*|^2\nu^2\|w^*(t)\|_{V^1}^2+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}^2.$$

Для следующего слагаемого в силу определения отображения B_1 получим

$$|(\xi_k-\xi_*)\langle B_1(u^*(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant|\xi_k-\xi_*|\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i^*(t)w_j^*(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\sum_{i,j=1}^n\|u_i^*(t)\|_{C(\overline{\Omega})}\|w_j^*(t)\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_9|\xi_k-\xi_*|\|u^*(t)\|_{V^3}\|w^*(t)\|_{V^1}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_9^2}{2}|\xi_k-\xi_*|^2\|u^*(t)\|_{V^3}^2\|w^*(t)\|_{V^1}^2+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}^2.$$

Аналогично для следующего слагаемого в силу $\xi_k\leqslant1$ имеем

$$|\xi_k\langle B_1((u^k-u^*)(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant\xi_k\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n(u^k-u^*)_i(t)w_j^*(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_9\|(u^k-u^*)(t)\|_{V^3}\|w^*(t)\|_{V^1}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant\frac{C_9^2}{2}\|(u^k-u^*)(t)\|_{V^3}^2\|w^*(t)\|_{V^1}^2+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}^2.$$

Для следующего слагаемого в силу определения B_2 запишем

$$\left|(\xi_k-\xi_*)\varkappa\big\langle B_2(u^*(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\big\rangle\right|\leqslant|\xi_k-\xi_*|\varkappa\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i^*(t)\Delta w_j^*(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\varkappa\sum_{i,j=1}^n\|u_i^*(t)\|_{C(\overline{\Omega})}\|\Delta w_j^*(t)\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\varkappa|\xi_k-\xi_*|\|u^*(t)\|_{V^3}\|w^*(t)\|_{V^2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{10}^2\varkappa^2}{2}|\xi_k-\xi_*|^2\|u^*(t)\|_{V^3}^2\|w^*(t)\|_{V^2}^2+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}^2.$$

Аналогично для второго и третьего слагаемых, содержащих B_2, получим

$$|\xi_k\varkappa\langle B_2((u^k-u^*)(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant\xi_k\varkappa\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n(u^k-u^*)_i(t)\Delta w_j^*(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{10}^2\varkappa^2}{2}\|(u^k-u^*)(t)\|_{V^3}^2\|w^*(t)\|_{V^2}^2+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}^2;$$

$$|\xi_k\varkappa\langle B_2(u^k(t),(w^k-w^*)(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant$$

$$\leqslant\xi_k\varkappa\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i^k(t)\Delta(w^k-w^*)_j(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant C_{10}\varkappa\|u^k(t)\|_{V^3}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^2}^2.$$

Для следующего слагаемого аналогично доказательству неравенства (24), применяя неравенство Гёльдера, делая замену переменной $y = Z_{u^k}(s;t,x)$ в первом из полученных сомножителей и пользуясь тем, что $\alpha_i < 0$, $i = \overline{1,L}$, получаем

$$|(\xi_k - \xi_*)\langle C(w^k(t), Z_{u^k}), (w^k - w^*)(t)\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi_k - \xi_*| \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t e^{\alpha_i(t-s)} \left| \int_\Omega \Delta w^k(s, Z_{u^k}(s,t,x))(w^k - w^*)(t)\, dx \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant |\xi_k - \xi_*| \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t e^{\alpha_i(t-s)} \left(\int_\Omega \left|\Delta w^k(s, Z_{u^k}(s,t,x))\right|^2 dx \right)^{1/2} \|(w^k - w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n} ds \leqslant$$

$$\leqslant |\xi_k - \xi_*| \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \max_{s\in[0,t]} e^{\alpha_i(t-s)} \int_0^t \left(\int_\Omega |\Delta w^k(s,y)|^2 dy \right)^{1/2} ds\, \|(w^k - w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_7 |\xi_k - \xi_*| \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t \|w^k(s)\|_{V^2}\, ds\, \|(w^k - w^*)(t)\|_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{T} C_7 |\xi_k - \xi_*| \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \|w^k\|_{L_2(0,T;V^2)} \|(w^k - w^*)(t)\|_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} |\xi_k - \xi_*|^2 \|w^k\|^2_{L_2(0,T;V^2)} + \frac{1}{2} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Аналогично для следующего слагаемого в силу неравенства $\xi_k \leqslant 1$

$$|\xi_* \langle C((w^k - w^*)(t), Z_{u^k}), (w^k - w^*)(t)\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \xi_* \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t e^{\alpha_i(t-s)} \left| \int_\Omega \Delta(w^k - w^*)(s, Z_{u^k}(s,t,x))(w^k - w^*)(t)\, dx \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} \int_0^t \|(w^k - w^*)(s)\|^2_{V^2} ds + \frac{1}{2} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Для следующей разности аналогично предыдущему, пользуясь теоремой о среднем (см., например, [21, с. 176]) и неравенством (8), будем иметь

