

УДК 519.632+519.651+517.956.225

ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОПЕРАТОРОВ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

© 2024 г. А. Б. Утесов

Построен оператор дискретизации решения уравнения Пуассона с правой частью из класса Коробова и оценена его погрешность в метрике L^p , $2 \leq p \leq \infty$. Доказано, что при $p = 2$ полученная оценка погрешности оператора дискретизации является наилучшей по порядку в степенной шкале. Также найдена погрешность вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье, используемых при построении оператора дискретизации. Следует отметить, что полученная оценка в одном случае лучше ранее известных оценок погрешностей операторов дискретизации, построенных по значениям правой части уравнения в узлах модифицированной сетки Коробова и сетки Смоляка, а другом — совпадает с ними с точностью до констант.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, класс Коробова, оператор дискретизации.

DOI: 10.31857/S0374064124010113, EDN: RRKIYJ

1. Введение. Постановка задачи. Уравнение Пуассона — это эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f, \quad (1)$$

которое описывает электростатическое поле, стационарное поле температуры, поле давления и потенциала скорости в гидродинамике, где Δ — оператор Лапласа, $u = u(x)$, $f = f(x)$, $s \in \{2, 3, \dots\}$, $x = (x_1, \dots, x_s)$.

Приведём определение класса Коробова E_s^r с параметрами $r > 1$ и $s \in \mathbb{N}$ (см., например, [1, с. 29]). Класс Коробова состоит из всех непрерывных на $[0, 1]^s$ и 1-периодических по каждой переменной $x_1, \dots, x_s$ функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) \exp\{-2\pi i(m, x)\} dx, \quad m \in Z^s,$$

которых удовлетворяют условию

$$|\hat{f}(m)| \leq \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^r},$$

где $(m, x) = m_1 x_1 + \dots + m_s x_s$, $\bar{m}_i = \max\{1, |m_i|\}$ для каждого $i \in \{1, \dots, s\}$.

Нетрудно проверить, что если функция f принадлежит классу Коробова и $\hat{f}(0) \neq 0$, то при любом краевом условии существует непрерывная на $[0, 1]^s$ функция $\omega = \omega(x)$ с $\Delta \omega = 1$ на $[0, 1]^s$ такая, что решение уравнения (1) имеет вид (см. [2])

$$u_\omega(x; f) = \omega(x) \hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s}^* \frac{\hat{f}(m)}{(m, m)} \exp\{2\pi i(m, x)\}, \quad (2)$$

здесь и всюду ниже знак $*$ над знаком суммы означает, что вектор $m = (0, \dots, 0) \in Z^s$ в суммировании не участвует.

Обратно, всякая достаточно гладкая функция вида (2) удовлетворяет уравнению (1) на множестве $[0, 1]^s$.

Поскольку кратный функциональный ряд из (2) является бесконечным объектом, то возникает задача дискретизации (приближения) решения $u_\omega(x; f)$ конечным объектом и установления точности погрешности дискретизации.

Первый результат в задаче дискретизации решения $u_\omega(x; f)$ был получен в работе [1, с. 187]. Там автором при нечетных по каждой из $x_1, \dots, x_s$ переменных функций $f \in E_s^r$ для решения

$$u(x; f) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s}^* \frac{\hat{f}(m)}{(m, m)} \exp\{2\pi i(m, x)\}$$

была установлена оценка

$$u(x; f) = -\frac{1}{4\pi^2 N} \sum_{k=1}^N f(\{a_1 k/N\}, \dots, \{a_s k/N\}) \times \\ \times \sum_{\overline{m} \leq [\sqrt{N}(\ln N)^{-\beta/2}]} \frac{\exp\{2\pi i(m_1(x_1 - a_1 k/N) + \dots + m_s(x_s - a_s k/N))\}}{m_1^2 + \dots + m_s^2} + O\left(\frac{(\ln N)^{r\beta/2+s}}{N^{(r-1)/2+1/s}}\right), \quad (3)$$

где символом $[d]$ здесь и всюду ниже обозначена целая часть числа d , $\{d\}$ — дробная часть числа d , $\overline{m} = \prod_{i=1}^s \max\{1, |m_i|\}$ для каждого $m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s$, $a_1, \dots, a_s$ — целые числа взаимно простые с N такие, что для некоторых величин $\beta = \beta(s)$ и $C = C(s)$ при

$$\delta_N(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } l \text{ делится на } N, \\ 0, & \text{если } l \text{ не делится на } N \end{cases}$$

