ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 99–125

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977+517.929.2

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

 А. В. Метельский

Для линейной автономной системы нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями приведён алгоритм решения задачи модальной управляемости (в частности, назначения конечного спектра), обеспечивающий замкнутой системе заданный характеристический квазиполином. Предложена процедура редактирования конечной части спектра. Конструктивно обоснован критерий экспоненциальной стабилизации изучаемой системы. При выполнении критерия, согласно предложенному алгоритму спектрального приведения, замкнутая система может быть сделана экспоненциально устойчивой. Полученные утверждения и алгоритмы управления спектром проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, автономная система, замкнутая система, система нейтрального типа, оператор сдвига, соизмеримые запаздывания, стабилизация, экспоненциальная устойчивость, нормальная форма, спектр.

DOI: 10.31857/S0374064124010097, EDN: RQXLSS

Введение. Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{j=1}^{m}(A_jx(t-jh) + C_j\dot{x}(t-jh)) + \sum_{i=0}^{m} b_ju(t-jh), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0], \tag{2}$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n]'$ — n-вектор-столбец непрерывного кусочно-гладкого решения системы (1) $(n \geqslant 2)$; $h > 0$ — постоянное запаздывание; A_0, A_j, C_j — постоянные $n\times n$-матрицы; b_j — постоянные столбцы; η — начальная функция из пространства гладких n-вектор-функций; u — скалярное кусочно-непрерывное управление. Знак $'$ обозначает операцию транспонирования.

Пусть $p, \lambda \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел). Обозначим:

$$A(p,\lambda) = A_0 + \sum_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)\lambda^j,$$

$W(p, e^{-ph}) = pE - A(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица (E — единичная матрица подходящего порядка), $w(p, e^{-ph}) = |W(p, e^{-ph})|$ — характеристический квазиполином однородной ($b_j = 0$) системы (1). Здесь и далее $|W|$ — определитель произвольной квадратной матрицы W. Будем также употреблять термин "характеристический полином" по отношению к полиному $w(p, \lambda)$.

Квазиполином вида $(\lambda = e^{-ph})$

$$d(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{N}\theta_i(\lambda)p^{N-i}, \quad N \geqslant 1,$$

где $\theta_i(\lambda)$ — некоторые полиномы, причём $\theta_0(0) = 1$, будем называть *квазиполиномом нейтрального типа степени* N. Если $\theta_0(\lambda) = 1$, то, как частный случай, имеем квазиполином запаздывающего типа. Характеристический квазиполином $w(p, e^{-ph})$ однородной системы (1) является в общем случае квазиполиномом нейтрального типа степени n.

Множество корней $\sigma = \{p \in \mathbb{C} : w(p, e^{-ph}) = 0\}$ характеристического квазиполинома с учётом их кратности называют *спектром системы* (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p, e^{-ph})$ действительны, то комплексные числа входят в множество σ сопряжёнными парами.

Краткий обзор начнём с системы запаздывающего типа — частного случая системы (1) с $C_j = 0$, $j = \overline{1,m}$, обозначив её $(1')$. Пусть $\breve{A}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} A_j \lambda^j$, $b(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_m\lambda^m$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Задача управления спектром динамических систем инспирирована проектированием систем с заданными свойствами, в частности, задачей стабилизации [1] управляемой системы. В работе [1] задача стабилизации сводится к задаче управляемости конечномерной подсистемы [2], соответствующей неустойчивой части спектра в обобщённом собственном подпространстве системы $(1')$. Этот подход известен как *метод спектральной декомпозиции.* В связи с ним возникла *задача спектральной управляемости* [3] — управляемости конечномерной подсистемы, соответствующей всякому спектральному значению системы $(1')$. Критерий спектральной управляемости для системы запаздывающего типа имеет вид [4]

$$\operatorname{rank}\bigl[pE_n - \breve{A}(e^{-ph}), b(e^{-ph})\bigr] = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Наличие этого критерия необходимо и достаточно [5, 6] для разрешимости задачи FSA (finite spectrum assignment) — назначения произвольного самосопряжённого конечного спектра — в классе регуляторов с распределённым запаздыванием. Более того, выполнение условия (3) позволяет обеспечить не только замкнутой системе заданный конечный спектр (например, асимптотически устойчивый), но и одновременно [7] финитную стабилизацию исходной системы (обнуление фазовых переменных за конечное время).

Большáя часть исследований имеет дело со стабилизацией систем нейтрального типа [8–13]. Для системы запаздывающего типа $(1')$ свойства асимптотической и экспоненциальной асимптотической (для краткости экспоненциальной) устойчивости эквивалентны. Для системы нейтрального типа (1) это не так, поэтому, следуя [9], будем говорить об асимптотической и экспоненциальной устойчивости системы (1). Известен (см., например, [9]) спектральный критерий экспоненциальной устойчивости однородной системы нейтрального типа: все корни характеристического квазиполинома должны лежать в левой полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p < \varepsilon\}$, $\varepsilon < 0$ — некоторое число. Непосредственное применение этого критерия проблематично, поэтому авторы, исследующие задачу стабилизации, зачастую заняты и получением удобных критериев для различных определений устойчивости. Основные подходы здесь используют функционалы типа Ляпунова–Красовского, при этом критерий, как правило, формулируется в терминах линейных матричных неравенств [10, 12]. Эффективна теория устойчивости, развитая в работе [9] через изучение спектральных свойств инфинитезимального оператора полугруппы преобразований банахова пространства непрерывных функций, порождаемой системой нейтрального типа (1). На той же основе асимптотическая устойчивость и стабилизируемость системы вида (1) в гильбертовом пространстве состояний M_2 исследована в работе [11]. Частотные методы для дизайна стабилизирующих обратных связей применяются в статье [13]. Несмотря на большое число публикаций по обсуждаемой тематике, ощущается, на наш взгляд, дефицит конструктивных, алгоритмизуемых результатов в задаче стабилизации систем нейтрального типа. Большáя часть результатов имеет характер "теорем существования".

Принципиально иной подход к построению различных типов стабилизаторов и наблюдателей для линейных автономных систем с запаздыванием представлен в работах [14–20]. Суть этого подхода к задаче стабилизации следующая. Система замыкается динамической обратной связью (см. ниже (4)–(6)). Характеристический полином $d(p, \lambda)$ замкнутой системы принадлежит идеалу, порождённому системой полиномов — алгебраических дополнений к элементам последней строки характеристической матрицы замкнутой системы. Поэтому класс возможных характеристических полиномов $d(p, \lambda)$ замкнутой системы может быть проанализирован через вычисление базиса Грёбнера для системы алгебраических дополнений как полиномов переменных p, λ. Если выбранный полином $d(p,\lambda)$ принадлежит идеалу, то последняя строка характеристической матрицы замкнутой системы, задающая искомый стабилизатор, может быть найдена методом неопределённых коэффициентов [20].

В настоящей статье этот подход развивается на задачу управления спектром и, в частности, на задачу экспоненциальной стабилизации системы нейтрального типа.

1. Постановка задачи. Пусть имеем операторную запись уравнений $p^i\lambda^j x_k(t)=x_k^{(i)}(t-jh)$ ($i,j\geqslant 0$ — целые числа), т.е. λ — оператор сдвига, p — оператор дифференцирования. Рассмотрим динамический регулятор по типу обратной связи по состоянию в двух вариантах:

$$u(t)=x_{n+1}(t),\quad t>0, \tag{4}$$

или

$$u(t)=\dot x_{n+1}(t)+\alpha x_{n+1}(t),\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad t>0. \tag{5}$$

В обоих вариантах регулятора переменная x_{n+1} задаётся уравнением

$$\dot x_{n+1}(t)+v_0(\lambda)x_{n+1}(t)+v_1(\lambda)\dot x_{n+1}(t-h)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat v_{ki}(\lambda)x_{n+1}(t-s)e^{p_ks}s^i/i!\,ds=$$

$$=\tilde q(\lambda)x(t)+q(\lambda)\dot x(t-h)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat q_{ki}(\lambda)x(t-s)e^{p_ks}s^i/i!\,ds,\quad t>0, \tag{6}$$

где $v_i(\lambda)$, $\tilde q(\lambda)=(\tilde q_1(\lambda),\ldots,\tilde q_n(\lambda))$, $q(\lambda)=(q_1(\lambda),\ldots,q_n(\lambda))$ — полиномы с действительными коэффициентами; $\hat v_{ki}(\lambda)$, $\hat q_{ki}(\lambda)=(\hat q_{ki1}(\lambda),\ldots,\hat q_{ki,n}(\lambda))$ – полиномы, возможно, с комплексными коэффициентами; $L\geqslant 1$, $L_1\geqslant 0$ — целые числа; $p_k\in P^*=\{\alpha_k\pm \mathrm{i}\beta_k\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,L}\}$ — набор действительных и комплексно-сопряжённых чисел, i – мнимая единица.

Замечание 1. Как видно из выражений (4), (5), первый регулятор генерирует непрерывный входной сигнал, второй, вообще говоря, — кусочно-непрерывный, что понижает качество процесса управления, но, с другой стороны, расширяет возможности управления системой. При управлении $u(t)$ вместо вектора $b(\lambda)$ может быть вектор $b(p,\lambda)$, содержащий члены $p\lambda$ с полиномиальными коэффициентами от λ, т.е. управление может иметь производные первого порядка с запаздывающим аргументом: $\dot u(t-ih)$, $i=\overline{1,m}$. Для такой системы допусти́м только регулятор вида (4), (6).

Коэффициенты в выражении (6) и множество P^* подбираем такими, чтобы замкнутая система имела определённый спектр и чтобы после приведения интегралов с применением формулы Эйлера ($e^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$) к суммам вида

$$\sum_{\tau=0}^{N_1}\int_0^h R_{j\tau}(s)x_j(t-\tau h-s)\,ds,\quad j=\overline{1,n+1},\quad N_1=\max_{k,i}\{\deg\hat v_{ki}(\lambda),\,\deg\hat q_{ki}(\lambda)\},$$

где $R_{j\tau}(s)=\sum_{k=1}^{L}e^{\alpha_ks}(\cos(\beta_ks)U_{j\tau k}(s)+\sin(\beta_ks)V_{j\tau k}(s))$, $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$, $U_{j\tau k}(s)$, $V_{j\tau k}(s)$ – полиномы степени не выше L_1, все коэффициенты в выражении (6) представляли собой действительные величины.

Членам с распределённым запаздыванием (см. выражение (6)) в характеристической матрице замкнутой системы соответствуют интегралы $\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!\,ds$ с полиномиальными коэффициентами от λ. Вычислив эти интегралы, получим целые дробно-рациональные функции ($\lambda=e^{-ph}$, $\lambda_k=e^{-p_kh}$):

$$\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!ds=\frac{(-1)^{i+1}}{i!}\frac{d^i}{dp^i}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k(p-p_k)}\right),\quad i=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

Именно в терминах таких функций будем конструировать управление, задаваемое уравнением (6) и обеспечивающее замкнутой системе определённый спектр.

Если выбран регулятор (5), то, заменив $\dot{x}_{n+1}(t)$ в уравнении (5) согласно (6), получим, что замкнутая система останется системой нейтрального типа.

Определение 1. Систему (1) назовем *спектрально приводимой*, если существует регулятор (4), (6) (или (5), (6)), обеспечивающий замкнутой системе (1) характеристический квазиполином вида

$$d(p,\lambda)=\theta_0(\lambda)d(p), \quad d(p)=\theta_0(\lambda)\sum_{i=0}^{n+1}\gamma_i p^{n+1-i}, \quad \lambda=e^{-ph}, \tag{8}$$

где $\theta_0(\lambda)=1+\lambda\tilde{\theta}(\lambda)$, $\tilde{\theta}(\lambda)$ — некоторый полином с действительными коэффициентами; $\gamma_0=1$, γ_i, $i=\overline{1,n+1}$, — действительные числа. В частности, может быть $\theta_0(\lambda)\equiv 1$.

Определение 2. Систему (1) назовем *модально управляемой*, если существует регулятор (4), (6) (или (5), (6)), обеспечивающий замкнутой системе (1) произвольный характеристический квазиполином

$$d(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{n+1}\theta_i(\lambda)p^{n+1-i}, \quad \lambda=e^{-ph}, \tag{9}$$

где $\theta_0(\lambda)=1+\lambda\tilde{\theta}(\lambda)$, $\theta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, — полиномы с действительными коэффициентами. Коэффициент $\theta_0(\lambda)$ при p^{n+1} будем называть *старшим коэффициентом полинома* $d(p,\lambda)$.

Если посредством регулятора (4), (6) (или (5), (6)) замкнутой системе можно обеспечить квазиполином $d(p,e^{-ph})$, имеющий все корни с отрицательными действительными частями, причём

$$\text{из } d(p,e^{-ph})=0 \text{ следует } \operatorname{Re}p<\varepsilon, \quad \varepsilon<0 \text{ — некоторое число,} \tag{10}$$

то система экспоненциально стабилизируема [9]. Для краткости будем говорить, что квазиполином $d(p,e^{-ph})$ с такими корнями экспоненциально устойчивый.

