

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ И ИХ ПЕРВЫХ И ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРЫ НА ПОЛУОСИ

© 2024 г. С. Искандаров, А. Т. Халилов

*Памяти нашего дорогого учителя
профессора Николая Викторовича Азбелева
(15.04.1922–03.11.2006)*

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений и их первых двух производных линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерры. Для этого рассматриваемое уравнение с помощью метода, предложенного первым автором в 2006 году, сначала сводится к эквивалентной системе, состоящей из одного дифференциального уравнения первого порядка и одного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Затем для этой системы предлагается новый обобщённый функционал Ляпунова, доказывается его неотрицательность на её решениях и приводится оценка сверху производной этого функционала через исходный функционал. Найденная оценка представляет собой интегро-дифференциальное неравенство, решение которого даёт оценку функционала.

Ключевые слова: уравнение Вольтерры, функционал Ляпунова, ограниченность решения.

DOI: 10.31857/S0374064124010087, EDN: RPRSTF

1. Введение. Постановка задачи. Все рассматриваемые в настоящей работе функции являются непрерывными и приводимые соотношения имеют место при $t \geq t_0$ (для функций одной переменной) и при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$ (для функций двух переменных).

Требуется установить достаточные условия ограниченности на полуоси $I \equiv [t_0, \infty)$ всех решений и их первых двух производных линейного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) третьего порядка типа Вольтерры вида

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t [Q_0(t, \tau)x(\tau) + Q_1(t, \tau)x'(\tau) + Q_2(t, \tau)x''(\tau)] d\tau = f(t), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

в случае, когда коэффициенты, ядра и свободный член этого ИДУ могут быть не дифференцируемыми в некоторых точках полуоси I .

Насколько нам известно, такая задача ранее никем не изучалась.

Для исследования вопросов устойчивости решений ИДУ типа Вольтерры или ограниченности решений вместе с несколькими первыми производными разработан ряд качественных методов, в том числе метод функционалов Ляпунова. Для различных классов (линейных или нелинейных, скалярных или векторных) ИДУ метод функционалов Ляпунова развит в работах многих авторов (см., например, монографии [1–3] и обзорную статью [4]). Анализ этих работ показал, что построенный нами для решения поставленной выше задачи функционал Ляпунова является новым.

В статье решение сформулированной задачи состоит в следующем: сначала уравнение (1) методом, предложенным в работе [5], сводится к системе двух уравнений, затем к исследова-

нию полученной системы применяется метод функционалов Ляпунова, при этом предлагается новая конструкция функционала Ляпунова с использованием идей работ [1; 6–9; 10, с. 73–80].

2. Основные результаты. В ИДУ (1) сделаем нестандартную замену переменной [5]:

$$x'(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \quad (2)$$

где λ — некоторый вспомогательный вещественный параметр, $W(t)$ — некоторая положительная весовая функция и $y(t)$ — новая неизвестная функция. Тогда, объединив замену (2) и получающееся для функции $y(t)$ ИДУ второго порядка, придём к следующей эквивалентной ИДУ (1) системе:

$$\begin{aligned} x'(t) + \lambda^2 x(t) &= W(t)y(t), \\ y''(t) + b_2(t)y'(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \\ &+ \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)y(\tau) + K(t, \tau)y'(\tau)] d\tau = F(t), \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где, как несложно убедиться,

$$\begin{aligned} b_0(t) &\equiv (W(t))^{-1} [a_0(t) - \lambda^2 a_1(t) + \lambda^4 a_2(t) - \lambda^6], \\ b_1(t) &\equiv a_1(t) - \lambda^2 a_2(t) + \lambda^4 + a_2(t)W'(t)(W(t))^{-1} + [W'(t) - \lambda^2 W(t)]'(W(t))^{-1}, \\ b_2(t) &\equiv a_2(t) - \lambda^2 + 2W'(t)(W(t))^{-1}, \\ P_0(t, \tau) &\equiv (W(t))^{-1} [Q_0(t, \tau) - \lambda^2 Q_1(t, \tau) + \lambda^4 Q_2(t, \tau)], \\ P_1(t, \tau) &\equiv (W(t))^{-1} [Q_1(t, \tau)W(\tau) + Q_2(t, \tau)(W'(\tau) - \lambda^2 W(\tau))], \\ K(t, \tau) &\equiv (W(t))^{-1} Q_2(t, \tau)W(\tau), \quad F(t) \equiv (W(t))^{-1} f(t). \end{aligned}$$