имеет место неравенство

$$\sum_{m_1=\dots=m_s=-(N-1)}^{N-1} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{\overline{m}} \leq C \frac{\ln^\beta N}{N}.$$

Исследования задачи дискретизации решения $u_\omega(x; f)$ уравнения Пуассона с правой частью из класса Коробова E_s^r продолжились в статьях [2, 3]. Другие результаты по дискретизации решения $u_\omega(x; f)$ можно найти в [4, гл. 3]. Также отметим обзорную статью [5], посвященную некоторым теоретико-числовым методам решения дифференциальных уравнений в частных производных на классах Коробова.

Далее нам понадобятся следующие обозначения. Для положительных последовательностей $\{a_n\}_{n \geq 1}$ и $\{b_n\}_{n \geq 1}$ запись $a_n \ll_{\alpha, \beta} b_n$ будет означать существование некоторой величины $C(\alpha, \beta, \dots) > 0$, зависящей лишь от указанных в скобке параметров, такой, что $a_n \leq C(\alpha, \beta, \dots) b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Символом $|G|$ будем обозначать число элементов конечного множества G . Для $1 \leq p < \infty$ через $L^p(\Omega)$ обозначается пространство измеримых на Ω функций f с нормой

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

а через $L^\infty(\Omega)$ — пространство существенно ограниченных на Ω функций f с нормой

$$\|f\|_\infty \equiv \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty.$$

В статье [2], используя узлы модифицированной сетки Коробова (см. [6, 7]), был построен оператор дискретизации

$$\begin{aligned} & \delta_N (\Lambda_N(x; f)) = \\ & = \sum_{\tau \in Z_+^s: \|\tau\| < n} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} f(k(A_{n,\tau}^{-1})') \left(\omega(x) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in \rho(\tau)}^* \frac{\exp\{2\pi i(m, x - k(A_{n,\tau}^{-1})')\}}{(m, m)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

(обозначения Z_+^s , $\|\tau\|$, $A_{n,\tau}$, $K_{n,\tau}$, $(A_{n,\tau}^{-1})'$, $\rho(\tau)$ см. в [2]) при $f \in E_s^r$ и была оценена его погрешность в метрике L^p ($2 \leq p \leq \infty$):

$$\begin{aligned} & \delta_N (\Lambda_N(x; f); E_s^r)_{L^p} \equiv \\ & \equiv \sup_{f \in E_s^r} \|u_\omega(x; f) - \Lambda_N(x; f)\|_p \ll_{\omega, s, r} \begin{cases} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}, & 1 - 1/p - 2/s > 0, \\ \frac{(\ln N)^{r(\beta+s)+s}}{N^r}, & 1 - 1/p - 2/s \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь же заметим, что оценка (5), соответствующая случаю $p = \infty$, почти в «квадрат раз» лучше оценки (3).

Далее в [3], используя узлы сетки Смоляка (см., например, [8, 9]) и результаты статьи [10], был построен оператор дискретизации

$$\begin{aligned} & (Jf)_N(x) = \\ & = \omega(x) \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega_{(\nu^{(0)}, q)} \subset Z_{\nu^{(0)}}^s} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1)\text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} f(k_1/2^{\nu_1}, \dots, k_s/2^{\nu_s}) - \\ & \quad - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in V_q \setminus \{0\}} \frac{\exp\{2\pi i(m, x)\}}{(m, m)} \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega_{(\nu(m), q)} \subset Z_{\nu(m)}^s} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \times \\ & \quad \times \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1)\text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} f(k_1/2^{\nu_1}, \dots, k_s/2^{\nu_s}) \exp\{-2\pi i(m, k/2^\nu)\} \end{aligned} \quad (6)$$

(обозначения $\nu^{(0)}$, $Z_{\nu^{(0)}}^s$, $\Omega_{(\nu^{(0)}, q)}$, $Z_{\nu(m)}^s$, $\Omega_{(\nu(m), q)}$, V_q см. в [3]) такой, что

$$\begin{aligned} & \delta_N ((Jf)_N(x); E_s^r)_{L^p} \equiv \\ & \equiv \sup_{f \in E_s^r} \|u_\omega(x; f) - (Jf)_N(x)\|_p \ll_{\omega, s, r} \begin{cases} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}, & 1 - 1/p - 2/s > 0, \\ \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^r}, & 1 - 1/p - 2/s < 0, \\ \frac{(\ln N)^{r(s-1)+2s-1-s/p}}{N^r}, & 1 - 1/p - 2/s = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, в случае $1 - 1/p - 2/s > 0$ оценка погрешности $\delta_N (\Lambda_N(x; f); E_s^r)_{L^p}$ совпадает с оценкой погрешности $\delta_N ((Jf)_N; E_s^r)_{L^p}$, а в остальных двух случаях различия имеются лишь в показателях логарифмов.