Если в (8) $\theta_0(\lambda)\equiv 1$, то имеем замкнутую систему с конечным спектром. Если $\theta_0(\lambda)\not\equiv 1$, то имеем замкнутую систему с бесконечным, но более удобным для анализа, спектром. Как следует из (10), замкнутая система (1) с характеристическим полиномом (8) экспоненциально устойчива, если и только если все корни полинома (8) удовлетворяют неравенствам

$$\theta_0(\lambda)=0\Rightarrow|\lambda|>1, \quad d(p)=0\Rightarrow\operatorname{Re}p<0. \tag{11}$$

Задача. Требуется подобрать множество P^* и полиномиальные коэффициенты $v_i(\lambda)$, $\hat{v}_{ki}(\lambda)$, $\tilde{q}(\lambda)$, $q(\lambda)$, $\hat{q}_{ki}(\lambda)$ регулятора (4), (6) (или (5), (6)) так, чтобы характеристическая матрица $pE-\tilde{A}(p,e^{-ph})$ замкнутой системы (1), (4), (6) (или (1), (5), (6)) имела действительные коэффициенты и выполнялось равенство

$$|pE-\tilde{A}(p,e^{-ph})|=d(p,e^{-ph}),$$

где $d(p,e^{-ph})$ — заданный квазиполином вида (9) в случае модальной управляемости, или квазиполином вида (8) в случае спектральной приводимости. Выяснить, когда это возможно.

Поставленную задачу рассмотрим в более широкой постановке: как можно изменить спектр системы (1), замыкая ее регуляторами (4), (6) или (5), (6). В случае отсутствия модальной управляемости проанализируем возможность спектрального приведения и экспоненциальной стабилизируемости системы (1). Для решения этой задачи в общем случае ниже предложен (см. п. 6) алгоритм спектрального приведения.

В работе [16, теорема 2] доказано, что задача модальной управляемости системы (1) разрешима в классе динамических дифференциально-интегроразностных регуляторов, если и только если выполняются следующие два условия:

$$\operatorname{rank}\left[pE - A_0 - \sum_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)e^{-pjh}, b(e^{-ph})\right] = n, \quad p \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

$$\operatorname{rank}\left[E - \sum_{j=1}^{m} C_j\lambda^j, b(\lambda)\right] = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Заметим, что в общем случае условия (12), (13) не следуют [21] одно из другого. В совокупности эти условия обеспечивают [21, 22] полную управляемость системы (1) с соизмеримыми запаздываниями. Начальное состояние (2) называется *полностью управляемым*, если существуют момент времени $t_1 > 0$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такие, что

$$x(t) \equiv 0, \quad \text{если} \quad u(t) \equiv 0, \quad t > t_1. \tag{14}$$

Если равенство (14) при достаточно большом, но фиксированном моменте времени $t_1 > 0$ возможно для любого начального состояния (2), то систему (1) называют *полностью управляемой*.

2. Схема проверки условий модальной управляемости. Пусть в системе (1) $A(p,\lambda) = [a_{ij}(p,\lambda)]$. Столбец, образованный $b(\lambda)(p+\alpha)$ или $b(\lambda)$, обозначим через $\tilde{b}(p,\lambda)$ и запишем характеристическую матрицу $(p, \lambda \in \mathbb{C})$ системы, замкнутой регулятором (4), (6) (или (5), (6)):

$$\tilde{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pE - A_0 - \sum\limits_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)\lambda^j & & -\tilde{b}(p,\lambda) \\ g_1(p,\lambda) \quad \cdots \quad g_n(p,\lambda) & & g_{n+1}(p,\lambda) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Для краткости систему в координатной форме, заданную характеристической матрицей $(*)$ ($(*)$ — номер формулы), иногда будем называть системой $(*)$. Скажем, что под системой (15) будем понимать систему в фазовых переменных с характеристической матрицей (15).

Расширенная характеристическая матрица (добавлен столбец $-\tilde{b}(p,\lambda)$) исходной системы дополнена $(n+1)$-й строкой

$$g(p,\lambda) = (g_1(p,\lambda), \ldots, g_n(p,\lambda), g_{n+1}(p,\lambda)),$$

отвечающей управлению (6), где $g_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, — линейные комбинации полиномов и дробно-рациональных функций (7). Это следует из вида обратной связи, задаваемой уравнением (6). Таким образом, $g_i(p, e^{-ph})$, $p \in \mathbb{C}$, — целые функции.

Для системы (1), замкнутой регулятором (4), (6) (или (5), (6)), условие (12) принимает вид

$$\operatorname{rank}\left[pE - A_0 - \sum_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)e^{-pjh}, \tilde{b}(p, e^{-ph})\right] = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Проверка условия (16).

1. Вычисляем алгебраические дополнения к элементам последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$, начиная с первого:

$$M(p,\lambda) = (M_1(p,\lambda), \ldots, M_n(p,\lambda),\ M_{n+1}(p,\lambda))', \quad M_{n+1}(p,\lambda) = w(p,\lambda). \tag{17}$$

2. Находим $G_p(p,\lambda)$ — редуцированный базис Грёбнера идеала, порождённого системой полиномов (17), в порядке $\lambda > p$. Для краткости далее будем говорить о базисе Грёбнера определённой системы полиномов без упоминания идеала.

Пусть $P_\lambda = \{(p,\lambda) \in \mathbb{C}^2 : M(p,\lambda) = 0\}$ — множество решений системы полиномиальных уравнений

$$M_i(p,\lambda) = 0, \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{18}$$

Условие (16) равносильно тому, что при $\lambda = e^{-ph}$ система (18) несовместна. По свойству базиса Грёбнера множества решений системы (18) и $G_p(p,\lambda) = 0$ совпадают.

3. Если элементы базиса $G_p(p,\lambda)$ имеют общий делитель $\theta(p,\lambda) \neq \mathrm{const}$, то полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, имеют тот же общий делитель $\theta(p,\lambda)$. Условие (16) будет нарушаться на корнях квазиполинома $\theta(p, e^{-ph})$.

4. Считаем, что элементы базиса $G_p(p,\lambda)$ не имеют общего делителя $\theta(p,\lambda) \neq \mathrm{const}$. Тогда $G_p(p,\lambda) = \{1\}$ или $G_p(p,\lambda)$ содержит некоторый полином $d_0(p)$, множество различных корней которого обозначим $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1,\mu} : d_0(p_i) = 0\}$. Если $G_p(p,\lambda) = \{1\}$, то система (18) несовместна и, значит, условие (16) выполняется.

4.1. Пусть базис Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ содержит некоторый полином $d_0(p)$ (далее полагаем, что его старший коэффициент равен единице). В таком случае по свойству базиса Грёбнера если $(p,\lambda) \in P_\lambda$, то $p \in P_0$. И наоборот, для каждого $p \in P_0$ найдется λ такое, что $(p,\lambda) \in P_\lambda$. Поэтому на корнях полинома $d_0(p)$ проверяем неравенства

$$M(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in P_0. \tag{19}$$

Если при каком-либо $p_0 \in P_0$ справедливо равенство $M(p_0, e^{-p_0 h}) = 0$, то условие (16) не имеет места при $p = p_0$. В противном случае условие (16) выполняется.

Для системы (1), замкнутой регулятором (4), (6) (или (5), (6)), условие (13) принимает вид

$$\operatorname{rank}\Big[E - \sum_{j=1}^{m} C_j\lambda^j, \hat{b}(\lambda)\Big] = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{20}$$

Здесь $\hat{b}(\lambda) = b(\lambda)\chi(\cdot)$, индикатор $\chi(5) = 1$, если выбран регулятор (5), (6), и $\chi(4) = 0$, если выбран регулятор (4), (6).

Очевидно, что если для исходной системы (1) выполняется условие (13), то аналогичное условие (20) будет выполняться и для системы, замкнутой регулятором (5), (6). При переходе к регулятору (4), (6) условие (13) "чаще" не сохраняется, поскольку столбец $b(\lambda)$ заменяется нулевым. Оно заведомо сохранится, если, например, матрица $\sum_{j=1}^m C_j\lambda^j$ нильпотентна.

Проверка условия (20).

1. Обозначим

$$l(\lambda) = (l_1(\lambda), ..., l_{n+1}(\lambda))$$

— алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} E - \sum\limits_{j=1}^{m} C_j\lambda^j & -\hat{b}(\lambda) \\ k_1(\lambda)\cdots k_n(\lambda) & k_{n+1}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Здесь $k_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, — полиномы, коэффициенты при первых степенях переменной p в последней строке характеристической матрицы (15), задаваемой уравнением (6) (см. [23]).

2. Пусть $l_0(\lambda) = \mathrm{GCD}(l(\lambda))$ — наибольший общий делитель элементов вектора $l(\lambda)$ со старшим коэффициентом, равным единице. Последний может быть найден по алгоритму Евклида, а также через вычисление базиса Грёбнера системы полиномов $l_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$.

3. Условие (20) равносильно тому, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ хотя бы один из полиномов $l_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, не равен нулю [23], т.е. полиномы $l_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, взаимно просты. Поэтому если $l_0(\lambda) \equiv 1$, то условие (20) выполняется, и наоборот.

Лемма 1. *Старший коэффициент* $\theta_0(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$ *характеристического полинома* $d(p, \lambda) = |\tilde{W}(p, \lambda)|$ *системы (15), замкнутой регулятором (4), (6) (или (5), (6)), делится на полином* $l_0(\lambda)$.

Доказательство. Согласно [23] векторный полином $l(\lambda)$ даёт набор коэффициентов $l_i(\lambda)$ при p^n в полиномах $M_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$. Очевидно, что коэффициент $\theta_0(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$ характеристического полинома $d(p, \lambda)$ при p^{n+1} будет равен

$$\theta_0(\lambda) = k_1(\lambda)l_1(\lambda) + \cdots + k_{n+1}(\lambda)l_{n+1}(\lambda) = |F(\lambda)|. \tag{22}$$

Из (22) следует, что коэффициент $\theta_0(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$ характеристического полинома при p^{n+1} делится на $l_0(\lambda)$. Лемма доказана.

Замечание 2. Очевидно, что утверждение леммы 1 справедливо для всякой однородной $(b(\lambda) = 0)$ линейной автономной системы нейтрального типа вида (1). В этом случае n-вектор $l(\lambda)$ — это алгебраические дополнения к элементам последней строки матрицы $E - \sum_{j=1}^{m} C_j\lambda^j$; $k_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, — коэффициенты при первых степенях переменной p в последней строке той же матрицы.

Условие (20) эквивалентно тому [23, лемма 3], что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ степень относительно p хотя бы одного из полиномов $M_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, равна n. Условие (13) (в равносильной форме) появилось в работе [21], там же при $m = 1$ доказано, что в совокупности с условием (12) оно образует критерий полной управляемости системы (1).

3. Модальная управляемость и FSA-регулятор. В работе [16] задача модальной управляемости решается через приведение системы нейтрального типа к системе запаздывающего типа невырожденным преобразованием переменных. В настоящей статье обоснована более простая схема замыкания системы (1) без преобразования переменных.

Замечание 3. Пусть система (15) замкнута дифференциально-разностным регулятором. Тогда $(g_1(p, \lambda), \ldots, g_{n+1}(p, \lambda))$ — полиномы и в выражении (6) все $\hat{v}_{ki}(\lambda) = \hat{q}_{ki}(\lambda) = 0$. Если (p_0, λ_0) есть решение системы (18): $M(p_0, \lambda_0) = 0$, то из (15) имеем равенства

$$g(p_0, \lambda_0)M(p_0, \lambda_0) = d(p_0, \lambda_0) = 0.$$

Поэтому всякая пара $(p_0, \lambda_0) \in P_\lambda$ останется корнем характеристического полинома $d(p, \lambda)$ системы (1), замкнутой любым дифференциально-разностным регулятором.

Пусть элементы базиса $G_p(p, \lambda)$ не имеют общего делителя $\theta(p, \lambda) \neq \mathrm{const}$. В этом случае базис Грёбнера $G_p(p, \lambda)$ содержит полином $d_0(p)$ с набором корней P_0, причём из $(p_0, \lambda_0) \in$ $\in P_\lambda$ следует, что $p_0 \in P_0$. Если $d(p, \lambda) = d(p)$ — характеристический полином системы (1), замкнутой дифференциально-разностным регулятором, то

$$g(p_0, \lambda_0)M(p_0, \lambda_0) = d(p_0) = 0, \quad (p_0, \lambda_0) \in P_\lambda.$$

Таким образом, все корни полинома $d_0(p)$ войдут в конечный спектр замкнутой системы, поэтому значения $p \in P_0$ будем называть *инвариантными спектральными значениями* относительно дифференциально-разностного регулятора. Полином $d_0(p)$ с множеством корней P_0 будем называть *инвариантным полиномом.* Убрать из конечного спектра замкнутой системы нежелательные инвариантные значения $p \in P_0$ можно лишь введя [20] в регулятор распределённые запаздывания. Этим и определяется вид обратной связи (6).

Считаем, что для системы (1) и выбранного регулятора (4), (6) (или (5), (6)) выполнены условия (16), (20). Согласно п. 2 элементы базиса $G_p(p, \lambda)$ не имеют общего делителя $\theta(p, \lambda) \neq \mathrm{const}$. По свойству базиса Грёбнера полином $d_0(p) \in G_p(p, \lambda)$ принадлежит идеалу, порождённому системой полиномов (17). Поэтому найдётся векторный полином

$$\Phi(p, \lambda) = (\varphi_1(p, \lambda), \ldots, \varphi_{n+1}(p, \lambda)) \tag{23}$$

такой, что справедливо разложение

$$\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = d_0(p). \tag{24}$$

Полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, можно найти методом неопределённых коэффициентов из равенства (24).