$$\left|\xi_* \left\langle \big(C(w^*(t), Z_{u^k}) - C(w^*(t), Z_{u^*})\big), (w^k - w^*)(t) \right\rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \xi_* \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t e^{\alpha_i(t-s)} \left| \int_\Omega \big(\Delta w^*(s, Z_{u^k}(s,t,x)) - \Delta w^*(s, Z_{u^*}(s,t,x))\big)(w^k - w^*)(t)\, dx \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t e^{\alpha_i(t-s)} \int_\Omega \left|\Delta w^*(s, Z_{u^k}(s,t,x)) - \Delta w^*(s, Z_{u^*}(s,t,x))\right| |(w^k - w^*)(t)|\, dx\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t e^{\alpha_i(t-s)} \int_\Omega \max_{z\in\Omega} \left| \frac{\partial \Delta w^*}{\partial z}(s,z) \right| \left| Z_{u^k}(s,t,x) - Z_{u^*}(s,t,x) \right| |(w^k - w^*)(t)|\, dx\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t e^{\alpha_i(t-s)} \|w^*(s)\|_{C^3(\overline{\Omega})^n} \left(\int_\Omega |Z_{u^k}(s,t,x) - Z_{u^*}(s,t,x)|^2 dx \right)^{1/2} \|(w^k - w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n} ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t e^{\alpha_i(t-s)} \|w^*(s)\|_{C^3(\overline{\Omega})^n} C_{12} \int_t^s \|u^k(\tau) - u^*(\tau)\|_{L_2(\Omega)^n}\, d\tau \times$$

$$\times \exp\biggl\{C_{13}\biggl|\int_t^s \|u^*(\tau)\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}\, d\tau\biggr|\biggr\}\, ds\, \|(w^k - w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} \sum_{i=1}^{L} |\beta_i| \int_0^t \|w^*(s)\|_{C^3(\overline{\Omega})^n}\, ds \int_0^t \|u^k(\tau) - u^*(\tau)\|_{L_2(\Omega)^n}\, d\tau \times$$

$$\times \exp\bigl\{C_{14} T \|u^*\|_{C([0,T],V^3)}\bigr\} \|(w^k - w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} \|w^*\|_{C([0,T],V^5)} \|u^k - u^*\|_{C([0,T],V^3)} \|(w^k - w^*)(t)\|_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{15}^2}{2} \|w^*\|^2_{C([0,T],V^5)} \|u^k - u^*\|^2_{C([0,T],V^3)} + \frac{1}{2} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Здесь мы для упрощения изложения воспользовались неравенством $\|u^*\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant M$.

Наконец, для последнего слагаемого имеем

$$|(\xi_k - \xi_*)\langle f(t), (w^k - w^*)(t)\rangle| \leqslant |\xi_k - \xi_*| \|f(t)\|_{V^{-1}} \|(w^k - w^*)(t)\|_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} |\xi_k - \xi_*|^2 \|f(t)\|^2_{V^{-1}} + \frac{1}{2} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Таким образом, из (33) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant |\xi_k - \xi_*|^2 \biggl(\frac{\nu^2}{2} \|w^*(t)\|^2_{V^1} + \frac{C_9^2}{2} \|u^*(t)\|^2_{V^3} \|w^*(t)\|^2_{V^1} + \frac{C_{10}^2 \varkappa^2}{2} \|u^*(t)\|^2_{V^3} \|w^*(t)\|^2_{V^2} +$$

$$+ C_{11} \|w^k\|^2_{L_2(0,T;V^2)} + \frac{1}{2} \|f(t)\|^2_{V^{-1}}\biggr) + C_{11} \int_0^t \|(w^k - w^*)(s)\|^2_{V^2}\, ds +$$

$$+ C_{10}\varkappa \|u^k(t)\|_{V^3} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^2} + \|(u^k - u^*)(t)\|^2_{V^3} \biggl(\frac{C_{10}^2 \varkappa^2}{2} \|w^*(t)\|^2_{V^2} + \frac{C_9^2}{2} \|w^*(t)\|^2_{V^1}\biggr) +$$

$$+ \frac{C_{15}^2}{2} \|w^*\|^2_{C([0,T],V^5)} \|u^k - u^*\|^2_{C([0,T],V^3)} + \frac{9}{2} \|(w^k - w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Умножим последнее неравенство на два и проинтегрируем по переменной t от 0 до τ, $\tau \in [0,T]$. При этом оценим часть слагаемых в правой части, воспользовавшись тем, что в силу теоремы 3 решения задач (26)–(28) и (29)–(31) непрерывно зависят от правой части и начального условия и, следовательно, ограничены. Получим

$$\|(w^k - w^*)(\tau)\|^2_{V^0} + \varepsilon \|(w^k - w^*)(\tau)\|^2_{V^3} + \varkappa \|(w^k - w^*)(\tau)\|^2_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant \|b\|^2_{V^0} |\xi_k - \xi_*|^2 + \varepsilon \|b\|^2_{V^3} |\xi_k - \xi_*|^2 + \varkappa \|b\|^2_{V^1} |\xi_k - \xi_*|^2 + \int_0^\tau \Bigl(\nu^2 \|w^*(t)\|^2_{V^1} + C_9^2 \|u^*(t)\|^2_{V^3} \|w^*(t)\|^2_{V^1} +$$

$$+ C_{10}^2 \varkappa^2 \|u^*(t)\|^2_{V^3} \|w^*(t)\|^2_{V^2} + 2C_{11} \|w^k\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \|f(t)\|^2_{V^{-1}}\Bigr)\, dt\, |\xi_k - \xi_*|^2 +$$

$$+ 2C_{11} \int_0^\tau \int_0^t \|(w^k - w^*)(s)\|^2_{V^2}\, ds\, dt + \int_0^\tau \bigl(C_9^2 \|w^*(t)\|^2_{V^1} + C_{10}^2 \varkappa^2 \|w^*(t)\|^2_{V^2}\bigr) \|(u^k - u^*)(t)\|^2_{V^3}\, dt +$$

$$+C_{10}\varkappa\int\limits_0^\tau \|u^k(t)\|_{V^3}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^2}\,dt+C_{15}^2\|w^*\|^2_{C([0,T],V^5)}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)}\int\limits_0^\tau dt+$$

$$+9\int\limits_0^\tau \|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}\,dt\leqslant C_{16}|\xi_k-\xi_*|^2+C_{17}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)}+\frac{C_{18}}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \varepsilon\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^3}\,dt.$$