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Будем называть непрерывную функцию $\psi(t)$, $t \geq t_0$, *срезающей* для непрерывной функции $K(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq t_0$ (для непрерывной функции $F(t)$, $t \geq t_0$), если функция $K(t, \tau)(\psi(t)\psi(\tau))^{-1}$ (функция $F(t)(\psi(t))^{-1}$) имеет непрерывные частные производные первого порядка (является дифференцируемой) в каждой точке области определения.

Определение 2. Назовём непрерывные функции $K(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq t_0$, и $F(t)$, $t \geq t_0$, *согласованно срезаемыми*, если для них срезающая их функция может быть выбрана одной и той же.

Далее через $\mathbb{R}_+$ обозначаем полуось $[0, +\infty)$.

Теорема. Пусть выполняются следующие предположения:

1) для функций $K(t, \tau)$ и $F(t)$ имеют место представления

$$K(t, \tau) = \sum_{i=0}^n K_i(t, \tau) + C(t, \tau), \quad (4)$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^n F_i(t), \quad (5)$$

где $K_0(t, \tau)$ и $F_0(t)$ — непрерывные функции, а функции $K_i(t, \tau)$ и $F_i(t)$ при каждом $i \in \{1, \dots, n\}$ являются согласованно срезаемыми со срезающей функцией $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, т.е. функции

$$R_i(t, \tau) \equiv K_i(t, \tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1} \quad \text{и} \quad E_i(t) \equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

дифференцируемы; пусть, кроме того, интеграл $\int_t^\infty |C(s, t)| ds$ определён для всех $t \in I$;

2) при каждом $i \in \{1, \dots, n\}$ функция $R_i(t, \tau)$ удовлетворяет условию $R'_{i\tau}(t, \tau) \geq 0$ и имеет вторую непрерывную смешанную производную, при этом существует функция $R_i^*(t) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ такая, что $R''_{it\tau}(t, \tau) \leq R_i^*(t)R'_{i\tau}(t, \tau)$, $i = \overline{1, n}$;

3) функция

$$D(t) \equiv 2b_2(t) - \int_{t_0}^t |C(t, \tau)| d\tau - \int_t^\infty |C(s, t)| ds$$

неотрицательна;

4) справедливо равенство

$$R_i(t, t_0) = A_i(t) + B_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где $A_i(t)$ и $B_i(t)$ — неотрицательная и положительная дифференцируемые функции, при этом $B'_i(t) < 0$ и существуют функция $A_i^*(t) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ и дифференцируемая функция $c_i(t)$ такие, что $A'_i(t) \leq A_i^*(t)A_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, и $(E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1$;

5) функция $b_1(t)$ отделена от нуля некоторой положительной постоянной b_{10} (т.е. $b_1(t) \geq b_{10} > 0$) и дифференцируема, при этом существует функция $b_1^*(t) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ такая, что $b'_1(t) \leq b_1^*(t)b_1(t)$;

6) верно включение

$$|b_0(t)| + |F_0(t)| + W(t) + \int_{t_0}^t (|P_0(t, \tau)| + |P_1(t, \tau)| + |K_0(t, \tau)|) d\tau \in L^1(I, \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}),$$

тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (3) справедливы соотношения

$$x(t) = O(1), \quad y^{(k)}(t) = O(1) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad k = 0, 1, \quad \text{и } x(t) \in L^2(I, \mathbb{R}), \quad (8)$$

$$A_i(t) \left(\int_{t_0}^t \psi_i(\eta) y'(\eta) d\eta \right)^2 = O(1) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{и } D(t)(y'(t))^2 \in L^1(I, \mathbb{R}_+); \quad (9)$$

7) если, кроме того, выполняется и условие $W^{(k)}(t) = O(1)$ при $t \rightarrow +\infty$, $k = 0, 1$, то $x^{(k)}(t) = O(1)$ при $t \rightarrow +\infty$, $k = 0, 1, 2$, для любого решения $x(t)$ ИДУ (1).

Доказательство. Пусть $(x(t), y(t))$ — произвольное решение системы (3). Построим следующий функционал Ляпунова:

$$\begin{aligned} V(t; x, y) = & (x(t))^2 + 2\lambda^2 \int_{t_0}^t (x(s))^2 ds + (y'(t))^2 + b_1(t)(y(t))^2 + \int_{t_0}^t D(s)(y'(s))^2 ds + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[R_i(t, t_0)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t, t_0) + c_i(t) + \int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau \right] + \\ & + \int_{t_0}^t \int_t^\infty |C(s, \tau)| ds (y'(\tau))^2 d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$Y_i(t, \tau) \equiv \int_\tau^t \psi_i(\eta) y'(\eta) d\eta \quad (i = \overline{1, n}). \quad (11)$$

В силу условий 1)–5) теоремы функция $V(t; x, y)$ является неотрицательно определённой, т.е. $V(t; x, y) \geq 0$ в области её определения. Действительно, так как $b_1(t) > 0$ и $D(t) \geq 0$ согласно условиям 5) и 3) соответственно, то слагаемые в первой строке в (10) неотрицательны. Последнее слагаемое, стоящее под знаком суммы в (10), неотрицательно, поскольку $R'_{i\tau}(t, \tau) \geq 0$ для всех $i = \overline{1, n}$ в силу условия 2). Неотрицательность последнего слагаемого в (10) очевидна. Таким образом, для доказательства неотрицательности функции $V(t; x, y)$ остаётся убедиться в неотрицательности первых трёх слагаемых, стоящих под знаком суммы в (10).

Посмотрим на выражение $R_i(t, t_0)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t, t_0) + c_i(t)$ как на квадратный относительно $Y_i(t, t_0)$ трёхчлен. Оценим его дискриминант $\mathcal{D}$, учитывая условие 4) и представление (7):

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &\equiv 4(E_i^2(t) - R_i(t, t_0)c_i(t)) \leq \\ &\leq 4(B_i(t)c_i(t) - R_i(t, t_0)c_i(t)) \stackrel{(7)}{=} 4(B_i(t)c_i(t) - (A_i(t) + B_i(t))c_i(t)) = -4c_i(t)A_i(t) \leq 0,\end{aligned}$$

поскольку $A_i(t) \geq 0$ и $c_i(t) \geq 0$ согласно условию 4). Так как дискриминант рассматриваемого квадратного трёхчлена неположителен, то сам он неотрицателен в силу того, что коэффициент $R_i(t, t_0)$ при его старшем члене положителен вследствие условия 7).

Возьмём производную от функционала $V(t; x, y)$ и заменим $x'(t)$, $y''(t)$ в силу уравнений системы (3). Тогда с учётом обозначения $D(t)$ и представлений (4), (5), (7) получим