Замечание 4. При построении искомого регулятора используется требование: различным корням p_i полинома $d_0(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$. Если набор корней полинома $d_0(p)$ содержит комплексно-сопряжённую пару инвариантных спектральных значений $p_{k_{1,2}} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ такую, что $\sin(\beta h) = 0$, то $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}}h}$. Для разрешения данной ситуации введём в регуляторе “дробные” запаздывания: $\omega = h/k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда матрица системы (1) примет вид $A(p,\lambda) = A_0 + \sum_{j=1}^m (A_j + pC_j)\lambda^{jk}$. Натуральное число k можно выбрать так, чтобы $\sin(\beta h/k) \neq 0$ для всех пар $p_{k_{1,2}} = \alpha \pm i\beta$ таких, что $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}}h}$. Тогда различным значениям $p_i \in P_0$ будут соответствовать разные $\lambda_i = e^{-p_i h/k}$. Считаем далее это требование выполненным.

Введём матрицу

$$W_\psi(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pE - A_0 - \sum\limits_{j=1}^m (A_j + pC_j)\lambda^j & & -\tilde{b}(p,\lambda) \\ \psi_1(p,\lambda) \quad \cdots \quad \psi_n(p,\lambda) & & \psi_{n+1}(p,\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda),\ldots,\psi_{n+1}(p,\lambda))$ – действительный вектор, образованный полиномами или числами. Её определитель $\Delta(p,\lambda) = |W_\psi(p,\lambda)|$, очевидно, равен

$$\Delta(p,\lambda) = M_1(p,\lambda)\psi_1(p,\lambda) + \ldots + M_n(p,\lambda)\psi_n(p,\lambda) + M_{n+1}(p,\lambda)\psi_{n+1}(p,\lambda). \tag{25}$$

Справедлива

Лемма 2 [20, лемма 1]. *При выполнении условия (16) для произвольного набора чисел $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,\mu}\}$ найдётся действительный числовой вектор $\Psi = (\psi_1,\ldots,\psi_n,\psi_{n+1})$ такой, что*

$$\Delta(p_i,e^{-p_ih}) = M_1(p_i,e^{-p_ih})\psi_1 + \ldots + M_n(p_i,e^{-p_ih})\psi_n + M_{n+1}(p_i,e^{-p_ih})\psi_{n+1} \neq 0, \quad p_i \in P_0. \tag{26}$$

Вектор Ψ можно получить, исходя из (26), и затем записать полином $\Delta(p,\lambda)$ согласно (25). Полином $\Delta(p,\lambda)$, удовлетворяющий условию (26), можно строить и с полиномиальными коэффициентами: $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda),\ldots,\psi_{n+1}(p,\lambda))$. В частности, в качестве $\Delta(p,\lambda)$ можно брать подходящие полиномы системы (17) или элементы базиса Грёбнера этой системы полиномов, а также их линейные комбинации. Соответствующий выбранному полиному $\Delta(p,\lambda)$ набор коэффициентов $\Psi(p,\lambda)$ можно найти методом неопределённых коэффициентов из равенства (26) (см. ниже пример 1).

Введём функцию [20]

$$K(p,\lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + d(p,\lambda)). \tag{27}$$

Здесь $q(\lambda)$ — полином с действительными коэффициентами; полином $\Delta(p,\lambda) = \Psi(p,\lambda)M(p,\lambda)$ и вектор $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda),\ldots,\psi_{n+1}(p,\lambda))$ описаны выше в соотношениях (25), (26); $d(p,\lambda)$ — желаемый квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$ замкнутой системы (15).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (16), (20). Для того чтобы замкнутая система (15) имела заданный характеристический квазиполином $d(p,e^{-ph})$ вида (9), достаточно:*

1) через вычисление базиса Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ системы полиномов (17) найти полином $d_0(p)$ и векторный полином $\Phi(p,\lambda)$ согласно равенству (24);

2) найти векторный полином $\Psi(p,\lambda)$ и полином $\Delta(p,\lambda)$ согласно (25), (26);

3) выбрать полином $q(\lambda)$ таким, чтобы функция

$$f(p,\lambda)=K(p,\lambda)/d_0(p) \tag{28}$$

при $\lambda=e^{-ph}$ была целой ($p\in\mathbb{C}$);

4) в матрице (15) ($\lambda=e^{-ph}$) положить

$$(g_1(p,\lambda),\ldots,g_{n+1}(p,\lambda))=-f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi(p,\lambda). \tag{29}$$

Доказательство. Разлагая характеристический определитель $|\tilde W(p,\lambda)|$ замкнутой системы (15), (29) по последней строке, получаем

$$|\tilde W(p,\lambda)|=-f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi(p,\lambda)M(p,\lambda).$$

Ввиду (24), (25), (28) имеем

$$|\tilde W(p,\lambda)|=-f(p,\lambda)d_0(p)-q(\lambda)\Delta(p,\lambda)=-K(p,\lambda)-q(\lambda)\Delta(p,\lambda).$$

Заменив $K(p,\lambda)$ согласно (27), получим требуемый квазиполином:

$$|\tilde W(p,\lambda)|=-(-[q(\lambda)\Delta(p,\lambda)+d(p,\lambda)])-q(\lambda)\Delta(p,\lambda)=d(p,\lambda),\quad \lambda=e^{-ph}.$$

Теорема доказана.

Осталось привести замкнутую систему (15), (29) к нормальной форме.

Замечание 5. Если необходимо, то элементарными операциями над строками преобразуем последнюю строку (29) матрицы $\tilde W(p,\lambda)$ к виду, отвечающему управлению (6). В первых n позициях последней строки преобразованной матрицы $\tilde W(p,\lambda)$ полиномы, содержащие переменную p, могут быть только вида $p\lambda\alpha(\lambda)$, а в $(n+1)$-й позиции — $\theta_0(\lambda)p=(1+\lambda\tilde\theta(\lambda))p$, где $\alpha(\lambda)$, $\tilde\theta(\lambda)$ — некоторые полиномы. При наличии условия (20) полином $l_0(\lambda)\equiv 1$, и поэтому указанные преобразования определитель матрицы (15), (29) не меняют (см. ниже п. 5). Возвращаясь к фазовым переменным, получаем замкнутую систему в нормальной форме.

Следствие 1. *Условия (16), (20) необходимы и достаточны для модальной управляемости системы (1) регулятором вида (4), (6) (или (5), (6)).*

Доказательство. Если квазиполином (9) выбран запаздывающего типа, то его старший коэффициент $\theta_0(\lambda)\equiv 1$. Поэтому в силу леммы 1 должно быть $l_0(\lambda)\equiv 1$, что равносильно условию (20).

Если при некотором p_0 имеем $M(p_0,e^{-p_0h})=0$, то это значение не получится удалить из спектра предложенными регуляторами. Это видно [20] из разложения определителя характеристической матрицы (15) по последней строке, образованной целыми функциями. Поэтому условие (20) необходимо для модальной управляемости системы (1).

Достаточность условий (16), (20) для модальной управляемости следует из теоремы 1 и замечания 5. Следствие доказано.

Реализация требований теоремы 1 повторяет алгоритм построения регулятора модальной управляемости для системы запаздывающего типа, приведённый в работе [20, п. 1], поэтому ограничимся построением полинома $q(\lambda)$ согласно условию 3) теоремы 1.

Полином $q(\lambda)$ может быть найден как решение интерполяционной задачи. Напомним, что $P_0=\{p_k\in\mathbb{C},\ \ k=\overline{1,\mu}: d_0(p_k)=0\}$ — множество различных корней полинома $d_0(p)$. Пусть $\hat l_k$ — их алгебраические кратности. Ввиду замечания 4 все числа множества $\Lambda_0=\{\lambda_k=e^{-p_kh}:$ $p_k\in P_0,\ \ k=\overline{1,\mu}\}$ также различны. Условие 3) теоремы 1 равносильно следующему:

$$\frac{d^i}{dp^i}(q(e^{-ph})\Delta(p,e^{-ph})+d(p,e^{-ph}))\Big|_{p=p_k}=0,\quad p_k\in P_0,\quad i=\overline{0,\hat l_k-1},\quad k=\overline{1,\mu}. \tag{30}$$

Поскольку выполнено условие 2) теоремы 1, то согласно (26) при любом $p_k \in P_0$ имеет место $\Delta(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0$. Поэтому при каждом $k = \overline{1,\mu}$ из уравнения (30) найдём

$$q^{(i)}(\lambda_k), \quad i = \overline{0, \hat{l}_k - 1}, \quad k = \overline{1,\mu}, \quad \lambda_k = e^{-p_k h} \in \Lambda_0. \tag{31}$$

Для комплексно-сопряжённых чисел p, $\bar{p}$ числа $\lambda = e^{-ph}$, $\bar{\lambda} = e^{-\bar{p}h}$ также комплексно сопряжены. Поэтому система (30) для комплексно-сопряжённых пар $\{p_0, \bar{p}_0\} \in P_0$ имеет комплексно-сопряжённые решения

$$(q(\bar{\lambda}_0), q^{(1)}(\bar{\lambda}_0), \ldots, q^{(\hat{l}_0 - 1)}(\bar{\lambda}_0)) = (\bar{q}(\lambda_0), \bar{q}^{(1)}(\lambda_0), \ldots, \bar{q}^{(\hat{l}_0 - 1)}(\lambda_0)), \quad \hat{l}_0 \in \{\hat{l}_k, k = \overline{1,\mu}\}.$$

Окончательно полином $q(\lambda)$ получим как интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра по значениям (31), найденным из системы (30). Согласно [24, с. 110] полином $q(\lambda)$, построенный по интерполяционным значениям (31), будет иметь действительные коэффициенты.

Приведём пример построения регулятора модальной управляемости.

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка, заданную характеристической матрицей

$$W(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ -1 & p - p\lambda \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (0, \lambda)', \quad h = \ln 2. \tag{32}$$

Система (32) имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$: $w(p,\lambda) = p^2(1-\lambda) - 1$.

Запишем систему (17) алгебраических дополнений к последней строке матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda) = (M_1(p,\lambda), M_2(p,\lambda), M_3(p,\lambda))' = \big(\lambda, p\lambda, p^2(1-\lambda) - 1\big)'.$$

Находим базис Грёбнера этой системы полиномов в порядке $\lambda > p$: $G_p(p,\lambda) = ((p-1)(p+1), \lambda)$. Он содержит инвариантный полином $d_0(p) = (p-1)(p+1)$. Значит, множество $P_0 = \{-1; 1\}$. Проверяем неравенства (19) — они справедливы, значит, выполняется условие (16).

Система $l(\lambda) = (l_1(\lambda), l_2(\lambda), l_3(\lambda))$ алгебраических дополнений к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ k_1(\lambda) & k_2(\lambda) & k_3(\lambda) \end{bmatrix}$$

имеет вид $l(\lambda) = (0, 0, 1-\lambda)$.

Очевидно, что наибольший общий делитель $\mathrm{GCD}(l(\lambda)) = 1 - \lambda$, т.е. система не является модально управляемой регулятором (4), (6). Поэтому рассмотрим регулятор (5), (6): $\tilde{b}(p,\lambda) = (0; \lambda(p+\alpha))'$. Будем иметь

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -\lambda \\ k_1(\lambda) & k_2(\lambda) & k_3(\lambda) \end{bmatrix}, \quad l(\lambda) = (0, \lambda, 1-\lambda).$$

Здесь $\mathrm{GCD}(l(\lambda)) = 1$, т.е. выполнено условие (20).

Замечание 6. Если $p = \alpha$ является корнем характеристического квазиполинома $w(p, e^{-ph})$ исходной системы (в частности, возможно $w(\alpha,\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$), то это значение останется в спектре замкнутой системы при любом управлении (6). Это видно из разложения характеристического определителя $|\tilde{W}(p,\lambda)|$ по последней строке. Если $w(\alpha,\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то множество P_λ и, соответственно, множество P_0 не изменятся. Если $w(\alpha,\lambda) \neq \mathrm{const}$, то пары $\{(\alpha, \lambda_i) : w(\alpha,\lambda_i) = 0\}$ добавятся в множество P_λ. Учитываем это замечание при выборе значения α: $\tilde{b}(p,\lambda) = b(\lambda)(p+\alpha)$. В данном примере новая система полиномов $M(p,\lambda)$ будет следующей:

$$M(p,\lambda) = (\lambda(p+\alpha), p\lambda(p+\alpha), p^2(1-\lambda)-1)'.$$

Если $\alpha \neq 0$, то множество P_λ решений системы (17) пополнится парой $(p,\lambda) = (-\alpha, (\alpha^2-1)/\alpha^2)$, при этом изменится полином $d_0(p) = (p-1)(p+1)(p+\alpha)$. Если $\alpha = 0$, то базис Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ остается таким же: $((p-1)(p+1),\lambda)$, и полином $d_0(p) = (p-1)(p+1)$ сохраняет прежний более простой вид.

Итак, полагаем $\alpha = 0$, $\tilde{b}(p,\lambda) = (0,\lambda p)'$. Тогда характеристическую матрицу замкнутой системы запишем как

$$\tilde{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ -1 & p-p\lambda & -\lambda p \\ g_1(p,\lambda) & g_2(p,\lambda) & g_3(p,\lambda) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Из равенства (24), где $(\varphi_1(p,\lambda), \varphi_2(p,\lambda), \varphi_3(p,\lambda))$ — полиномы с неопределёнными коэффициентами, $d_0(p) = (p-1)(p+1)$, заключаем, что $\Phi(p,\lambda) = (0,1,1)$.

Полином $\Delta(p,\lambda)$ находим из условия (26). Очевидно, что этому условию удовлетворяет λ — элемент базиса Грёбнера $G_p(p,\lambda)$, поэтому для $\Delta(p,\lambda) = \lambda$ обязательно найдётся вектор $\Psi(p,\lambda)$ согласно равенству (25). Методом неопределённых коэффициентов из уравнения (25) получаем, что $\Psi(\lambda) = (0, 1-\lambda, -\lambda)$.