В силу неотрицательности слагаемых в левой части при всех $\tau\in[0,T]$

$$\varkappa\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^1}+\varepsilon\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^3}\leqslant$$

$$\leqslant C_{16}|\xi_k-\xi_*|^2+C_{17}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)}+\frac{C_{18}}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\Big(\varkappa\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}+\varepsilon\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^3}\Big)\,dt.$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла–Беллмана (теорема 4) при всех $\tau\in[0,T]$ имеем

$$\varkappa\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^1}+\varepsilon\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^3}\leqslant$$

$$\leqslant(C_{16}|\xi_k-\xi_*|^2+C_{17}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)})\exp\bigg\{\frac{C_{18}}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau d\tau\bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant(C_{16}|\xi_k-\xi_*|^2+C_{17}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)})\exp\bigg\{\frac{TC_{18}}{\varepsilon}\bigg\}. \tag{34}$$

Правая часть (34) не зависит от τ, поэтому можно перейти к максимуму по $\tau\in[0,T]$. Тогда в силу элементарного неравенства $(a^2+b^2)\leqslant(a+b)^2$, которое имеет место для любых неотрицательных a, b, непосредственно получаем, что

$$\sqrt{\varepsilon}\|w^k-w^*\|_{C([0,T],V^3)}\leqslant C_{19}(|\xi_k-\xi_*|+\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}). \tag{35}$$

Далее из (32), оставляя в левой части только первое слагаемое и пользуясь тем, что норма суммы не превосходит суммы норм, имеем

$$\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$

$$\leqslant\xi_k\nu\|A(w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+|\xi_k-\xi_*|\nu\|Aw^*\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$

$$+|\xi_k-\xi_*|\,\|B_1(u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_k\|B_1(u^k-u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$

$$+\xi_k\|B_1(u^k,w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+|\xi_k-\xi_*|\varkappa\|B_2(u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$

$$+\xi_k\varkappa\|B_2(u^k-u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_k\varkappa\|B_2(u^k,w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$

$$+|\xi_k-\xi_*|\|C(w^k,Z_{u^k})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_*\|C(w^k-w^*,Z_{u^k})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$

$$+\xi_*\,\|C(w^*,Z_{u^k})-C(w^*,Z_{u^*})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+|\xi_k-\xi_*|\,\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{36}$$

Оценим правую часть (36). Для первых двух слагаемых в силу (18) имеет место соотношение

$$\nu\xi_k\|A(w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\nu|\xi_k-\xi_*|\|Aw^*\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$

$$\leqslant\nu\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+|\xi_k-\xi_*|\nu\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Для следующего слагаемого в силу оценки (22) получим

$$|\xi_k-\xi_*|\|B_1(u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant|\xi_k-\xi_*|C_3M\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Для следующего слагаемого, аналогично доказательству неравенства (22), имеем

$$\xi_k\|B_1(u^k-u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_3\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Для последнего слагаемого с B_1 в силу (22) получаем

$$\xi_k\|B_1(u^k,w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_3M\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Аналогично для следующих трёх слагаемых с B_2 в силу неравенства (23) запишем

$$|\xi_k-\xi_*|\varkappa\|B_2(u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_k\varkappa\|B_2(u^k-u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\xi_k\varkappa\|B_2(u^k,w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant|\xi_k-\xi_*|\varkappa C_4M\|w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}+$$
$$+\varkappa C_4\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\|w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}+\varkappa C_4M\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}.$$

Для следующих двух слагаемых в силу (24) получим

$$|\xi_k-\xi_*|\|C(w^k,Z_{u^k})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_*\|C(w^k-w^*,Z_{u^k})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$
$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|C_5\|w^k\|_{L_2(0,T;V^2)}+C_5\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}.$$

Для предпоследнего слагаемого, аналогично оценке подобного слагаемого выше, имеем

$$\xi_*\,\|C(w^*,Z_{u^k})-C(w^*,Z_{u^*})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_{15}\|w^*\|_{C([0,T],V^5)}\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}.$$

В силу неравенства (20) левую часть (36) можно оценить следующим образом:

$$\varepsilon\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Таким образом, из (36) получаем неравенство

$$\varepsilon\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant(\nu+C_3M)\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+(\varkappa C_4M+C_5)\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}+$$
$$+\big((\nu+C_3M)\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+(\varkappa C_4M+C_5)\|w^k\|_{L_2(0,T;V^2)}+\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\big)|\xi_k-\xi_*|+$$
$$+\big(C_3\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+\varkappa C_4\|w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}+C_{15}\|w^*\|_{C([0,T],V^5)}\big)\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}.$$

Из этого неравенства в силу непрерывности вложений $L_2(0,T;V^2)\subset L_2(0,T;V^1)$ и $C([0,T],V^3)\subset$ $\subset L_2(0,T;V^2)$ и оценки (35) заключаем, что

$$\varepsilon\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant C_{20}\left(|\xi_k-\xi_*|+\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\right). \tag{37}$$