2. Основные результаты. Перечислим результаты работы.

1. Построен оператор дискретизации решения уравнения Пуассона с правой частью из класса Коробова

$$\Psi_N(x; f) = \omega(x) \hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in \Gamma_n}^* \frac{\hat{f}(m)}{(m, m)} \exp\{2\pi i(m, x)\}, \quad (7)$$

где число n выбирается по заданному натуральному N таким, что $|\Gamma_n| \leq N < |\Gamma_{n+1}|$ для множества $\Gamma_n = \{m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : \bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s \leq 2^n\}$, и оценена его погрешность $\delta_N(\Psi_N(x; f); E_s^r)_{L^p}$ в метрике L^p ($2 \leq p \leq \infty$).

2. Найдена погрешность $\tilde{\varepsilon}_N > 0$ (определение $\tilde{\varepsilon}_N$ дано ниже) вычисления коэффициентов Фурье $\hat{f}(m)$, $m \in \Gamma_n$, сохраняющая оценку погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x; f)$ с точностью до константы.

3. При $p = 2$ доказано, что полученная оценка погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x; f)$ неулучшаема в степенной шкале.

Следует подчеркнуть, что оценка погрешности $\delta_N(\Psi_N(x; f); E_s^r)_{L^p}$ в случае $1 - 1/p - 2/s \leq 0$ лучше оценок погрешностей $\delta_N(\Lambda_N(x; f); E_s^r)_{L^p}$ и $\delta_N((Jf)_N(x); E_s^r)_{L^p}$, а в случае $1 - 1/p - 2/s > 0$ совпадает с ними с точностью до констант.

Сравнив (4), (6) и (7), заключаем, что

1) оператор дискретизации $\Psi_N(x; f)$ имеет более простой вид, чем операторы дискретизации $\Lambda_N(x; f)$ и $(Jf)_N(x)$;

2) оценка погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x; f)$ при всех значениях $s \in \{2, 3, \dots\}$ и $p \in [2, +\infty)$ представлена одной формулой.

Вычисление тригонометрических коэффициентов Фурье $\hat{f}(m)$, как правило, не может быть математически точным. Поэтому, опираясь на идеи статьи [11], примем следующее

Определение. Последовательность $\varepsilon_N > 0$ называется *погрешностью вычисления коэффициентов Фурье* $\hat{f}(m)$, $m \in \Gamma_n$, сохраняющей оценку погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x; f)$ с точностью до константы, если справедливо соотношение

$$\sup_{z=(z_1, \dots, z_{N'})} \sup_{f \in E_s^r} \{ \|u_\omega(\cdot; f) - \Delta_N(\cdot; z; f; \varepsilon_N)\|_p : |z_i - \hat{f}(\tilde{m}^{(i)})| < \varepsilon_N, i = 1, \dots, N' \} \ll_{\omega, s, r} \ll_{\omega, s, r} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}, \quad (8)$$

где $N' = |\Gamma_n|$, $\{\tilde{m}^{(1)} = 0, \tilde{m}^{(2)}, \dots, \tilde{m}^{(N')}\}$ — некоторое упорядочение множества Γ_n ,

$$\Delta_N(x; z; f; \varepsilon_N) = \omega(x) z_1 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=2}^{N'} \frac{z_k}{(\tilde{m}^{(k)}, \tilde{m}^{(k)})} \exp\{2\pi i(\tilde{m}^{(k)}, x)\}. \quad (9)$$

Теперь приведём основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. Пусть даны $s \in \{2, 3, \dots\}$, $r > 1$ и $2 \leq p \leq \infty$. Тогда для каждого $N = 2, 3, \dots$ имеет место неравенство

$$\delta_N(\Psi_N(x; f); E_s^r)_{L^p} \equiv \sup_{f \in E_s^r} \|u_\omega(x; f) - \Psi_N(x; f)\|_p \ll_{s, r} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}} \quad (10)$$

и последовательность

$$\tilde{\varepsilon}_N = \begin{cases} \frac{(\ln N)^r}{N^{r+1/p}}, & \text{если } s = 2, \\ \frac{(\ln N)^{(r+1)(s-1)}}{N^{r+1/p}}, & \text{если } s = 3, 4, \dots \end{cases}$$

является погрешностью вычисления коэффициентов Фурье $\hat{f}(m)$, $m \in \Gamma_n$, сохраняющей оценку погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x; f)$ с точностью до константы.