В качестве желаемого характеристического квазиполинома выбираем $d(p,\lambda) = (1+2p)(3+ p)(2+\lambda)(p+\lambda)/4$, $\lambda = e^{-ph}$. Записываем (см. (27)) функцию $K(p,\lambda)$. Интерполяционные значения для полинома $q(\lambda)$ получаем из уравнения (30): $q(e^{-(-1)h}) = q(2) = 1$, $q(e^{-1h}) = q(1/2) = -45/2$. Следовательно, $q(\lambda) = (47\lambda - 91)/3$.

Последняя строка характеристической матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ замкнутой системы (15) согласно (28), (29) имеет вид

$$(g_1(p,\lambda), g_2(p,\lambda), g_3(p,\lambda)) = -K(p,\lambda)/d_0(p)\Phi(p,\lambda) - q(\lambda)\Psi(\lambda).$$

Заменяя полиномы $K(p,\lambda)$, $\Phi(p,\lambda)$, $q(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ соответствующими выражениями, получаем

$$(g_1(p,\lambda), g_2(p,\lambda), g_3(p,\lambda)) =$$

$$= \left(1, \frac{3p\lambda}{2} + I(p,\lambda) + \frac{194\lambda^2 - 519\lambda + 406}{12}, p + \frac{3p\lambda}{2} + I(p,\lambda) + \frac{194\lambda^2 - 331\lambda + 42}{12}\right),$$

$$I(p,\lambda) = \frac{(2-\lambda)(91\lambda - 3)}{12(p+1)} - \frac{(1-2\lambda)(14\lambda - 9)}{3(p-1)}. \tag{34}$$

Прямым вычислением проверяем, что характеристический определитель замкнутой системы (33), (34) равен $d(p,\lambda) = (1+2p)(3+p)(2+\lambda)(p+\lambda)/4$, $\lambda = e^{-ph}$.

Запишем полученный регулятор в явном виде. Дробно-рациональные функции заменяем [23] интегралами согласно (7), λ — оператор сдвига, p — оператор дифференцирования. На основании (34) имеем

$$u(t) = \dot{x}_3(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - \frac{3}{2}\dot{x}_2(t-h) - \frac{1}{12}(406x_2(t) - 519x_2(t-h) + 194x_2(t-2h)) + J_2(t) -$$

$$- \frac{3}{2}\dot{x}_3(t-h) - \frac{1}{12}(42x_3(t) - 331x_3(t-h) + 194x_3(t-2h)) + J_3(t),$$

$$J_i(t) = \frac{1}{6}\int_0^h e^{-s}(3x_i(t-s) - 91x_i(t-h-s))ds - \frac{1}{3}\int_0^h e^{s}(9x_i(t-s) - 14x_i(t-h-s))ds, \quad i = 2,3.$$

Если система модально управляема, то, выбрав характеристический полином $d(p,\lambda)=d(p)$, имеющий корни с отрицательными действительными частями, получим для системы (1) экспоненциальный стабилизатор. Заметим, что квазиполином $d(p,\lambda)=(1+2p)(3+p)(2+\lambda)(p+\lambda)/4$, $\lambda = e^{-ph}$, $h = \ln 2$, задаёт экспоненциально устойчивый спектр, так как все корни квазиполинома $p + e^{-p\ln 2}$ лежат в левой полуплоскости [25, теорема 13.8], и значит, выполнено условие (10).

4. Редактирование части спектра, инвариантной относительно дифференциально-разностного регулятора. Согласно замечанию 3 всякая пара чисел $(p_0,\lambda_0)\in P_\lambda$ является корнем характеристического полинома $d(p,\lambda)$ системы (1), замкнутой любым дифференциально-разностным регулятором.

В случае спектральной приводимости посредством дифференциально-разностного регулятора из (15) получаем равенство

$$g(p_0,\lambda_0)M(p_0,\lambda_0) = d(p_0,\lambda_0) = \theta_0(\lambda_0)d(p_0) = 0, \tag{35}$$

из которого вытекает, что хотя бы один множитель из пары $\theta_0(\lambda_0)$, $d(p_0)$ обращается в нуль.

Если $d(p_0)=0$ или/и $\theta_0(e^{-p_0h})=0$, то имеем

$$d(p_0,e^{-p_0h}) = \theta_0(e^{-p_0h})d(p_0) = 0,$$

т.е. значение p_0 остаётся в спектре системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором. Если же $d(p_0)\neq 0$ и $\theta_0(e^{-p_0h})\neq 0$, то значение p_0 выпадает из спектра системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором, но тогда $\theta_0(\lambda_0)=0$, и спектру принадлежат все p_i — решения уравнения $e^{-p_ih}=\lambda_0$.

Таким образом, когда система замкнута дифференциально-разностным регулятором, то всякая пара $(p_0,\lambda_0)\in P_\lambda$ удовлетворяет равенству (35). Последнее может быть обеспечено либо посредством $d(p_0)=0$, либо посредством $\theta_0(\lambda_0)=0$, т.е. нежелательные значения p_0 можно исключать из спектра системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором, обеспечив равенство $\theta_0(\lambda_0)=0$. Это свойство можно использовать для редактирования спектра системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором.

Реализуем этот подход к управлению спектром для общего случая системы (1) и заодно выясним условия спектральной приводимости. В общем случае базис Грёбнера системы полиномов $M(p,\lambda)$ в словарном порядке $\lambda>p$ будет иметь вид

$$G_p(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)B(p,\lambda), \quad B(p,\lambda) = (d_0(p),\rho_1(p,\lambda),\ldots,\rho_{n_p}(p,\lambda)). \tag{36}$$

Здесь $\theta(p,\lambda)=\mathrm{GCD}(M(p,\lambda))$ — наибольший общий делитель системы полиномов $M(p,\lambda)$, и полиномы $(d_0(p),\rho_1(p,\lambda),\ldots,\rho_{n_p}(p,\lambda))$ не имеют общего делителя-полинома.

По свойству базиса Грёбнера все элементы $P_\lambda = \{(p,\lambda)\in\mathbb{C}^2 : M(p,\lambda)=0\}$ и только они есть решения системы $G_p(p,\lambda)=0$. Поэтому P_λ можно представить как объединение решений уравнений

$$\theta(p,\lambda)=0, \quad B(p,\lambda)=0. \tag{37}$$

Пусть, как и раньше, P_0 — множество корней полинома $d_0(p)$. По свойству базиса Грёбнера для каждого корня $p_i\in P_0$ из системы

$$B(p,\lambda)=0 \tag{38}$$

найдётся одно или несколько значений λ_{ij}, $j=\overline{1,r_i}$. Множество всех решений (p_i,λ_{ij}) системы (38) обозначим $\hat{P}_\lambda$. Ввиду (37) $\hat{P}_\lambda\subseteq P_\lambda$.

Поскольку $\hat{d}_0(p,\lambda)=\theta(p,\lambda)d_0(p)$ — элемент базиса Грёбнера системы полиномов $M(p,\lambda)$, то найдётся векторный полином $\tilde{\Phi}(p,\lambda)$ вида (23), обеспечивающий равенство

$$\tilde{\Phi}(p,\lambda)M(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)d_0(p). \tag{39}$$

Все $(p_0, \lambda_0) \in \hat{P}_\lambda$ являются нулями полинома $\theta(p, \lambda)d_0(p)$ ввиду $M(p_0, \lambda_0) = 0$, так как $\hat{P}_\lambda \subseteq P_\lambda$. Поэтому если из разложения полинома $d_0(p)$ удалить множитель $p - p_0$, отвечающий корню $p_0 \in P_0$, то в правой части равенства, аналогичного (39) (см. (42)), появится полином $\breve{\theta}(\lambda)$ такой, что $\breve{\theta}(\lambda_i) = 0$, где λ_i — все значения такие, что $(p_0, \lambda_i) \in \hat{P}_\lambda$. Разумеется, если $p_0 = \alpha_0 + \mathrm{i}\beta_0$, $\beta_0 \neq 0$, то, чтобы коэффициенты полиномов остались действительными, следует удалять произведение $(p - p_0)(p - \bar{p}_0)$ ($\bar{p}_0$ — комплексно-сопряжённое число).

Пусть $d_0(p) = d_{01}^{\tau_1}(p) \cdots d_{0\nu_p}^{\tau_{\nu_p}}(p)$ — разложение полинома $d_0(p)$ на взаимно простые линейные и квадратичные (с отрицательным дискриминантом) множители. И пусть $\breve{d}_0(p) = d_{01}^{\breve{\tau}_1}(p) \cdots d_{0\nu_p}^{\breve{\tau}_{\nu_p}}(p)$ — отредактированный полином $d_0(p)$, где показатели степеней изменены (скажем, некоторые сделаны нулевыми). А именно, положим $\breve{\tau}_i = 0$, $i \in \overline{1, \nu_p}$, если множитель $d_{0i}(p) = p - p_i$ (или $d_{0i}(p) = (p - p_i)(p - \bar{p}_i)$) содержит значение $\operatorname{Re} p_i \geqslant 0$, а все пары $(p_i, \lambda_{ij}) \in \hat{P}_\lambda$, $j = \overline{1, r_i}$, таковы, что $|\lambda_{ij}| > 1$ (т.е. для p_{ij}, найденных из уравнения $e^{-p_{ij}h} = \lambda_{ij}$, имеем $\operatorname{Re} p_{ij} < 0$). Вычислив базис Грёбнера $\breve{G}_\lambda(p, \lambda)$ для системы полиномов

$$\theta(p, \lambda)(d_0(p), \breve{d}_0(p)\rho_1(p, \lambda), ..., \breve{d}_0(p)\rho_{n_p}(p, \lambda)) \tag{40}$$

в словарном порядке $p > \lambda$, получим

$$\breve{G}_\lambda(p, \lambda) = \theta(p, \lambda)\breve{d}_0(p)(\breve{\theta}(\lambda), \breve{\rho}_1(p, \lambda), ..., \breve{\rho}_{n_\lambda}(p, \lambda)), \quad \breve{\theta}(\lambda) = \prod_{j=1}^{r_i}(\lambda - \lambda_{ij})^{s_j}. \tag{41}$$

Отсюда вместо полинома $\hat{d}_0(p, \lambda)$ будем иметь новый полином $\hat{d}_1(p, \lambda) = \theta(p, \lambda)\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p)$, где $\breve{d}_0(p_i) \neq 0$ и $\breve{\theta}(\lambda_{ij}) = 0$, $j = \overline{1, r_i}$.

Поскольку полином $\hat{d}_1(p, \lambda)$ принадлежит идеалу, порождённому системой полиномов (17), то по свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином $\Phi(p, \lambda)$ (см. (23)) такой, что

$$\Phi(p, \lambda)M(p, \lambda) = \theta(p, \lambda)\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p). \tag{42}$$

Таким образом, вместо неустойчивого корня p_i $(\operatorname{Re} p_i \geqslant 0)$ полинома $d_0(p)$ в спектр добавили набор корней полинома $\breve{\theta}(\lambda)$ таких, что $|\lambda_{ij}| > 1$, $(p_i, \lambda_{ij}) \in \hat{P}_\lambda$, $j = \overline{1, r_i}$.

Если набор корней полинома $\breve{d}_0(p)$ как спектральных значений подходящий, то, взяв

$$g(p, \lambda) = \Phi(p, \lambda)\breve{d}(p, \lambda),$$

где $\breve{d}(p, \lambda)$ — некоторый полином, получим систему (15), замкнутую дифференциально-разностным регулятором, с характеристическим полиномом

$$d(p, \lambda) = \theta(p, \lambda)\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p)\breve{d}(p, \lambda). \tag{43}$$

Полином $\breve{d}(p, \lambda)$ или $\breve{d}(p, \lambda) = \breve{d}(p)$ может понадобиться, чтобы степень характеристического полинома $d(p, \lambda)$ замкнутой системы (15) относительно p была равна $n + 1$.

Замечание 7. Для записи полученной системы в нормальной форме необходимо, чтобы степень полинома $d(p, \lambda)$ относительно p была равна $n + 1$. Поскольку $M_{n+1}(p, \lambda) = w(p, \lambda)$, где $w(p, \lambda)$ — характеристический полином системы (1), то степень полинома $\theta(p, \lambda)$, как делителя $w(p, \lambda)$, относительно p не больше чем n. Поэтому указанное требование к полиному $d(p, \lambda)$ можно обеспечить за счёт выбора полиномов $\breve{d}_0(p)$, $\breve{d}(p, \lambda)$.

Если векторный полином $g(p, \lambda)$ содержит слагаемые $\alpha(\lambda)p^k$, $\alpha(\lambda)$ — полином, $k \geqslant 2$, и αp, α — число, то потребуется приведение (см. п. 5) последней строки матрицы (15) к виду, указанному в замечании 5. Корни полинома $\breve{d}_0(p)$, для которых выполняется неравенство

$M(p,e^{-ph})\neq 0,$ можно при необходимости удалить из спектра замкнутой системы (15), добавив в регулятор интегральные члены (см. п. 6).

Вывод. Для того чтобы замкнутая система (15) имела характеристический полином вида (8), необходимо и достаточно, чтобы наибольший общий делитель $\theta(p,\lambda)$ системы полиномов $M(p,\lambda)$ допускал разделение переменных: $\theta(p,\lambda)=\bar{\theta}(\lambda)\bar{d}(p),$ если $\theta(p,\lambda)\not\equiv 1.$ При этом спектральное приведение (см. определение 1) можно обеспечить дифференциально-разностным регулятором с изменением части спектра, задаваемой полиномом $d_0(p)$.

Описанный способ управления спектром системы (1) назовём *редактированием конечной части спектра* (множество P_0). Этот подход применим и к системам запаздывающего типа.