Поскольку $(w^k-w^*)(t)=(w^k-w^*)(0)+\int_0^t(w^k-w^*)'(s)\,ds$, то

$$\|w^k-w^*\|_{C([0,T],V^5)}\leqslant\|(w^k-w^*)(0)\|_{V^5}+\max_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t\|(w^k-w^*)'(s)\|_{V^5}\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\|(\tau_k-\tau_*)b\|_{V^5}+\int\limits_0^T\|(w^k-w^*)'(s)\|_{V^5}\,ds\leqslant|\tau_k-\tau_*|\|b\|_{V^5}+\sqrt{T}\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}.$$

Из последнего соотношения и из (37) имеем

$$\|w^k-w^*\|_{W_2}=\|w^k-w^*\|_{C([0,T],V^5)}+\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant$$
$$\leqslant|\tau_k-\tau_*|\|b\|_{V^5}+\frac{C_{20}}{\varepsilon}(1+\sqrt{T})\left(|\tau_k-\tau_*|+\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\right).$$

Отсюда следует, что w^k сходится к w^* по норме W_2 при $k\to\infty$. Лемма доказана.

Построенное отображение T не только непрерывно, но и компактно как отображение со значениями в некотором подходящем пространстве. А именно, справедлива следующая

Лемма 7. *Отображение* $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$ *компактно.*

Доказательство. В силу леммы 6 отображение $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to W_2$ непрерывно. Так как вложение $V^5\subset V^3$ компактно, то по теореме 2 вложение $W_2\subset C([0,T],V^3)$ компактно. Таким образом, $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$ компактно как суперпозиция непрерывного и компактного отображений. Лемма доказана.

Этап 4. Докажем теперь, что отображение $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$ не имеет неподвижных точек на границе шара B_R. Для этого покажем сначала, что все неподвижные точки этого отображения удовлетворяют подходящей априорной оценке. Имеет место следующая

Теорема 10. *Если v — неподвижная точка отображения* $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$, *т.е.* $T(\xi,v)=v$ *для некоторого* $\xi\in[0,1]$, *то для него имеют место следующие оценки:*

$$\|v\|^2_{C([0,T],V^2)}\leqslant C_{21}Ke^{TC_{22}};\tag{38}$$

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant C_{23}K;\tag{39}$$

$$\varkappa\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant 2C_{23}K;\tag{40}$$

$$\varepsilon\|v\|_{C([0,T];V^5)}\leqslant C_{24}K+\varepsilon\|b\|_{V^5},\tag{41}$$

где $K=\left(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|b\|^2_{V^0}+2\varkappa\|b\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|b\|^2_{V^2}+\varepsilon\|b\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|b\|^2_{V^4}\right)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что, несмотря на то что по условиям теоремы $v\in C([0,T],V^3)$, по построению отображения T функция v принадлежит пространству W_2 и поэтому указанные оценки имеют для неё смысл.

Сначала получим стандартную энергетическую оценку. Так как v — неподвижная точка отображения T, то v является решением задачи

$$(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)v'+\xi\nu Av-\xi B_1(v,v)+\xi\varkappa B_2(v,v)-\xi C(v,Z_v)=\xi f,\tag{42}$$

$$Z_v(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau v(s,Z_v(s;t,x))\,ds,$$

$$v(0)=\xi b.\tag{43}$$

Применим (42) к функции $(J+\varkappa A)v$:

$$\langle(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)v',(J+\varkappa A)v\rangle+\xi\langle\nu Av,(J+\varkappa A)v\rangle-\xi\langle B_1(v,v),(J+\varkappa A)v\rangle+$$
$$+\xi\langle\varkappa B_2(v,v),(J+\varkappa A)v\rangle-\xi\langle C(v,Z_v),(J+\varkappa A)v\rangle=\xi\langle f,(J+\varkappa A)v\rangle.\tag{44}$$

В силу свойств операторов B_1 и B_2 (см. [8]) имеем

$$-\xi\langle B_1(v,v),(J+\varkappa A)v\rangle+\xi\langle\varkappa B_2(v,v),(J+\varkappa A)v\rangle=0.$$

В силу определения $J+\varepsilon A^3+\varkappa A$ и формулы Грина аналогично предыдущему получаем

$$\langle\left(J+\varepsilon A^3+\varkappa A\right)v',(J+\varkappa A)\,v\rangle=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}+\frac{\varkappa^2}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^4}.$$

Для следующего слагаемого будем иметь

$$\xi\langle \nu A v, (J+\varkappa A)\, v\rangle = \xi\nu\int\limits_{\Omega}\nabla v : \nabla v\, dx + \xi\nu\varkappa\int\limits_{\Omega}\Delta v \Delta v\, dx = \xi\nu\|v(t)\|^2_{V^1}dt + \xi\nu\varkappa\|v(t)\|^2_{V^2}.$$

Последнее слагаемое в левой части в силу неравенства Гёльдера оценим сверху:

$$|\xi\langle C(v, Z_v), (J+\varkappa A)v\rangle| = \xi\left|\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L \beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_{\Omega}\Delta v(s, Z_v(s,t,x))(J+\varkappa A)v(t)\, dx\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s\in[0,t]} e^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L|\beta_i|\biggl(\int\limits_{\Omega}|\Delta v(s, Z_v(s;t,x))|^2\, dx\biggr)^{1/2}\biggl(\int\limits_{\Omega}|(J+\varkappa A)v(t)|^2\, dx\biggr)^{1/2} ds.$$