Теорема 2. При $p = 2$ оценка погрешности $\delta_N(\Psi_N(x; f); E_s^r)_{L^p}$ неулучшаема по порядку в степенной шкале, т.е. при увеличении показателя $r - (1 - 1/p - 2/s) = r - 1/2 + 2/s$ из оценки $\ll_{s,r} (\ln N)^{(r+2/s)(s-1)} / N^{r-1/2+2/s}$ на любое число $\delta > 0$ нарушается неравенство (10).

Доказательство теоремы 1.

Лемма [1, с. 125]. При любых действительных $\alpha > 1$ и $t \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_{m_1 \dots m_s \geq t} \frac{1}{(m_1 \dots m_s)^\alpha} \leq \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^s \frac{(1 + \ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}},$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1, \dots, m_s$, для которых произведение $m_1 \dots m_s$ больше или равно t .

В силу равенств (2), (7) и равенства Парсеваля имеем

$$\|u_\omega(x; f) - \Psi_N(x; f)\|_2^2 \leq \sum_{m \in Z^s \setminus \Gamma_n} \frac{|\hat{f}(m)|^2}{(m, m)^2}. \quad (11)$$

Поскольку для всех $m \neq 0$ справедливо неравенство

$$(m, m) = m_1^2 + \dots + m_s^2 \geq (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{2/s} \quad (12)$$

(см., например, [1, с. 189]), то, учитывая включение $f \in E_s^r$, в силу сформулированной выше леммы и соотношений $|\Gamma_{n+1}| \asymp_s 2^{n+1}(n+1)^{s-1}$ (см., например, [12, с. 22]),

$$2^n \asymp_s \frac{N}{\ln^{s-1} N}, \quad n \asymp_s \ln N, \quad (13)$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{m \in Z^s \setminus \Gamma_n} \frac{|\hat{f}(m)|^2}{(m, m)^2} &\leq \sum_{m \in Z^s \setminus \Gamma_n} \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{2r+4/s}} \leq \sum_{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s \geq 2^n} \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{2r+4/s}} \ll_{s,r} \\ &\ll_{s,r} \frac{n^{s-1}}{(2^n)^{2r+4/s-1}} \ll_{s,r} \frac{n^{s-1}}{(2^n)^{2r}(2^n)^{4/s-1}} \ll_{s,r} \frac{(\ln N)^{s-1}}{(N/(\ln N)^{s-1})^{2r}(N/(\ln N)^{s-1})^{4/s-1}} = \\ &= \frac{(\ln N)^{s-1}(\ln N)^{2r(s-1)}(\ln N)^{(s-1)(4/s-1)}}{N^{2r-1+4/s}} = \frac{(\ln N)^{2(r+2/s)(s-1)}}{N^{2r-1+4/s}}. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (11)

$$\|u_\omega(x; f) - \Psi_N(x; f)\|_2 \ll_{s,r} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-1/2+2/s}}. \quad (14)$$

Так как для непрерывных на множестве $[0, 1]^s$ функций f имеет место равенство $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]^s} |f(x)|$ (см., например, [13, гл. 13, задача 13.6]), то

$$\|u_\omega(x; f) - \Psi_N(x; f)\|_\infty \leq \sum_{m \in Z^s \setminus \Gamma_n} \frac{|\hat{f}(m)|}{(m, m)}.$$

Поэтому, повторив проведённые выше рассуждения, придём к оценке

$$\|u_\omega(x; f) - \Psi_N(x; f)\|_\infty \ll_{s,r} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-1+2/s}}. \quad (15)$$

Хорошо известно, что для любой функции $g \in C[0, 1]^s$ при $p \in [2, +\infty)$ справедливо неравенство [14, с. 93]

$$\|g\|_p \leq \|g\|_2^{2/p} \|g\|_\infty^{1-2/p}.$$

Тогда ввиду неравенств (14) и (15) с учётом произвольности функций $f \in E_s^r$ имеем

$$\sup_{f \in E_s^r} \|u_\omega(x; f) - \Psi_N(x; f)\|_p \ll_{s,r} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}. \quad (16)$$