Пример 2. Рассмотрим систему второго порядка

$$W(p,\lambda)=\begin{bmatrix}p-\lambda & -2\\ \lambda & p+2\end{bmatrix},\quad b(\lambda)=(\lambda-2,0)',\quad h=\ln 2. \tag{44}$$

Система (44) имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda=e^{-ph})$ $w(p,\lambda)=p(p+2-\lambda)$ имеет очевидный корень $p=0.$ Таким образом, система не является экспоненциально устойчивой.

Выполним проверку условий модальной управляемости (16), (20) для регулятора вида (4), (6). Действуем согласно обоснованной в п. 2 схеме.

Запишем характеристическую матрицу замкнутой системы

$$\tilde{W}(p,\lambda)=\begin{bmatrix}p-\lambda & -2 & 2-\lambda\\ \lambda & p+2 & 0\\ g_1(p,\lambda) & g_2(p,\lambda) & g_3(p,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Вычисляем систему (17) алгебраических дополнений к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda)=(M_1(p,\lambda),M_2(p,\lambda),M_3(p,\lambda))'=((p+2)(\lambda-2),(2-\lambda)\lambda,p(p+2-\lambda))'.$$

Находим $G_p(p,\lambda)$ — базис Грёбнера в порядке $\lambda>p.$ Он содержит полиномы $G_p(p,\lambda)=$ $=(p^2(p+2),p^2+2\lambda-4).$ Значит, $\theta(p,\lambda)=1,$ $d_0(p)=p^2(p+2)$ — инвариантный полином, отсюда множество $P_0=\{-2;0\}.$ Убеждаемся, что неравенства (19) имеют место. Условие (20) при $C_j=0,$ $j=\overline{1,m},$ всегда выполнено. Таким образом, система (44) модально управляема и, значит, экспоненциально стабилизируема (см. теорему 1). Посредством интегроразностного регулятора (см. п. 3) замкнутой системе можно обеспечить любой характеристический квазиполином или полином, скажем, $d(p)=(p+1)(p+2)(p+3)$.

Покажем, что, используя предложенную методику, можно стабилизировать систему дифференциально-разностным регулятором. Замкнутая система в таком случае, правда, будет иметь нейтральный тип с бесконечным спектром. Построим такой стабилизатор.

Значение $p=0$ следует исключить из спектра замкнутой системы. Это возможно, так как

$$M(p,e^{-ph})\Big|_{p=0}=(-2,1,0)\neq 0.$$

Система полиномиальных уравнений (18) равносильна $G_p(p,\lambda)=0,$ отсюда находим множество $P_\lambda=\{(-2,0),(0,2)\}.$ Имеем пару $(p,\lambda)=(0,2).$ Так как $\lambda=2>1,$ то, заменив в характеристическом полиноме замкнутой системы множитель p^2 множителем $(\lambda-2)^s,$ $s\geqslant 1$ — целое число, обеспечим выполнение критерия экспоненциальной устойчивости (11).

Возьмём $\breve{d}_0(p)=p^0(p+2),$ тогда система полиномов (40) будет иметь вид

$$\left(p^2(p+2),(p+2)\left(p^2+2\lambda-4\right)\right).$$

Вычислив базис Грёбнера (41) для этой системы полиномов в порядке $p > \lambda$, получим полином

$$\breve{G}_\lambda(p,\lambda) = \big((p+2)(\lambda-2), p^2(p+2)\big) \Rightarrow \breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p) = (p+2)(\lambda-2)$$

и новое разложение

$$\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = \breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p) = (p+2)(\lambda-2), \quad \Phi(p,\lambda) = (1,0,0).$$

Поскольку замкнутая система третьего порядка, то обе части последнего равенства домножим на $-(p+1)(p+3)/2$. Последнюю строку характеристической матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ системы (15) имеем вида

$$(g_1(p,\lambda), g_2(p,\lambda), g_3(p,\lambda)) = -1/2(p+1)(p+3)\Phi(p,\lambda) = (-3/2-2p-p^2/2, 0, 0).$$

Множитель $-1/2$ добавлен, чтобы коэффициент при одночлене p^3 сделать равным единице.

Характеристический определитель замкнутой системы равен $d(p,\lambda) = (p+1)(p+2)(p+ +3)(1-\lambda/2)$, значит, выполнен критерий экспоненциальной устойчивости (11). Осталось последнюю строку матрицы

$$\tilde{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p-\lambda & -2 & 2-\lambda \\ \lambda & p+2 & 0 \\ -3/2-2p-p^2/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

посредством элементарных операций привести к виду, указанному в замечании 5.

Чтобы исключить переменную p в первой позиции последней строки, домножаем первую строку матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ на $-(-p/2-(\lambda+4)/2)$ и прибавляем к последней. Затем прибавляем вторую строку к полученной третьей, в итоге последняя строка характеристической матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$

$$g(p,\lambda) = \left(-\frac{1}{2}\left(\lambda^2+2\lambda+3\right), -2-\lambda, p-\frac{p\lambda}{2}+4-\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

Запишем построенный регулятор в явном виде:

$$u(t) = x_3(t),$$
$$\dot{x}_3(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(t-2h)+2x_1(t-h)+3x_1(t)\right)+2x_2(t)+x_2(t-h)+ \\ +\frac{1}{2}\dot{x}_3(t-h)-4x_3(t)+x_3(t-h)+\frac{1}{2}x_3(t-2h).$$

Замечание 8. Если $(p_0,\lambda) \in P_\lambda$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, то значение p_0 исключить указанным способом не получится, так как $(p-p_0)^{\tau_0}$ будет общим множителем для всей системы полиномов $M(p,\lambda)$.

5. Приведение системы к нормальной форме. После замыкания системы (1), как правило, возникает необходимость приведения полученной системы (15) к нормальной форме. Для этого последнюю строку матрицы (15) следует привести в виду (см. замечание 5), отвечающему уравнению (6). Рассмотрим этот вопрос для общего случая, т.е. без допущения условий (16), (20).

Чтобы замкнутая система имела нейтральный тип, в первых n позициях последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ посредством элементарных операций над строками убираем слагаемые вида $\alpha(\lambda)p^k$, $\alpha(\lambda)$ — полином, $k \geqslant 2$, и αp, α — число. Для выполнения этой процедуры приведём матрицу $\tilde{W}(p,\lambda)$ к виду, где переменная p присутствует в первых n строках только в элементах по главной диагонали.

Рассмотрим введённые выше (см. п. 2) коэффициенты $l_i(\lambda)$ при степенях p^n в полиномах $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$. Полином $M_{n+1}(p,\lambda)$ имеет вид $M_{n+1}(p,\lambda)=p^n(1+\lambda\alpha_0(\lambda))+d_{n-1}(p,\lambda)$, где полином $d_{n-1}(p,\lambda)$ относительно p имеет степень не выше $n-1$. Поэтому $l_{n+1}(\lambda)=1+ +\lambda\alpha_0(\lambda)$ и, следовательно, $l_0(\lambda)=1+\lambda\tilde{\alpha}_0(\lambda)$, где $\alpha_0(\lambda)$, $\tilde{\alpha}_0(\lambda)$ — некоторые полиномы. Пользуясь алгоритмом Евклида или методом неопределённых коэффициентов, получаем равенство

$$l_0(\lambda)=\mathrm{GCD}(l(\lambda))=\hat{\beta}_1(\lambda)l_1(\lambda)+...+\hat{\beta}_n(\lambda)l_n(\lambda)+\hat{\beta}_{n+1}(\lambda)l_{n+1}(\lambda), \tag{45}$$

где $\hat{\beta}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, — некоторые полиномы.

Поскольку $l_{n+1}(\lambda)=1+\lambda\alpha_0(\lambda)$, то вектор $(\hat{\beta}_1(\lambda),\ldots,\hat{\beta}_{n+1}(\lambda))$, удовлетворяющий (45), можно привести к виду

$$(\lambda\tilde{\beta}_1(\lambda),\ldots,\lambda\tilde{\beta}_n(\lambda),1+\lambda\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda)),$$

где $\tilde{\beta}_1(\lambda)$, $\ldots$, $\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda)$ — некоторые полиномы. Действительно, пусть свободный член полинома $\hat{\beta}_i(\lambda)=\hat{\beta}_i+\lambda\hat{\beta}_{i0}(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, отличен от нуля: $\hat{\beta}_i\neq 0$, тогда представим $\hat{\beta}_i(\lambda)$ следующим образом:

$$\hat{\beta}_i(\lambda)=\hat{\beta}_i(1+\lambda\alpha_0(\lambda))+\lambda\tilde{\beta}_i(\lambda)=\hat{\beta}_il_{n+1}(\lambda)+\lambda\tilde{\beta}_i(\lambda),\quad \tilde{\beta}_i(\lambda)=-\hat{\beta}_i\alpha_0(\lambda)+\hat{\beta}_{i0}(\lambda).$$

В результате в соотношении (45) многочлен $\hat{\beta}_i(\lambda)$ заменится на полином $\lambda\tilde{\beta}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$:

$$\lambda\tilde{\beta}_1(\lambda)l_1(\lambda)+...+\lambda\tilde{\beta}_n(\lambda)l_n(\lambda)+\ldots+\bigg(\hat{\beta}_{n+1}(\lambda)+\sum_{i=1}^n\hat{\beta}_il_i(\lambda)\bigg)l_{n+1}(\lambda)=l_0(\lambda).$$

Подставляя $\lambda=0$, получаем $(\hat{\beta}_{n+1}(0)+\sum_{i=1}^n\hat{\beta}_il_i(0))\cdot 1=1$. Отсюда заключаем, что

$$\hat{\beta}_{n+1}(\lambda)+\sum_{i=1}^n\hat{\beta}_il_i(\lambda)=1+\lambda\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda),$$

где $\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda)$ — некоторый полином.

Обозначим

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix}E-\sum_{j=1}^m C_j\lambda^j & -\hat{b}(\lambda)\\ \lambda\tilde{\beta}_1(\lambda)...\lambda\tilde{\beta}_n(\lambda) & 1+\lambda\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda)\end{bmatrix}.$$

Понятно, что $|L(\lambda)|=l_0(\lambda)$. Введём присоединённую матрицу $L^v(\lambda)=L^{-1}(\lambda)l_0(\lambda)$ и рассмотрим матрицу

$$\tilde{W}(p,\lambda)L^v(\lambda)=\begin{bmatrix}pl_0(\lambda)-\tilde{a}_{11}(\lambda) & \ldots & -\tilde{a}_{1,n-1}(\lambda) & -\tilde{a}_{1,n}(\lambda) & -\tilde{a}_{1,n+1}(\lambda)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\tilde{a}_{n,1}(\lambda) & \ldots & -\tilde{a}_{n,n-1}(\lambda) & pl_0(\lambda)-\tilde{a}_{n,n}(\lambda) & -\tilde{a}_{n,n+1}(\lambda)\\ \tilde{g}_1(p,\lambda) & \ldots & \tilde{g}_{n-1}(p,\lambda) & \tilde{g}_n(p,\lambda) & \tilde{g}_{n+1}(p,\lambda)\end{bmatrix}, \tag{46}$$

последняя строка которой

$$(\tilde{g}_1(p,\lambda),\ldots,\tilde{g}_{n+1}(p,\lambda))=(g_1(p,\lambda),\ldots,g_{n+1}(p,\lambda))L^v(\lambda)$$

образована полиномами и дробно-рациональными функциями вида (7).

Согласно замечанию 5, в первых n позициях последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ полиномы, содержащие переменную p, допускаются только вида $p\lambda\alpha(\lambda)$, где $\alpha(\lambda)$ — полином. Поэтому среди первых n элементов этой строки выбираем элемент (пусть его номер i_0), содержащий член $p^{m_1}\xi(\lambda)$ с наибольшей степенью $m_1 \geqslant 2$ относительно p. Пусть $l_c(\lambda) = \mathrm{LCM}(\xi(\lambda), l_0(\lambda))$ — наименьшее общее кратное полиномов $(\xi(\lambda), l_0(\lambda))$, т.е. $l_c(\lambda) = \xi(\lambda)\hat{l}_0(\lambda)$ и $l_c(\lambda) = l_0(\lambda)\tilde{\xi}(\lambda)$, где $\hat{l}_0(\lambda)$, $\tilde{\xi}(\lambda)$ — некоторые полиномы, делители полиномов $l_0(\lambda)$, $\xi(\lambda)$ соответственно. Домножая i_0-ю строку (она содержит $pl_0(\lambda)-\tilde{a}_{i_0,i_0}(\lambda)$) на $-p^{m_1-1}\tilde{\xi}(\lambda)$ и прибавляя к последней строке, домноженной на $\hat{l}_0(\lambda)$, понизим степень переменной p. Повторяя этот процесс, приведём последнюю строку к виду, когда переменная p будет присутствовать только в первой степени: $p\lambda\alpha(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$ — полином. Чтобы убрать в позиции с номером i_0 член вида αp, α — число, к последней строке прибавим i_0-ю строку, умноженную на $-\alpha$.

В результате в первых n позициях последней строки получим функции $\bar{g}_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, включающие члены $p\lambda\alpha(\lambda)$ ($\alpha(\lambda)$ — полином), полиномы от λ и целые дробно-рациональные функции вида (7) с полиномиальными коэффициентами от λ. Поскольку старший член полинома $d(p,\lambda)$ относительно p имеет вид $p^{n+1}(1+\lambda\tilde{\theta}(\lambda))$, $\tilde{\theta}(\lambda)$ — полином, то функция $\tilde{g}_{n+1}(p,\lambda)$ заменится на функцию $p+\bar{g}_{n+1}(p,\lambda)$, где функция $\bar{g}_{n+1}(p,\lambda)$ того же вида, что и $\bar{g}_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$.