$$\begin{aligned}\frac{dV(t; x, y)}{dt} &= 2x(t)[- \lambda^2 x(t) + W(t)y(t)] + 2\lambda^2(x(t))^2 + 2y'(t)\left\{-b_2(t)y'(t) - \right. \\ &\quad \left. - b_1(t)y(t) - b_0(t)x(t) - \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)y(\tau) + K(t, \tau)y'(\tau)]d\tau + F(t)\right\} + \\ &\quad + b'_1(t)(y(t))^2 + 2b_1(t)y(t)y'(t) + \left[2b_2(t) - \int_{t_0}^t |C(t, \tau)|d\tau - \int_t^\infty |C(s, t)|ds\right](y'(t))^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[R'_{it}(t, t_0)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E'_i(t)Y_i(t, t_0) + c'_i(t) + \right. \\ &\quad \left. + 2R_i(t, t_0)Y_i(t, t_0)\psi_i(t)y'(t) - 2E_i(t)\psi_i(t)y'(t) + \int_{t_0}^t R''_{i\tau t}(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau)Y_i(t, \tau)\psi_i(t)y'(t)d\tau \right] + \int_t^\infty |C(s, t)|ds(y'(t))^2 - \int_{t_0}^t |C(t, \tau)|(y'(\tau))^2 d\tau = \\ &\quad = 2W(t)x(t)y(t) - 2y'(t)\left\{b_0(t)x(t) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \left[P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)y(\tau) + \left(\sum_{i=0}^n K_i(t, \tau) + C(t, \tau) \right) y'(\tau) \right] d\tau - F(t) \right\} + \\ &\quad + b'_1(t)(y(t))^2 - \int_{t_0}^t |C(t, \tau)|d\tau(y'(t))^2 - \int_{t_0}^t |C(t, \tau)|(y'(\tau))^2 d\tau + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[A'_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 + B'_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E'_i(t)Y_i(t, t_0) + c'_i(t) + 2R_i(t, t_0)Y_i(t, t_0)\psi_i(t)y'(t) - \right. \\ &\quad \left. - 2E_i(t)\psi_i(t)y'(t) + 2 \int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau)Y_i(t, \tau)d\tau \psi_i(t)y'(t) + \int_{t_0}^t R''_{i\tau t}(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau \right], \quad (12)\end{aligned}$$

где $(x(t), y(t))$ — любое решение системы (3).

Чтобы продолжить дальнейшее преобразование производной и оценить суммы некоторых слагаемых в (12), установим аналогично [10, с. 75] следующие четыре утверждения.

а) Проинтегрировав по частям, с учётом определения (11) будем иметь

$$\int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau) Y_i(t, \tau) d\tau = -R_i(t, t_0) Y_i(t, t_0) + \int_{t_0}^t R_i(t, \tau) \psi_i(\tau) y'(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда, учитывая обозначение $R_i(t, \tau) \equiv K_i(t, \tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}$ ($i = \overline{1, n}$), найдём

$$2R_i(t, t_0) Y_i(t, t_0) \psi_i(t) y'(t) + 2\psi_i(t) y'(t) \int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau) Y_i(t, \tau) d\tau = 2y'(t) \int_{t_0}^t K_i(t, \tau) y'(\tau) d\tau$$

для любого $i = \overline{1, n}$. Следовательно, в силу этого представления получим

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \left(R_i(t, t_0) Y_i(t, t_0) \psi_i(t) y'(t) + \int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau) Y_i(t, \tau) d\tau \psi_i(t) y'(t) \right) - 2y'(t) \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n K_i(t, \tau) y'(\tau) d\tau = \\ = 2y'(t) \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n K_i(t, \tau) y'(\tau) d\tau - 2y'(t) \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n K_i(t, \tau) y'(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

б) Согласно условию 4) теоремы имеют место неравенства $B'_i(t) \leq 0$ и $(E'_i(t))^2 \leq B'_i(t) c'_i(t)$. Поэтому дискриминант квадратного относительно $Y_i(t, t_0)$ трёхчлена, составленного из второго, третьего и четвёртого слагаемых, стоящих под знаком суммы в (12), неположителен. Следовательно, этот трёхчлен удовлетворяет неравенству

$$B'_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E'_i(t)Y_i(t, t_0) + c'_i(t) \leq 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$