Теперь убедимся в том, что для последовательности $\tilde{\varepsilon}_N$ справедливо неравенство (8). Для произвольных чисел $z_1, \dots, z_{N'}$ таких, что

$$|z_1 - \hat{f}(\tilde{m}^{(1)})| < \tilde{\varepsilon}_N, \quad \dots, \quad |z_{N'} - \hat{f}(\tilde{m}^{(N')})| < \tilde{\varepsilon}_N, \quad (17)$$

имеет место неравенство

$$\|u_\omega(\cdot; f) - \Delta_N(\cdot; z; f; \tilde{\varepsilon}_N)\|_p \leq \|u_\omega(\cdot; f) - \Psi_N(\cdot; f)\|_p + \|\Psi_N(\cdot; f) - \Delta_N(\cdot; z; f; \tilde{\varepsilon}_N)\|_p. \quad (18)$$

Понятно, что

$$\Psi_N(x; f) = \omega(x) \hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=2}^{N'} \frac{f(\tilde{m}^{(k)})}{(\tilde{m}^{(k)}, \tilde{m}^{(k)})} \exp\{2\pi i(\tilde{m}^{(k)}, x)\}.$$

Поэтому в силу равенств (7) и (9), неравенств (17) и (12) имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi_N(\cdot; f) - \Delta_N(\cdot; z; f; \tilde{\varepsilon}_N)\|_p &\ll_{\omega,s,r} \tilde{\varepsilon}_N \left\| \sum_{k=2}^{N'} \frac{\exp\{2\pi i(\tilde{m}^{(k)}, x)\}}{(\tilde{m}^{(k)}, \tilde{m}^{(k)})} \right\|_p = \\ &= \tilde{\varepsilon}_N \left\| \sum_{m \in \Gamma_n}^* \frac{\exp\{2\pi i(m, x)\}}{(m, m)} \right\|_p \ll_{\omega,s,r} \tilde{\varepsilon}_N \sum_{m \in \Gamma_n}^* \frac{1}{(m, m)} \ll_{\omega,s,r} \tilde{\varepsilon}_N \sum_{m \in \Gamma_n}^* \frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^{2/s}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Psi_N(\cdot; f) - \Delta_N(\cdot; z; f; \tilde{\varepsilon}_N)\|_p \ll_{\omega,s,r} \tilde{\varepsilon}_N \int_1^{2^n} \frac{dx}{x^{2/s}}. \quad (19)$$

Так как

$$\int_1^{2^n} \frac{dx}{x^{2/s}} \ll_s \begin{cases} n, & \text{если } s = 2, \\ (2^n)^{(s-2)/s}, & \text{если } s = 3, 4, \dots, \end{cases}$$

то, используя соотношения (13) и формулу погрешности $\tilde{\varepsilon}_N$, из (19) легко выводим оценку

$$\|\Psi_N(\cdot; f) - \Delta_N(\cdot; z; f; \tilde{\varepsilon}_N)\|_p \ll_{\omega,s,r} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}.$$

Поэтому согласно неравенствам (16) и (18)

$$\|u_\omega(\cdot; f) - \Delta_N(\cdot; z; f; \tilde{\varepsilon}_N)\|_p \ll_{\omega,s,r} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}},$$

откуда, в силу произвольности функций $f \in E_s^r$ и чисел $z_1, \dots, z_{N'}$, удовлетворяющих условиям (17), получим

$$\sup_{z=(z_1, \dots, z_{N'})} \sup_{f \in E_s^r} \left\{ \|u_\omega(\cdot; f) - \Delta_N(\cdot; z; f; \tilde{\varepsilon}_N)\|_p : |z_i - \hat{f}(\tilde{m}^{(i)})| < \tilde{\varepsilon}_N, i = 1, \dots, N' \right\} \ll_{\omega, s, r} \ll_{\omega, s, r} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для каждого $N = 2, 3, \dots$ определим множество

$$U_N = \left\{ m \in Z^s : [N^{1/s}] \leq m_1 \leq 7[N^{1/s}], \dots, [N^{1/s}] \leq m_s \leq 7[N^{1/s}] \right\}.$$