Сделаем замену $x = Z_v(t;s,y)$ в первом сомножителе и получим

$$|\xi\langle C(v, Z_v), (J+\varkappa A)v\rangle| \leqslant \int\limits_0^t\sum_{i=1}^L|\beta_i|\biggl(\int\limits_{\Omega}|\Delta v(s,y)|^2 dy\biggr)^{1/2}\|(J+\varkappa A)v(t)\|_{V^0}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t\sum_{i=1}^L|\beta_i|\, \|v(s)\|_{V^2}(C_{25}+\varkappa)\|v(t)\|_{V^2}\, ds \leqslant C_{26}(C_{25}+\varkappa)\int\limits_0^t\|v(s)\|_{V^2}\|v(t)\|_{V^2}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant C_{26}(C_{25}+\varkappa)\int\limits_0^t\frac{1}{2}(\|v(s)\|^2_{V^2}+\|v(t)\|^2_{V^2})\, ds \leqslant \frac{C_{26}(C_{25}+\varkappa)}{2}\biggl(\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^2}\, dt + t\|v(t)\|^2_{V^2}\biggr).$$

Оценим правую часть:

$$|\xi\langle f, (J+\varkappa A)v\rangle| \leqslant \xi\|f(t)\|_{V^0}\|(J+\varkappa A)v(t)\|_{V^0}dt \leqslant$$

$$\leqslant (C_{25}+\varkappa)\|f(t)\|_{V^0}\|v(t)\|_{V^2}dt \leqslant \frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|f(t)\|^2_{V^0}.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1} + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3} + \frac{\varepsilon\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^4} +$$

$$+\xi\nu\|v(t)\|^2_{V^1}dt + \xi\nu\varkappa\|v(t)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{C_{26}(C_{25}+\varkappa)}{2}\biggl(\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^2}\, dt + t\|v(t)\|^2_{V^2}\biggr) +$$

$$+\frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|f(t)\|^2_{V^0}.$$

Интегрируя его по t от 0 до τ и оценивая в полученном неравенстве левую часть снизу, а правую сверху, имеем

$$\frac{\varkappa^2}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \frac{(C_{25}+\varkappa)(TC_{26}+1)}{2}\int\limits_0^t\|v(t)\|^2_{V^2}\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\|b\|^2_{V^0} + \varkappa\|b\|^2_{V^1} + \frac{\varkappa^2}{2}\|b\|^2_{V^2} + \frac{\varepsilon}{2}\|b\|^2_{V^3} + \frac{\varepsilon\varkappa}{2}\|b\|^2_{V^4}.$$

Таким образом, имеет место неравенство $\|v(\tau)\|^2_{V^2} \leqslant C_{21}K + C_{22}\int_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^2}\,dt$, из которого в силу неравенства Гроноулла–Беллмана при всех $\tau \in [0,T]$ получаем

$$\|v(\tau)\|^2_{V^2} \leqslant C_{21}Ke^{\tau C_{22}} \leqslant C_{21}Ke^{TC_{22}}. \tag{45}$$

Переходя к максимуму по $\tau \in [0,T]$ в левой части (45), получаем (38).

Оценим производную по времени. Так как v — неподвижная точка отображения T, то v удовлетворяет (42). Отметим, что операторы в (42) не являются линейными. Но для наших целей потребуются только следующие оценки сверху:

$$\|B_1(v,v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{27}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}; \quad \|B_2(v,v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{28}\|v\|^2_{C([0,T],V^2)}.$$

Здесь константы C_{27} и C_{28} не зависят от v. Доказательство этих неравенств идейно не отличается от получения подобных оценок в лемме 4 и приведено в [8].

Из (42) в силу приведённых неравенств, оценок (24), (38) и элементарного неравенства $a \leqslant 1 + a^2$ получаем

$$\begin{gathered}\big\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)v'\big\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \|\xi f - \xi\nu Av + \xi B_1(v,v) - \xi\varkappa B_2(v,v) + \xi C(v,Z_v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B_1(v,v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + \varkappa\|B_2(v,v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|C(v,Z_v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \nu\|v\|_{C([0,T];V^1)} + C_{27}\|v\|^2_{C([0,T];V^1)} + \varkappa C_{28}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} + C_5\|v\|_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_{23}K.\end{gathered}$$

В силу левой части неравенства (20) имеем $\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^5)} \leqslant \|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Из двух последних неравенств и следует требуемое неравенство (39).

Аналогично предыдущему из (42) имеем

$$\begin{gathered}\big\|(J+\varkappa A)v'\big\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \big\|-\varepsilon A^3v' + \xi f - \xi\nu Av + \xi B_1(v,v) - \xi\varkappa B_2(v,v) + \xi C(v,Z_v)\big\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant \|\varepsilon A^3 v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{23}K \leqslant \varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^5)} + C_{23}K \leqslant 2C_{23}K.\end{gathered}$$

В силу неравенства (19) справедлива оценка $\varkappa\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \|(J+\varkappa A)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Из двух последних неравенств следует (40).