Вернёмся к исходной системе вида (15), домножив полученную в результате описанных преобразований характеристическую матрицу справа на матрицу $L(\lambda)(1/l_0(\lambda))$. Чтобы записать последнее уравнение замкнутой системы (1) в координатной форме (6), целые дробно-рациональные функции в последней строке заменяем [23] интегралами вида (7). Эта процедура приведения замкнутой системы к нормальной форме продемонстрирована в [20, пример 1].

Как видно из описанной процедуры, в процессе приведения последней строки матрицы (15) к виду, отвечающему уравнению (6), возможно домножение последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ на делители полинома $l_0(\lambda)$. Соответственно, определитель $\hat{w}(p,\lambda)$ преобразованной матрицы (15) может приобрести некоторый множитель $\tilde{l}_0(\lambda)$, составленный из делителей полинома $l_0(\lambda)$: $\hat{w}(p,\lambda) = \tilde{l}_0(\lambda)d(p,\lambda)$. Однако других корней, кроме корней полинома $l_0(\lambda)$, процедура приведения последней строки матрицы (15) к виду, отвечающему уравнению (6), характеристическому полиному $\hat{w}(p,\lambda)$ не добавит.

Если выполнено условие (20), то $l_0(\lambda)\equiv 1$ и приведение замкнутой системы с матрицей $\tilde{W}(p,\lambda)L^v(\lambda)$ несколько упрощается (см. в [20] приведение к нормальной форме системы запаздывающего типа). При этом характеристический полином $d(p,\lambda) = |\tilde{W}(p,\lambda)|$ не изменится.

6. Построение экспоненциального стабилизатора в общем случае. Как следует из выполненного исследования, возможности модального управления спектром системы (1) определяются полиномами $d_0(p)$ и $l_0(\lambda)$, которые находятся через вычисление базиса Грёбнера (см. п. 2). При невыполнении условия (16) все полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, могут иметь общий множитель $\theta(p,\lambda)$, зависящий от λ и/или от p. В таком случае вместо полинома $d_0(p)$ в базисе Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ будем иметь (см. (36)) полином $\hat{d}_0(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)d_0(p)$ — последний полином, который получается при вычислении базиса Грёбнера системы полиномов $M(p,\lambda)$ в словарном порядке $\lambda > p$ по алгоритму Бухбергера.

Предложенную в пп. 3–5 схему замыкания системы (1) назовем *спектральным приведением.* Уточним роль каждого из полиномов $\hat{d}_0(p,\lambda)$, $l_0(\lambda)$ в управлении спектром системы (1). Начнём с полинома $l_0(\lambda)$. Докажем лемму.

Лемма 3. *Для экспоненциальной стабилизации системы (1) через спектральное приведение необходимо, чтобы все корни полинома* $l_0(\lambda)$, *если* $l_0(\lambda)\not\equiv 1$, *были* $|\lambda|>1$.

Доказательство. Согласно [9] для экспоненциальной устойчивости замкнутой системы (15) необходимо, чтобы экспоненциально устойчива была соответствующая разностная система с характеристической матрицей $F(\lambda)$ (см. (21)). Поскольку $|F(\lambda)| = \theta_0(\lambda)$, то необходимо, чтобы корни полинома $\theta_0(\lambda)$ удовлетворяли неравенству $|\lambda|>1$. Ввиду леммы 1 полином $l_0(\lambda)$ — делитель полинома $\theta_0(\lambda)$, поэтому его корни также должны быть $|\lambda|>1$. Отсюда получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Утверждение леммы 3 равносильно следующему условию:

$$\operatorname{rank}\Bigl[E-\sum_{j=1}^{m}C_j\lambda^j,\hat b(\lambda)\Bigr]=n,\quad \lambda\in\mathbb{C},\quad |\lambda|\leqslant 1. \tag{47}$$

Если применяется регулятор (4), (6), то последний столбец матрицы

$$\tilde F(\lambda)=\Bigl[E-\sum_{j=1}^{m}C_j\lambda^j\quad \hat b(\lambda)\Bigr]$$

нулевой $(\hat b(\lambda)=b(\lambda)\chi(4)=0)$, и все полиномы $l_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, кроме последнего, равны нулю, поэтому $l_0(\lambda)=|E-\sum_{j=1}^m C_j\lambda^j|$. Если применяется регулятор (5), (6), то последний столбец матрицы $\tilde F(\lambda)$ — это $\hat b(\lambda)=b(\lambda)\chi(5)=b(\lambda)$, и полином $l_0(\lambda)$, вообще говоря, будет другим.

Пример 3. 1. Пусть

$$\tilde F(\lambda)=\begin{bmatrix}1+\lambda/2 & 0 & 0\\ 0 & 1+2\lambda & \lambda\chi(\cdot)\end{bmatrix}.$$

Если взят регулятор (4), (6), то $\chi(4)=0$, $l_0(\lambda)=(\lambda+2)(2\lambda+1)$, и ввиду леммы 3 система не может быть стабилизирована через спектральное приведение. Если взят регулятор (5), (6), то $\chi(5)=1$, $l_0(\lambda)=\lambda+2$, и наличие экспоненциального стабилизатора не исключается — зависит от конкретных коэффициентов исходной системы.

2. Пусть

$$\tilde F(\lambda)=\begin{bmatrix}1+2\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda\chi(\cdot)\end{bmatrix}.$$

Тогда для обоих регуляторов $l_0(\lambda)=1+2\lambda$ и ввиду леммы 3 система не может быть стабилизирована через спектральное приведение.

Перейдём к анализу полинома $\hat d_0(p,\lambda)$. В общем случае этот полином имеет вид (см. п. 4)

$$\hat d_0(p,\lambda)=\theta(p,\lambda)d_0(p),\quad \theta(p,\lambda)=\hat d(p)\hat\theta(\lambda)d_2(p,\lambda), \tag{48}$$

где $\theta(p,\lambda)=\operatorname{GCD}(M(p,\lambda))$ — наибольший общий делитель системы полиномов $M(p,\lambda)$; $d_0(p)$, $\hat d(p)$, $\hat\theta(\lambda)$ — полиномы; $d_2(p,\lambda)$ — произведение неразложимых полиномов, зависящих и от p, и от λ.

1) Если $\theta(p,\lambda)\neq\mathrm{const}$, то этот полином, как общий множитель [20] системы полиномов $M(p,\lambda)$, останется в характеристическом полиноме замкнутой системы при любом регуляторе вида (4), (6) (или (5), (6)). Поэтому если $\hat d(p)\neq\mathrm{const}$, то для стабилизации необходимо, чтобы для всех корней данного полинома имело место неравенство $\operatorname{Re}p<0$. Если $\hat\theta(\lambda)\neq\mathrm{const}$, то для стабилизации необходимо, чтобы все корни полинома $\hat\theta(\lambda)$ были $|\lambda|>1$. Если $d_2(p,\lambda)\neq$ $\neq\mathrm{const}$, то для стабилизации необходимо, чтобы квазиполином $d_2(p,e^{-ph})$ был экспоненциально устойчив. Его корни должны удовлетворять неравенству $\operatorname{Re}p<\varepsilon$, $\varepsilon<0$ — некоторое число.

2) На корнях полинома $d_0(p)$ (множество P_0) проверяем неравенства (19). Если для значения $p_0\in P_0$ выполняется условие (19), то это значение можно исключить, добавив в регулятор интегральные слагаемые (см. примеры 1, 5). Нежелательные значения $p_0\in P_0$ можно также исключить, применив процедуру редактирования (см. примеры 2, 5). При редактировании конечной части спектра (множество P_0) в состав характеристического полинома добавится (см. п. 4) множитель $\breve\theta(\lambda)=\prod_{j=1}^{r_i}(\lambda-\lambda_{ij})^{s_j}$, где λ_{ij} — значения, соответствующие исключённым значениям p_i: $(p_i,\lambda_{ij})\in\hat P_\lambda$ (см. примеры 2, 5). Поскольку $\lambda=e^{-ph}$, то каждому значению λ_{ij} соответствует бесконечный набор спектральных значений.

3) Если при некотором $p_i \in P_0$, $i \in \overline{1,\mu}$, вектор алгебраических дополнений (17) нулевой: $M(p_i, e^{-p_i h}) = 0$, то

$$\operatorname{rank}[p_i E - A(p_i, e^{-p_i h}), \tilde{b}(p, e^{-p_i h})] < n.$$

Разлагая определитель характеристической матрицы (15) по последней строке, образованной целыми функциями, получаем, что $|\tilde{W}(p_i, e^{-p_i h})| = 0$, т.е. значение p_i остается в спектре замкнутой системы при любом выборе регулятора с дифференциально-разностными и интегральными членами. Если $\operatorname{Re} p_i \geqslant 0$, то система не может быть стабилизирована. Если $\operatorname{Re} p_i < 0$, то это значение не препятствует экспоненциальной стабилизации системы (1).

Из анализа пп. 1)–3) следует, что для экспоненциальной стабилизации системы (1) через спектральное приведение необходимо, чтобы

$$\operatorname{rank}\left[pE - A_0 - \sum_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)e^{-pjh}, \tilde{b}(p, e^{-ph})\right] = n, \tag{49}$$

где $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon < 0$ — некоторое число.

Легко видеть, что наличие у системы полиномов $M(p,\lambda)$ и, соответственно, у элементов базиса Грёбнера общего множителя вида $\theta(p,\lambda)$ алгоритм спектрального приведения, изложенный в пп. 3–5 (в п. 3 $\theta(p,\lambda) = 1$ ввиду условия (16)), существенно не меняет. Его применение раскрывает возможности изменения спектра замкнутой системы и, в частности, — экспоненциальной стабилизации системы.

Таким образом, алгоритм спектрального приведения в общем случае следующий.

1. Вычисляем редуцированный базис Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ и получаем полином $\hat{d}_0(p,\lambda)$ вида (48).

2. Если возможно и необходимо, то выполняем редактирование полинома $\hat{d}_0(p,\lambda)$, а именно, заменяем корни $p_i \in P_0$ полинома $d_0(p)$ парными значениями $\lambda_{i,j}$: $(p_i, \lambda_{i,j}) \in \hat{P}_\lambda$, полученными из уравнения (38). Считаем этот этап выполненным и вместо полинома $\hat{d}_0(p,\lambda)$, согласно (41), будем иметь $\hat{d}_1(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p)$, где полином $\theta(p,\lambda)$ описан в (48).

3. Методом неопределённых коэффициентов находим векторный полином $\Phi(p,\lambda)$ вида (23) такой, что

$$\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = \hat{d}_1(p,\lambda). \tag{50}$$

4. Полином $\breve{d}_0(p)$ представим в виде

$$\breve{d}_0(p) = \tilde{d}_0(p)\tilde{d}_1(p) \tag{51}$$

согласно следующему условию. Для корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ (множество его различных корней обозначим $\tilde{P}_0 = \{p_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,\tilde{\mu}} : \tilde{d}_0(p_k) = 0\}$) выполняются неравенства

$$M(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0, \quad p_k \in \tilde{P}_0, \tag{52}$$

и его корни исключаем из спектра замкнутой системы (15). Корни квазиполинома

$$d_1(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\tilde{d}_1(p), \quad \lambda = e^{-ph}, \tag{53}$$

или полинома $(d_1(p,\lambda) = \tilde{d}_1(p))$, если $\theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda) = \mathrm{const}$, оставляем в спектре замкнутой системы.

5. Пусть $\breve{d}(p, e^{-ph})$ — квазиполином или полином $(\breve{d}(p,\lambda) = \breve{d}(p))$, корни которого добавляем в спектр замкнутой системы. Это может понадобиться, чтобы степень характеристического полинома $d(p,\lambda)$ замкнутой системы относительно p была равна $n{+}1$. Согласно замечанию 7 это можно сделать за счёт выбора полинома $\breve{d}_0(p)$ на этапе редактирования конечной части спектра (см. п. 4), за счёт выбора полинома $\tilde{d}_0(p)$ и степени полинома $\breve{d}(p,\lambda)$. В частности, $\breve{d}(p,\lambda) \equiv 1$, если степень полинома $d_1(p,\lambda)$ относительно p равна $n+1$.

Сконструируем последнюю строку матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ такой, чтобы характеристический полином замкнутой системы (15) имел вид

$$d(p,\lambda) = d_1(p,\lambda)\breve{d}(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\tilde{d}_1(p)\breve{d}(p,\lambda). \tag{54}$$

5.1. Для построения регулятора, требуемого полиномом (54), функцию $K(p,\lambda)$ возьмём в виде

$$K(p,\lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + \breve{d}(p,\lambda)), \tag{55}$$

где, как и в п. 3, $\Delta(p,\lambda) = \Psi M(p,\lambda)$, Ψ — $(n+1)$-вектор. Числовой вектор $\Psi = (\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})$ или векторный полином $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda),\ldots,\psi_{n+1}(p,\lambda))$ (см. лемму 2) подбираем таким, чтобы полином $\Delta(p,\lambda)$ удовлетворял неравенствам (26) с заменой множества P_0 на $\tilde{P}_0$:

$$\Delta(p_k, e^{-p_kh}) = \Psi(p_k, e^{-p_kh})M(p_k, e^{-p_kh}) \neq 0, \quad p_k \in \tilde{P}_0. \tag{56}$$

Это возможно ввиду (52).