Так как $|U_N| = (6[N^{1/s}] + 1)^s > 2N$, то для множества $G_N = U_N \setminus \Gamma_n$ имеет место неравенство $|G_N| > N$. Следовательно, с учетом $G_N \subset U_N$ получим

$$\sum_{m \in G_N} \frac{1}{(m, m)^2} = \sum_{m \in G_N} \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_s^2)^2} \gg_s \frac{N}{N^{4/s}}. \quad (20)$$

Функция $g(x) = 1/(7^{sr} N^r) \sum_{m \in G_N} \exp\{2\pi i(m, x)\}$ принадлежит классу E_s^r . Действительно, согласно включению $G_N \subset U_N$ для каждого $m \in G_N$ справедливы неравенства

$$\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s \leq 7^s N \Leftrightarrow \frac{1}{7^{sr} N^r} \leq \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^r} \Leftrightarrow \hat{g}(m) \leq \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^r}.$$

Поскольку $\hat{g}(\tilde{m}^{(1)}) = \hat{g}(0) = 0$, $\hat{g}(\tilde{m}^{(2)}) = 0$, $\dots$, $\hat{g}(\tilde{m}^{(N')}) = 0$, то

$$\Psi_N(x; g) = 0, \quad u_\omega(x; g) = -\frac{1}{4\pi^2 7^{sr} N^r} \sum_{m \in G_N} \frac{\exp\{2\pi i(m, x)\}}{(m, m)}. \quad (21)$$

В силу равенств (21) и Парсеваля, неравенства (20) имеем

$$\|u_\omega(\cdot; g) - \Psi_N(\cdot; g)\|_2 = \|u_\omega(\cdot; g)\|_2 \gg_{s, r} \frac{1}{N^r} \left(\sum_{m \in G_N} \frac{1}{(m, m)^2} \right)^{1/2} \gg_{s, r} \frac{1}{N^{r-1/2+2/s}},$$

откуда находим

$$\sup_{f \in E_s^r} \|u_\omega(\cdot; f) - \Psi_N(\cdot; f)\|_2 \gg_{s, r} \frac{1}{N^{r-1/2+2/s}}. \quad (22)$$

Поскольку $\lim_{N \rightarrow \infty} N^\delta / (\ln N)^{(r+2/s)(s-1)} = +\infty$ для каждого $\delta > 0$, то, начиная с некоторого номера, справедлива оценка

$$\frac{1}{N^{r-1/2+2/s}} \gg_{r, s} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-1/2+2/s+\delta}}.$$

Следовательно, согласно (22) при увеличении показателя $r - 1/2 + 2/s$ из последней оценки на любое число $\delta > 0$ нарушается неравенство (10). Теорема 2 доказана.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные советы и замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджета Актюбинского регионального университета имени К. Жубанова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. *Баилов Е., Темиргалиев Н.* О дискретизации решений уравнения Пуассона // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 9. С. 1515–1525.
3. *Кудайбергенов С.С., Сабитова С.Г.* О дискретизации решений уравнения Пуассона на классе Коробова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 13. № 7. С. 1082–1093.
4. *Баилов Е.А.* Приближенное интегрирование и восстановление функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 1998.
5. *Родионов А.В.* Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. № 3. С. 256–297.
6. *Шерниязов К.Е.* Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E , SW и B : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 1998.
7. *Шерниязов К.Е.* Оптимальные методы приближенного восстановления функций и решений уравнений в частных производных вычислительными агрегатами по линейным комбинациям сеток Коробова со сверхсжатием информации и смежные вопросы // Вестн. Евразийского нац. ун-та имени Л.Н. Гумилева. Сер. Математика. Компьют. науки. Механика. 2022. Т. 139. № 2. С. 26–76.
8. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
9. *Naurizbayev N., Temirgaliyev N.* An exact order of discrepancy of the Smolyak grid and some general conclusionc in the theory of numerical integrations // Found Comput. Math. 2012. V. 12. P. 139–172.
10. *Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А.* Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73. № 2. С. 183–224.
11. *Утесов А.Б., Базарханова А.А.* Об оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности и предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1705–1714.
12. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1986. Т. 178. С. 3–113.
13. *Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах. М., 2005.
14. *Temlyakov V.* Multivariate Approximation. Cambridge, 2018.

Актюбинский региональный университет
имени К. Жубанова,
г. Актобе, Казахстан

Поступила в редакцию 04.06.2023 г.
После доработки 05.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.