Для доказательства неравенства (41) заметим, что при всех $t \in [0,T]$ имеет место равенство $v(s) = v(0) + \int_0^t v'(s)ds$. Тогда получаем, что

$$\|v\|_{C([0,T],V^5)} \leqslant \|\xi b\|_{V^5} + \max_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t \|v'(s)\|_{V^5}\,ds \leqslant \|b\|_{V^5} + \sqrt{T}\,\|v'\|^2_{L_2(0,T;V^5)},$$

а отсюда, в силу (39), следует (41). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно заключаем, что если v — неподвижная точка отображения $T : [0,1] \times \overline{B_M} \to C([0,T],V^3)$, то

$$\|v\|_{W_2} = \|v\|_{C([0,T];V^5)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^5)} \leqslant \frac{C_{23}+C_{24}}{\varepsilon}K + \|b\|_{V^5}.$$

Так как вложение $W_2 \subset C([0,T],V^3)$ непрерывно, то $\|v\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant C_{29}\|v\|_{W_2}$. Следовательно, если v — неподвижная точка отображения T, то

$$\|v\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant C_{30} = C_{29}\left(\frac{C_{23}+C_{24}}{\varepsilon}K + \|b\|_{V^5}\right).$$

Тогда, положив $M=C_{30}+1$, получим, что отображение $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$ не имеет неподвижных точек на границе шара B_M.

Этап 5. Поскольку $T(0,\cdot)\equiv 0$ и $0\in B_M$, то выполнено и последнее условие теоремы 1. Следовательно, отображение $T(1,\cdot)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку, т.е. существует хотя бы одно решение аппроксимационной задачи (11)–(13). Теорема 8 доказана.

7. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Перейдём к пределу при $\varepsilon\to 0$ в аппроксимационной задаче (11)–(13). Поскольку пространство V^5 плотно в V^2, то для каждого $a\in V^2$ существует последовательность $b_m\in V^5$, сходящаяся к a по норме V^2. Если $a\equiv 0$, то положим $b_m\equiv 0$, $\varepsilon_m=1/m$. Если же $\|a\|_{V^2}\neq 0$, то, начиная с некоторого номера, $\|b_m\|_{V^4}\neq 0$ и положим $\varepsilon_m=1/(m\|b_m\|^2_{V^4})$. Таким образом, последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m\to+\infty$ и имеет место неравенство

$$\varepsilon_m\|b_m\|^2_{V^4}\leqslant 1. \tag{46}$$

В силу теоремы 8 для каждых ε_m и b_m существует $v_m\in W_2\subset W_1$ — решение аппроксимационной задачи (11)–(13). Следовательно, каждое v_m удовлетворяет для всех $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ равенству

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega v_m'\varphi\,dx-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n(v_m)_i(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\varkappa\int\limits_\Omega\nabla v_m':\nabla\varphi\,dx+\\ +\varepsilon\int\limits_\Omega\nabla(\Delta^2v_m'):\nabla\varphi\,dx+\nu\int\limits_\Omega\nabla v_m:\nabla\varphi\,dx+\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n(v_m)_i\Delta(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-\\ -\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_\Omega\Delta v_m(s,z_m(s,t,x))\varphi\,dx\,ds=\int\limits_\Omega f\varphi\,dx,\end{gathered} \tag{47}$$

где z_m — решение задачи $z_m(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v_m(s,z_m(s;t,x))\,ds$, удовлетворяющее начальному условию

$$v_m|_{t=0}(x)=b_m(x),\quad x\in\Omega. \tag{48}$$

В силу оценок (38)–(40) и неравенства (46) v_m удовлетворяет оценкам

$$\|v_m\|^2_{C([0,T],V^2)}\leqslant C_{21}\big(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|b_m\|^2_{V^0}+2\varkappa\|b_m\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|b_m\|^2_{V^2}+C_{31}+\varkappa\big)e^{TC_{22}}; \tag{49}$$

$$\varepsilon_m\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant C_{23}\big(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|b_m\|^2_{V^0}+2\varkappa\|b_m\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|b_m\|^2_{V^2}+C_{31}+\varkappa\big); \tag{50}$$

$$\varkappa\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant 2C_{23}\big(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|b_m\|^2_{V^0}+2\varkappa\|b_m\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|b_m\|^2_{V^2}+C_{31}+\varkappa\big). \tag{51}$$

В силу непрерывности вложения $C([0,T],V^2)\subset L_2(0,T;V^2)$ и неравенства (49) без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) получим, что

$$v_m\rightharpoonup v\quad\text{слабо в } L_2(0,T;V^2)\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

Аналогично в силу неравенства (51) без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) имеем, что

$$v_m'\rightharpoonup v'\quad\text{слабо в } L_2(0,T;V^1)\quad\text{при}\quad m\to+\infty. \tag{52}$$

Тогда при $m\to+\infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu\int_\Omega \nabla v_m:\nabla\varphi\,dx\to\nu\int_\Omega \nabla v:\nabla\varphi\,dx\quad \text{для любого } \varphi\in V^1;$$

$$\int_\Omega v_m'\varphi dx\to\int_\Omega v'\varphi dx\quad \text{для любого } \varphi\in V^1;$$

$$\varkappa\int_\Omega \nabla v_m':\nabla\varphi dx\to\varkappa\int_\Omega \nabla v':\nabla\varphi dx\quad \text{для любого } \varphi\in V^1.$$

По теореме 2 имеет место компактное вложение $W_1\subset C([0,T],V^1)$. Следовательно, как и ранее, без ограничения общности последовательность $\{v_m\}$ сходится сильно в пространстве $C([0,T],V^1)$ к той же самой функции v. Тогда для любой $\varphi\in V^1$

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n (v_m)_i(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\to\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