5.2. Интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра $q(\lambda)$ строим таким, чтобы функция

$$f(p,\lambda) = K(p,\lambda)/\tilde{d}_0(p), \quad \lambda = e^{-ph},$$

была целой $(p \in \mathbb{C})$. Интерполяционные значения для построения полинома $q(\lambda)$ находим из уравнения (30), где вместо $d(p,\lambda)$ берём полином $\breve{d}(p,\lambda)$ и вместо P_0 берём $\tilde{P}_0 = \{p_k \in \mathbb{C},\ k=\overline{1,\tilde{\mu}} : \tilde{d}_0(p_k) = 0\}$ — множество различных корней полинома $\tilde{d}_0(p)$, $\hat{l}_k$ — их алгебраические кратности. На корнях полинома $\tilde{d}_0(p)$ согласно (56) $\Delta(p_k, e^{-p_kh}) \neq 0$, поэтому уравнение (30), где $p_k \in \tilde{P}_0$, относительно $q^{(i)}(\lambda_k)$, $\lambda_k = e^{-p_kh}$ при всех $i = \overline{0, \hat{l}_k - 1}$, $k = \overline{1,\tilde{\mu}}$ имеет единственное решение. Интерполирование полинома $q(\lambda)$ возможно ввиду замечания 4.

5.3. В матрице (15) последнюю строку возьмём в виде

$$(g_1(p,\lambda),\ldots,g_{n+1}(p,\lambda)) = -f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda) - q(\lambda)d_1(p,\lambda)\Psi(p,\lambda). \tag{57}$$

Доказательство равенства $|\tilde{W}(p,\lambda)| = d(p,\lambda)$, как и в теореме 1, проводится через разложение характеристического определителя $|\tilde{W}(p,\lambda)|$ замкнутой системы (15), (57) по последней строке.

Изложенный алгоритм спектрального приведения системы (1) резюмируем в виде теоремы.

Предположим, что через вычисление базиса Грёбнера системы полиномов $M(p,\lambda)$ (см. (17)) найдены полином $\hat{d}_1(p,\lambda)$ и векторный полином $\Phi(p,\lambda)$, связанные равенством (50). Пусть $\tilde{d}_0(p)$ — полином (см. (51)), корни которого $p_k \in \tilde{P}_0$ удаляются из спектра замкнутой системы введением интегральных слагаемых; $d_1(p, e^{-ph})$ — квазиполином или полином $(d_1(p,\lambda) = \tilde{d}_1(p))$ (см. (53), (54)), корни которого остаются в спектре замкнутой системы; $\breve{d}(p, e^{-ph})$ — квазиполином или полином $(\breve{d}(p,\lambda) = \breve{d}(p))$ (см. (54)), корни которого добавляются в спектр замкнутой системы. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (52). Для того чтобы замкнутая система (15), (57) порядка $n+1$ имела характеристический полином $d(p,\lambda)$ вида (54), достаточно:*

1) через вычисление базиса Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ системы полиномов $M(p,\lambda)$ найти полином $\hat{d}_1(p,\lambda)$ и векторный полином $\Phi(p,\lambda)$ согласно равенству (50);

2) взять полиномы $\tilde{d}_0(p)$, $d_1(p,\lambda)$ из равенств (51), (53) такими, чтобы степень полинома $d(p,\lambda)$ относительно p равнялась $n+1$;

3) найти полином $\Delta(p,\lambda)$ и $(n+1)$-векторный полином $\Psi(p,\lambda)$ из условия (56);

4) полином $q(\lambda)$ получить как решение интерполяционной задачи (30) с заменой $d(p,e^{-ph})$ на $\breve{d}(p,e^{-ph})$ и множества P_0 на $\tilde{P}_0$;

5) в матрице (15) последнюю строку положить равной (57).

Последнюю строку матрицы (15), (57) преобразуем согласно п. 5 к виду, указанному в замечании 5. Свободный член старшего коэффициента $\theta_0(\lambda)$ характеристического полинома $\tilde{w}(p,\lambda)$ преобразованной системы должен равняться $\theta_0(0)=1$. Это легко обеспечить, домножив последнюю строку матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ на подходящий числовой множитель.

Как видно из содержания теоремы 2, алгоритм спектрального приведения — это, по сути, алгоритм управления спектром системы нейтрального типа (1).

Следствие 2. *Для экспоненциальной стабилизации системы (1) через спектральное приведение необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (47), (49).*

Доказательство. Необходимость этих условий обоснована выше. Достаточность вытекает из теоремы 2, позволяющей при выполнении этих условий назначить замкнутой системе (15), (57) экспоненциально устойчивый характеристический квазиполином (см. (54))

$$d(p,e^{-ph})=\theta(p,e^{-ph})\breve{\theta}(e^{-ph})\tilde{d}_1(p)\breve{d}(p,e^{-ph}). \tag{58}$$

Действительно, согласно условию (49) решения системы

$$M_i(p,e^{-ph})=0,\quad i=\overline{1,n+1}, \tag{59}$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}p<\varepsilon,\quad \varepsilon<0 \text{ — некоторое число.} \tag{60}$$

Поскольку полином $\theta(p,\lambda)$ — общий множитель системы полиномов $M(p,\lambda)$, то корни квазиполинома $\theta(p,e^{-ph})$ также удовлетворяют неравенству (60).

Если корень $p_i\in P_0$ полинома $d_0(p)$ удовлетворяет системе (59), то он останется в спектре замкнутой системы (см. п. 3)). Поскольку для него выполнено неравенство (60), то он не препятствует экспоненциальной стабилизации системы (1). Если корень $p_i\in P_0$ не удовлетворяет системе (59), то его можно исключить из спектра замкнутой системы либо на этапе редактирования конечной части спектра, либо введением интегральных слагаемых. Поэтому квазиполином $\breve{\theta}(e^{-ph})$ и полином $\tilde{d}_1(p)$ в выражении (58), согласно алгоритму спектрального приведения, изложенному перед теоремой 2, могут быть выбраны удовлетворяющими неравенству (60). Таким же может быть выбран квазиполином $\breve{d}(p,e^{-ph})$, корни которого добавляются в спектр замкнутой системы. Таким образом, все корни характеристического квазиполинома $d(p,e^{-ph})$ вида (58) удовлетворяют критерию экспоненциальной устойчивости (10).

Определитель $d(p,\lambda)=|\tilde{W}(p,\lambda)|$ матрицы (15), (57) в процессе преобразований, указанных в замечании 5, может приобрести некоторый множитель $\tilde{l}_0(\lambda)$, составленный из делителей полинома $l_0(\lambda)$. Корни квазиполинома $\tilde{l}_0(e^{-ph})$, согласно п. 5, являются корнями квазиполинома $l_0(e^{-ph})$ и ввиду условия (47) также удовлетворяют неравенству (60). Таким образом, при выполнении условий (47), (49) алгоритм спектрального приведения позволяет построить экспоненциально устойчивую замкнутую систему с характеристическим полиномом вида $\hat{w}(p,\lambda)=\tilde{l}_0(\lambda)d(p,\lambda)$. Следствие доказано.

Проверка условий (47), (49) выполняется в ходе реализации алгоритма спектрального приведения через вычисление редуцированного базиса Грёбнера для систем алгебраических дополнений $(M_1(p,\lambda),...,M_{n+1}(p,\lambda))$ и $(l_1(\lambda),...,l_{n+1}(\lambda))$ к элементам последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ и матрицы $F(\lambda)$ соответственно.

Пример 4. Рассмотрим замкнутую систему с характеристической матрицей

$$\tilde{W}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} p+2p\lambda & 1-p\lambda/2 & -\lambda \\ 2p\lambda & p+2 & 2 \\ g_1(p,\lambda) & g_2(p,\lambda) & g_3(p,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Здесь $b(\lambda)=(\lambda,-2)'$ и выбран регулятор (4), (6). Находим систему полиномов (17):

$$M(p,\lambda)=(M_1(p,\lambda),M_2(p,\lambda),M_3(p,\lambda))'=\big(2(\lambda+1),-2p(\lambda+1)^2,p(\lambda+1)(2+p+p\lambda)\big)'.$$

Базис Грёбнера этой системы полиномов в словарном порядке $\lambda > p$ состоит из одного элемента $G_p(p,\lambda) = \{\lambda+1\}$, соответственно, $\hat{d}_0(p,\lambda) = \theta(p,\lambda) = \lambda+1$. Характеристический полином системы, замкнутой любым дифференциально-интегроразностным регулятором вида (4), (6), будет иметь делителем полином $\lambda+1$. При переходе к регулятору (5), (6) по-прежнему $\theta(p,\lambda) = \lambda+1$. Система не может быть стабилизирована ввиду наличия у системы полиномов $M(p,\lambda)$ множителя $\lambda+1$, так как на корнях уравнения $e^{-ph}+1=0$ нарушается условие (49). Заметим, что в обоих случаях полином $l_0(\lambda) = (\lambda+1)^2$, что также делает невозможной экспоненциальную стабилизацию данной системы согласно лемме 3.

Следствие 3. *Для экспоненциальной стабилизации системы (1) посредством дифференциально-разностного регулятора (в уравнении (6) все полиномы $\hat{v}_{ki}(\lambda)$, $\hat{q}_{ki}(\lambda)$ равны нулю) достаточно, чтобы наряду с условиями (47), (49) имело место следующее условие:*

$$\textit{если } \{M(p,\lambda) = 0 : d_0(p) = 0,\ \operatorname{Re} p \geqslant 0\},\ \textit{то } |\lambda| > 1. \tag{61}$$

При выполнении условия (61) спектральные значения, порождающие неустойчивые моды, могут быть удалены процедурой редактирования конечной части спектра (см. п. 4).

Экспоненциально устойчивая система с характеристическим полиномом вида (8), замкнутая дифференциально-разностным регулятором, очевидно, будет устойчива независимо от запаздываний (см. (11)).

Пример 5. Пусть характеристическая матрица системы с одномерным входом $(b(\lambda) = (0, (\lambda-2)\lambda)')$, замкнутой регулятором (4), (6), имеет вид

$$\tilde{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p + p\lambda/2 & 3-\lambda & 0 \\ 1/3 & p + 5/12\lambda & (2-\lambda)\lambda \\ g_1(p,\lambda) & g_2(p,\lambda) & g_3(p,\lambda) \end{bmatrix}, \quad h = \ln 2. \tag{62}$$

Исходная система второго порядка имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$ имеет вид $w(p,\lambda) = p^2(\lambda+2)/2 + 5/24 p\lambda(\lambda+2) + \lambda/3 - 1$. Легко видеть, что квазиполином $w(p, e^{-ph})$ имеет положительный корень, поскольку $w(0,1) = -2/3 < 0$; $\lim_{p\to+\infty} w(p, e^{-ph}) = +\infty$. Таким образом, невозмущённая система не является экспоненциально устойчивой.

Исследуем возможность стабилизации системы (62) через спектральное приведение.

Запишем систему $l(\lambda)$ алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1(\lambda) & k_2(\lambda) & k_3(\lambda) \end{bmatrix}$$

в виде $l(\lambda) = (0, 0, 1+\lambda/2)$.

Очевидно, что наибольший общий делитель $l_0(\lambda) = \mathrm{GCD}(l(\lambda)) = 1+\lambda/2$, т.е. старший коэффициент $\theta_0(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$ характеристического полинома замкнутой системы делится на $1+\lambda/2 = (\lambda+2)/2$. Корень $\lambda = -2$ полинома $l_0(\lambda)$ удовлетворяет неравенству $|\lambda| > 1$, значит, условие (47) экспоненциальной стабилизации выполнено.

Поскольку для регулятора (5), (6) $\hat{b}(\lambda) = (0, (\lambda-2)\lambda(p+\alpha))'$ по-прежнему $l_0(\lambda) = 1+\lambda/2$, то рассмотрим регулятор (4), (6). Так как $l_0(\lambda) \not\equiv 1$, то ввиду леммы 1 характеристический квазиполином замкнутой системы заведомо будет иметь нейтральный тип.

Запишем систему (17) алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda) = \left((\lambda^2 - 5\lambda + 6)\lambda, \frac{p(\lambda^2-4)\lambda}{2}, \frac{p^2(\lambda+2)}{2} + \frac{5p\lambda(\lambda+2)}{24} + \frac{\lambda}{3} - 1\right)'.$$

Находим базис Грёбнера этой системы полиномов в порядке $\lambda > p$:

$$G_p(p,\lambda) =$$
$$= \left((p-1)p(p+1)(6p-1), -(p+1)\left(18p^2-33p-5\lambda+15\right), -18p^3+3p^2+18p+\lambda^2-2\lambda-3\right).$$

Он содержит инвариантный полином $d_0(p) = (p-1)p(p+1)(6p-1)$, $\theta(p,\lambda) = 1$. Значит, множество $P_0 = \{0; \pm 1; 1/6\}$.

На множестве $\{0; 1; 1/6\}$ выполняются неравенства (52):

$$M(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in \{0; 1; 1/6\},$$

поэтому данные значения можно исключить из спектра, введя интегральные слагаемые. Одновременно эти неравенства означают выполнение условия (49). Таким образом, для системы (62) справедливо следствие 2. Значит, система (62) экспоненциально стабилизируема.

При $p = -1$ $M(p, e^{-ph})\big|_{p=-1} = 0$, т.е. это значение нельзя исключить из спектра замкнутой системы, но оно не препятствует экспоненциальной стабилизации.

Обратимся к множеству

$$P_\lambda = \{(-1,0), (-1,2), (0,3), (1/6,2), (1,0)\}.$$

Если $p = 0$, то $\lambda = 3 > 1$, если $p = 1/6$, то $\lambda = 2 > 1$, т.е. эти значения можно исключить из набора P_0, применив процедуру редактирования. Значение $p = 1$, которому соответствует $\lambda = 0$ (см. P_λ), уберём из спектра, введя интегральные слагаемые. К оставшемуся в характеристическом квазиполиноме множителю $\tilde{d}_1(p) = p+1$ добавим, например, $(p+2)(p+3)$.