Далее, в силу компактности вложения $W_1\subset C([0,T],C(\overline{\Omega})^n)$, имеет место следующая сильная сходимость: $v_m\to v$ в $C([0,T],C(\overline{\Omega})^n)$. Отсюда в силу слабой сходимости $v_m\rightharpoonup v$ в пространстве $L_2(0,T;V^2)$ получим

$$\varkappa\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n (v_m)_i\Delta(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\to\varkappa\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_i\Delta v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

В силу (50), как и выше, без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) заключаем, что существует функция $u\in L_2(0,T;V^5)$ такая, что $\varepsilon_m v_m'\rightharpoonup u$ слабо в $L_2(0,T;V^5)$ при $m\to+\infty$. Следовательно,

$$\varepsilon_m\int_\Omega\nabla\left(\Delta^2 v_m'\right):\nabla\varphi\,dx\to\int_\Omega\nabla\left(\Delta^2 u\right):\nabla\varphi\,dx\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

Однако последовательность $\varepsilon_m A^3 v_m'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-5}. На самом деле для любых $\chi\in\mathfrak{D}([0,T])$, $\varphi\in V^5$, используя формулу Грина и слабую сходимость (52), получаем

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\varepsilon_m\int_0^T\int_\Omega\nabla(\Delta^2 v_m'):\nabla\varphi\,dx\,\chi(t)\,dt\right|=\lim_{m\to+\infty}\varepsilon_m\lim_{m\to+\infty}\left|\int_0^T\int_\Omega\nabla v_m'(t):\nabla(\Delta^2\varphi)\,dx\,\chi(t)\,dt\right|=$$
$$=\left|\int_0^T\int_\Omega\nabla v'(t):\nabla(\Delta^2\varphi)\,dx\,\chi(t)\,dt\right|\lim_{m\to+\infty}\varepsilon_m=0.$$

В силу единственности слабого предела $\varepsilon_m\int_\Omega\nabla(\Delta^2 v_m'):\nabla\varphi\,dx\to0$ при $m\to+\infty$.

Наконец, в силу леммы 3 при $m\to+\infty$ имеет место слабая сходимость

$$\int_0^t\sum_{i=1}^L\beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\Delta v_m(s,z_m(s,t,x))\varphi\,dx\,ds\to\int_0^t\sum_{i=1}^L\beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\Delta v(s,z(s,t,x))\varphi\,dx\,ds.$$

Таким образом, переходя в равенстве (47) к пределу при $m\to+\infty$, получаем, что предельная функция v удовлетворяет тождеству (10).

В силу сильной сходимости $v_m\to v$ в $C([0,T],V^1)$ получаем, что v_m сходится к v поточечно на отрезке $[0,T]$. Отсюда, переходя в (48) к пределу при $m\to+\infty$, в силу выбора b_m получаем, что предельная функция v удовлетворяет начальному условию $v(0)=a$. Теорема 7 доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00091).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павловский, В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В.А. Павловский // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809–812.
2. Амфилохиев, В.Б. Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах / В.Б. Амфилохиев, В.А. Павловский // Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного ин-та. — 1976. — Т. 104. — С. 3–5.
3. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева, Я.С. Ходорковский // Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного ин-та. — 1975. — Т. 96. — С. 3–9.
4. Осколков, А.П. О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — Т. 27. — С. 145–160.
5. Осколков, А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 98–136.
6. Осколков, А.П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1975. — Т. 52. — С. 128–157.
7. Ладыженская, О.А. О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье–Стокса и их исправлениях / О.А. Ладыженская // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2000. — Т. 271. — С. 151–155.
8. Турбин, М.В. Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров / М.В. Турбин, А.С. Устюжанинова // Изв. вузов. Математика. — 2019. — № 8. — С. 62–78.
9. Устюжанинова, А.С. Равномерные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта / А.С. Устюжанинова // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1191–1202.
10. Устюжанинова, А.С. Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта / А.С. Устюжанинова, М.В. Турбин // Сиб. журн. индустр. математики. — 2021. — Т. 24, № 1. — С. 126–138.
11. Ustiuzhaninova, A. Feedback control problem for modified Kelvin–Voigt model / A. Ustiuzhaninova, M. Turbin // J. of Dynam. and Control Systems. — 2022. — V. 28. — P. 465–480.
12. Turbin, M. Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin–Voigt model / M. Turbin, A. Ustiuzhaninova // Evolution Equat. and Control Theory. — 2022. — V. 11, № 6. — P. 2055–2072.
13. Виноградов, Г.В. Реология полимеров / Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин. — М. : Химия, 1977. — 440 с.
14. Звягин, В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, М.В. Турбин. — М. : Красанд, 2012. — 412 с.
15. Simon, J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — № 146. — P. 65–96.
16. Gajewski, H. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen / H. Gajewski, K. Groger, K. Zacharias. — Berlin : Akademie Verlag, 1974. — 281 s.
17. Беккенбах, Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. — М. : Мир, 1965. — 276 с.
18. Orlov, V.P. On the mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V.P. Orlov, P.E. Sobolevskii // Differ. and Integr. Equat. — 1991. — V. 4, № 1. — P. 103–115.

19. DiPerna, R.J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.-L. Lions // Invent. Math. — 1989. — V. 98. — P. 511–547.
20. Crippa, G. Estimates and regularity results for the DiPerna–Lions flow / G. Crippa, C. De Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 616. — P. 15–46.
21. Edwards, C.H. Advanced calculus of several variables / C.H. Edwards. — New York; London : Academic Press, 1973. — 457 p.

SOLVABILITY OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MODIFIED KELVIN–VOIGT MODEL WITH MEMORY ALONG TRAJECTORIES OF FLUID MOTION

M. V. Turbin[1], A. S. Ustiuzhaninova[2]

Voronezh State University, Russia
e-mail: [1]mrmike@mail.ru, [2]nastyzhka@gmail.com

The work is devoted to proving the solvability in the weak sense of the initial-boundary value problem for the modified Kelvin–Voigt model taking into account memory along the trajectories of fluid particles motion. For this, an approximation problem is considered for which solvability is established based on the Leray–Schauder fixed point theorem. Then, based on a priori estimates, it is shown that from a sequence of solutions to the approximation problem, one can extract a subsequence that weakly converges to the solution of the original problem as the approximation parameter tends to zero.

Keywords: weak solution, modified Kelvin–Voigt model, trajectory, fluid with memory, initial-boundary value problem, existence theorem.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00091).

REFERENCES

1. Pavlovsky, V.A. On theoretical description of weak aqueous solutions of polymers / V.A. Pavlovsky // Doklady Akademii Nauk SSSR. — 1971. — V. 200, № 4. — P. 809–812. [in Russian]
2. Amfilokhiev, V.B. Experimental data on laminar-turbulent transition for flows of polymer solutions in pipes / V.B. Amfilokhiev, V.A. Pavlovsky // Trudy Leningradskogo ordena Lenina korablestroitel'nogo instituta. — 1975. — V. 104. — P. 3–5. [in Russian]
3. Flows of polymer solutions in the case of convective accelerations / V.B. Amfilokhiev, Y.I. Voitkunskii, N.P. Mazaeva, Y.S. Khodornovskii // Trudy Leningradskogo ordena Lenina korablestroitel'nogo instituta. — 1975. — V. 96. — P. 3–9. [in Russian]
4. Oskolkov, A.P. Solvability in the large of the first boundary value problem for a certain quasilinear third order system that is encountered in the study of the motion of a viscous fluid / A.P. Oskolkov // Zapiski Naucnyh Seminarov Leningradskogo Otdelenija Matematiceskogo Instituta imeni V.A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI). — 1972. — V. 27. — P. 145–160. [in Russian]
5. Oskolkov, A.P. The uniqueness and solvability in the large of boundary value problems for the equations of motion of aqueous solutions of polymers / A.P. Oskolkov // Zapiski Naucnyh Seminarov Leningradskogo Otdelenija Matematiceskogo Instituta imeni V.A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI). — 1973. — V. 38. — P. 98–136. [in Russian]
6. Oskolkov, A.P. Some quasilinear systems that arise in the study of the motion of viscous fluids / A.P. Oskolkov // Zapiski Naucnyh Seminarov Leningradskogo Otdelenija Matematiceskogo Instituta imeni V.A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI). — 1975. — V. 52. — P. 128–157. [in Russian]
7. Ladyzhenskaya, O.A. On some gaps in two of my papers on the Navier–Stokes equations and the way of closing them / O.A. Ladyzhenskaya // J. of Math. Sci. — 2003. — V. 115. — P. 2789–2791.
8. Turbin, M.V. The existence theorem for a weak solution to initial-boundary value problem for system of equations describing the motion of weak aqueous polymer solutions / M.V. Turbin, A.S. Ustiuzhaninova // Russian Mathematics. — 2019. — V. 63. — P. 54–69.
9. Ustiuzhaninova, A.S. Uniform attractors for the modified Kelvin–Voigt model / A.S. Ustiuzhaninova // Differ. Equat. — 2021. — V. 57, № 9. — P. 1165–1176.

10. Ustiuzhaninova, A.S. Trajectory and global attractors for a modified Kelvin–Voigt model / A.S. Ustiuzhaninova, M.V. Turbin // J. of Appl. and Indust. Math. — 2021. — V. 15. — P. 158–168.
11. Ustiuzhaninova, A. Feedback control problem for modified Kelvin–Voigt model / A. Ustiuzhaninova, M. Turbin // J. of Dynam. and Control Systems. — 2022. — V. 28. — P. 465–480.
12. Turbin, M. Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin–Voigt model / M. Turbin, A. Ustiuzhaninova // Evolution Equat. and Control Theory. — 2022. — V. 11, № 6. — P. 2055–2072.
13. Vinogradov, G.V. Rheology of Polymers: Viscoelasticity and Flow of Polymers / G.V. Vinogradov, A.Y. Malkin. — Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1980.
14. Zvyagin, V.G. Mathematical Problems in Viscoelastic Hydrodynamics / V.G. Zvyagin, M.V. Turbin. — Moscow : Krasand, 2012. — 412 p. [in Russian]
15. Simon, J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — № 146. — P. 65–96.
16. Gajewski, H. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen / H. Gajewski, K. Groger, K. Zacharias. — Berlin : Akademie Verlag, 1974. — 281 s.
17. Beckenbach, E.F. Inequalities / E.F. Beckenbach, R. Bellman. — Berlin; Heidelberg : Springer, 1961.
18. Orlov, V.P. On the mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V.P. Orlov, P.E. Sobolevskii // Differ. and Integr. Equat. — 1991. — V. 4, № 1. — P. 103–115.
19. DiPerna, R.J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.-L. Lions // Invent. Math. — 1989. — V. 98. — P. 511–547.
20. Crippa, G. Estimates and regularity results for the DiPerna–Lions flow / G. Crippa, C. De Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 616. — P. 15–46.
21. Edwards, C.H. Advanced calculus of several variables / C.H. Edwards. — New York; London : Academic Press, 1973. — 457 p.