Итак, замкнутой системе можно назначить следующий характеристический полином:

$$\tilde{w}(p,\lambda) = \theta_0(\lambda)(p+1)(p+2)(p+3),$$

где $\theta_0(\lambda)$ будет иметь делители: $\lambda+2$ за счёт $l_0(\lambda) = (\lambda+2)/2$ (см. лемму 1) и $(\lambda-2)(\lambda-3)$ ввиду исключения из состава полинома $d_0(p)$ множителя $p(6p-1)$.

Следуя п. 4, возьмем $\breve{d}_0(p) = (p-1)p^0(p+1)(6p-1)^0 = (p-1)(p+1)$. Вычислив базис Грёбнера $\breve{G}_\lambda(p,\lambda)$ для системы полиномов

$$\Big(d_0(p), -\breve{d}_0(p)(p+1)(18p^2-33p-5\lambda+15), \breve{d}_0(p)(-18p^3+3p^2+18p+\lambda^2-2\lambda-3)\Big)$$

в порядке $p > \lambda$, получим новый полином $\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p) = (p-1)(p+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Значение $p = 1$ исключаем из спектра посредством интегральных слагаемых. Согласно алгоритму спектрального приведения имеем полином $\tilde{d}_0(p) = p-1$ и множество $\tilde{P}_0 = \{1\}$.

Из уравнения (50), где $(\varphi_1(p,\lambda), \varphi_2(p,\lambda), \varphi_3(p,\lambda))$ — полиномы с неопределёнными коэффициентами, $\hat{d}_1(p,\lambda) = (p^2-1)(\lambda-3)(\lambda-2)/6$, заключаем, что

$$\Phi(p,\lambda) = \left(\frac{p^2\lambda}{24}, \frac{5}{24} + \frac{5p}{12} - \frac{p\lambda}{12}, 1 - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Полином $\Delta(p,\lambda)$ находим из условия (56), где $\tilde{P}_0 = \{1\}$. Так как $\lambda = e^{-h} = 1/2$, то данному условию удовлетворяет полином $M_1(p,\lambda) = (\lambda^2-5\lambda+6)\lambda$, поэтому возьмем $\Delta(p,\lambda) = M_1(p,\lambda)$ и, соответственно, $\Psi(\lambda) = (1,0,0)$.

Записываем (см. (55), где $\breve{d}(p,\lambda) = (p+2)(p+3)$) функцию

$$K(p,\lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + (p+2)(p+3)).$$

Интерполяционное значение $q(1/2) = -32/5$ для полинома $q(\lambda)$ получаем из уравнения (30), где $p_k \in \tilde{P}_0 = \{1\}$:

$$\left(q(e^{-ph})e^{-ph}(e^{-ph}-2)(e^{-ph}-3) + (p+2)(p+3)\right)\Big|_{p=1} = 0.$$

Следовательно, $q(\lambda) = -32/5$. Таким образом, последняя строка характеристической матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ замкнутой системы (62) имеет вид

$$(g_1(p,\lambda), g_2(p,\lambda), g_3(p,\lambda)) = -(K(p,\lambda)/(p-1))\Phi(p,\lambda) - q(\lambda)\Psi(\lambda)(p+1)(\lambda-2)(\lambda-3)/6. \quad (63)$$

Заменяя полиномы $K(p,\lambda)$, $\Phi(p,\lambda)$, $q(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ соответствующими выражениями, получаем векторный полином $(g_1(p,\lambda), g_2(p,\lambda), g_3(p,\lambda))$, который содержит слагаемые с третьими и вторыми степенями переменной p. Чтобы их исключить, можно применить методику п. 5 или домножить последнюю строку на $(2+\lambda)/2$ и прибавить к ней первую и вторую строки с подходящими коэффициентами. Вычислив характеристический определитель замкнутой системы, убеждаемся, что он равен

$$\tilde{w}(p,\lambda) = (p+1)(p+2)(p+3)(1-\lambda/3)(1-\lambda/2)(1+\lambda/2).$$

Поскольку из развитой выше теории нам известна структура характеристического квазиполинома замкнутой системы и вид искомого регулятора, то его можно найти методом неопределённых коэффициентов из характеристического уравнения

$$|\tilde{W}(p,\lambda)| = \theta_0(\lambda)(p+1)(p+2)(p+3),$$

$\theta_0(\lambda)$ — полином с неопределёнными коэффициентами со свободным членом, равным единице.

Общий вид последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ берем из (63):

$$g_i(p,\lambda) = \alpha_{i1}(\lambda) + p\lambda\alpha_{i2}(\lambda) + \alpha_{i3}(\lambda)\frac{1-2\lambda}{p-1}, \quad i = 1,2;$$
$$g_3(p,\lambda) = p + \alpha_{31}(\lambda) + p\lambda\alpha_{32}(\lambda) + \alpha_{33}(\lambda)\frac{1-2\lambda}{p-1},$$

$\alpha_{ij}(\lambda)$, $i,j = \overline{1,3}$, — полиномы, степени которых можно оценить, используя уравнения для нахождения полиномов $K(p,\lambda)$, $\Phi(p,\lambda)$, $q(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$, или подобрать опытным путем, взяв их для начала достаточно высокими. В результате получим полиномиальное уравнение

$$\begin{vmatrix} p + p\lambda/2 & 3-\lambda & 0 \\ 1/3 & p + 5/12\lambda & (2-\lambda)\lambda \\ (p-1)g_1(p,\lambda) & (p-1)g_2(p,\lambda) & (p-1)g_3(p,\lambda) \end{vmatrix} = \theta_0(\lambda)(p-1)(p+1)(p+2)(p+3).$$

Коэффициенты полиномов $\alpha_{ij}(\lambda)$, $i,j = \overline{1,3}$, $\theta_0(\lambda)$ находим, сравнивая коэффициенты полиномов относительно p, λ в левой и правой частях последнего уравнения. В результате получим

$$(g_1(p,\lambda), g_2(p,\lambda), g_3(p,\lambda)) = \left(\frac{5p\lambda}{72} - \frac{1-2\lambda}{p-1} + 223/72 + 2\lambda, -\frac{5p\lambda}{72} + \frac{9(1-2\lambda)}{2(p-1)} - \frac{25}{3} - \frac{185\lambda}{288},\right.$$
$$\left. p - \frac{5p\lambda}{6} + \frac{p\lambda^2}{6} + 6\frac{(1-2\lambda)(2-\lambda)}{p-1} + 6 - \frac{65\lambda}{12} + \frac{29\lambda^2}{24}\right), \quad (64)$$
$$\theta_0(\lambda) = (1-\lambda/3)(1-\lambda/2)(1+\lambda/2).$$

Запишем регулятор (64) в явном виде. Напомним, что λ — оператор сдвига, p — оператор дифференцирования: $p^i\lambda^j\varphi(t) = \varphi^{(i)}(t-jh)$ (φ — функция, $i,j=0,1,\ldots$). Дробно-рациональные функции заменяем [23] интегралами согласно (7). На основании (64) получаем

$$u(t) = x_3(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = -5/72\dot{x}_1(t-h) + \int\limits_0^h e^s x_1(t-s)ds - 223/72x_1(t) - 2x_1(t-h) + 5/72\dot{x}_2(t-h) -$$

$$-\,9/2\int\limits_0^h e^s x_2(t-s)ds + 25/3x_2(t) + 185/288x_2(t-h) + 5/6\dot{x}_3(t-h) - 1/6\dot{x}_3(t-2h) -$$

$$-\,6\int\limits_0^h e^s(2x_3(t-s) - x_3(t-h-s))ds - 6x_3(t) + 65/12x_3(t-h) - 29/24x_3(t-2h).$$

Можно в первых двух позициях строки (64) убрать все члены, содержащие $p\lambda$, т.е. получить регулятор запаздывающего типа. Для этого нужно строку (64) домножить на $1+\lambda/2$ и прибавить к ней первую строку, домноженную на $-5\lambda/72$, затем прибавить вторую строку, домноженную на $5\lambda(2+\lambda)/144$. Характеристический определитель замкнутой системы примет вид $\tilde{w}(p,\lambda) = (p+1)(p+2)(p+3)(1-\lambda/3)(1-\lambda/2)(1+\lambda/2)^2$. Все корни полученного полинома $\tilde{w}(p,\lambda)$ удовлетворяют неравенствам $p<0$ и $|\lambda|>1$, поэтому замкнутая система экспоненциально устойчива согласно критерию (11).

Заключение. В данной работе обоснован алгоритм модальной управляемости линейной автономной системы нейтрального типа. Этот алгоритм затем адаптирован для экспоненциальной стабилизации названной системы. Обе задачи известны как задачи управления спектром дифференциальной системы.

Регулятор вида (6) выбран из условия, чтобы обеспечить модальную управляемость и экспоненциальную стабилизацию для достаточно широкого класса систем вида (1). Наличие слагаемых нейтрального типа, содержащих производные фазовых переменных с запаздывающим аргументом, позволяет в отдельных случаях (следствие 3) решить задачу стабилизации без использования интегральных слагаемых (см. пример 2). Посредством интегральных слагаемых из спектра замкнутой системы можно исключить (см. примеры 1, 5) нежелательные значения, неустранимые дифференциально-разностным регулятором (теорема 2).

Свойство модальной управляемости позволяет назначить замкнутой системе заданный квазиполином (см. пример 1), в частности, экспоненциально устойчивый, но оно накладывает на коэффициенты системы жёсткие ограничения в виде двух ранговых условий (теорема 1). Если эти условия не выполняются, тогда возможности управления спектром замкнутой системы можно исследовать (см. примеры 2–5) через алгоритм спектрального приведения, представленный в п. 6. Названный алгоритм базируется на анализе корней полиномов. Для управления спектром системы общего вида предложены процедуры редактирования конечной части спектра (см. п. 4) и исключения нежелательных значений введением в регулятор интегральных членов (см. пп. 3, 6). Выделен случай спектрально приводимой системы (см. определение 1), когда замкнутая система имеет, возможно, бесконечный, но более удобный для анализа, спектр.

Экспоненциальная стабилизируемость заданной системы устанавливается применением алгоритма спектрального приведения, не связанного с построением функционалов Ляпунова–Красовского, решением матричных неравенств и другими традиционными методами. Для построения нужного регулятора не требуется априорная информация о расположении корней характеристического квазиполинома исходной системы.

Метод спектрального приведения, развитый в данной работе для решения задач стабилизации, является по своей сути алгебраическим и сводится к стандартным операциям над полиномами и полиномиальными матрицами, реализованным в пакетах компьютерной алгебры. Более того, излагаемый подход позволяет находить коэффициенты регулятора методом неопределённых коэффициентов. Здесь исследована система нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями. Без принципиальных осложнений [26] можно добавить интегральные члены с квазиполиномиальным ядром.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа не финансировалась за счёт средств бюджета какого-либо института (учреждения, организации). Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движения управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
2. *Шиманов С.Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 102–116.
3. *Manitius A., Triggiani R.* Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions // SIAM J. Control Optimization. 1978. V. 16. № 4. P. 599–645.
4. *Bhat K.P., Koivo H.N.* Modal characterization of controllability and observability of time-delay systems // IEEE Transactions on Autom. Control. 1976. AC-21. № 2. P. 292–293.
5. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Autom. Control. 1979. AC-24. № 4. P. 541–553.
6. *Watanabe K., Ito M., Kaneko M.* Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in state variables // Int. J. Contr. 1983. V. 38. № 5. P. 913–926.
7. *Метельский А.В.* Алгебраический подход к стабилизации дифференциальной системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1119–1131.
8. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. V. 20. № 2. P. 191–204.
9. *Hale J.K., Verduyn Lunel S.M.* Strong stabilization of neutral functional differential equations // IMA J. Math. Control Inf. 2002. V. 19. № 1–2. P. 5–23.
10. *Chen J.D., Lien C.H., Fan K.K., Chou J.H.* Criteria for asymptotic stability of a class of neutral systems via a LMI approach // IEE Proceedings — Control Theory and Applications. 2001. V. 148. № 6. P. 442–447.
11. *Rabah R., Sklyar G.M., Barkhayev P.Y.* Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems // ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations. 2012. V. 18. № 3. P. 656–692.
12. *Park J.H., Won S.* Asymptotic stability of neutral systems with multiple delays // J. of Optimization Theory and Applications. 1999. V. 103. № 1. P. 183–200.
13. *Hu G.-D.* An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems // Siberian Math. J. 2022. V. 63. № 4. P. 789–800.
14. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.
15. *Метельский А.В., Карпук В.В.* О свойствах точечно вырожденных линейных автономных систем управления. I // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 22–34.
16. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521.
17. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
18. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285.
19. *Метельский А.В., Карпук В.В.* Финитная стабилизация дифференциальных систем с несоизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 105–119.

20. *Метельский А.В.* Стабилизация дифференциально-разностной системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 4. С. 531–553.
21. *Метельский А.В., Минюк С.А.* Критерии конструктивной идентифицируемости и полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С. 15–23.
22. *Хартовский В.Е., Павловская А.Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–79.
23. *Метельский А.В.* Задача назначения конечного спектра для дифференциальной системы нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 70–83.
24. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
25. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
26. *Метельский А.В.* Задача назначения конечного спектра для системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 5. С. 692–701.

г. Минск

Поступила в редакцию 28.08.2023 г.
После доработки 06.11.2023 г.
Принята к публикации 13.11.2023 г.