так как коэффициент $B'_i(t)$ при его старшем члене отрицателен ввиду условия 4). Поэтому

$$\sum_{i=1}^n [B'_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E'_i(t)Y_i(t, t_0) + c'_i(t)] \leq 0. \quad (14)$$

в) Применив неравенство $2\alpha_1\alpha_2 \leq \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, получим соотношение

$$-2y'(t) \int_{t_0}^t C(t, \tau) y'(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t |C(t, \tau)| d\tau (y'(t))^2 - \int_{t_0}^t |C(t, \tau)| (y'(\tau))^2 d\tau \leq 0. \quad (15)$$

г) Так как $E_i(t) = F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$ ($i = \overline{1, n}$) в силу второго равенства в (4), то

$$2y'(t) \sum_{i=1}^n F_i(t) - \sum_{i=1}^n 2E_i(t) \psi_i(t) y'(t) = 0. \quad (16)$$

Таким образом, из соотношений (12)–(16) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{dV(t; x, y)}{dt} \leq 2W(t)x(t)y(t) - 2y'(t) \left\{ b_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)y(\tau) + \right. \\ \left. + K_0(t, \tau)y'(\tau)] d\tau - F_0(t) \right\} + b'_1(t)(y(t))^2 + \sum_{i=1}^n \left[A'_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 + \int_{t_0}^t R''_{i\tau t}(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau \right], \end{aligned}$$

а значит, учитывая, что в силу условий теоремы функции $b_1'(t)$ и $A_i'(t)$, $R_{i\tau t}''(t, \tau)$ ($i = \overline{1, n}$) неотрицательны и справедливо тождество $R_{i\tau t}''(t, \tau) = R_{i\tau\tau}''(t, \tau)$, имеет место следующая оценка производной:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t; x, y)}{dt} &\leq 2W(t)|x(t)||y(t)| + \\ &+ 2|y'(t)| \left\{ |b_0(t)||x(t)| + \int_{t_0}^t [|P_0(t, \tau)||x(\tau)| + |P_1(t, \tau)||y(\tau)| + |K_0(t, \tau)||y'(\tau)|] d\tau + |F_0(t)| \right\} + \\ &+ b_1'(t)(y(t))^2 + \sum_{i=1}^n \left[A_i'(t)(Y_i(t, t_0))^2 + \int_{t_0}^t R_{i\tau\tau}''(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как в определении (10) квадратный трёхчлен

$$T(t, t_0) \equiv R_i(t, t_0)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t, t_0) + c_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

как доказано выше, неотрицателен и все остальные слагаемые неотрицательны в силу условий теоремы, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (x(t))^2 &\leq V(t; x, y), \quad 2\lambda^2 \int_{t_0}^t (x(s))^2 ds \leq V(t; x, y), \quad (y'(t))^2 \leq V(t; x, y), \\ b_1(t)(y(t))^2 &\leq V(t; x, y), \quad \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t R_{i\tau\tau}'(t, \tau)(Y_i(t, \tau))^2 d\tau \leq V(t; x, y). \end{aligned} \quad (18)$$

Из неотрицательности квадратного трёхчлена $T(t, t_0)$ и представления (7) вытекает тождество $T(t, t_0) \equiv A_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 + B_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t, t_0) + c_i(t)$. Но квадратный трёхчлен $B_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t, t_0) + c_i(t)$, составленный из трёх последних слагаемых этого тождества, неотрицателен, так как для его дискриминанта справедливо неравенство $4(E_i^2(t) - B_i(t)c_i(t)) \leq 0$ (см. условие 4)), а коэффициент $B_i(t)$ при старшем его члене в силу условия 4) положителен. Поэтому выполняется оценка

$$A_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 \leq V(t; x, y). \quad (19)$$

Теперь, учитывая оценки (18) и (19), а также условие 4) для функций $A_i'(t)$ ($i = \overline{1, n}$), условие 2) для функций $R_{i\tau\tau}''(t, \tau)$ ($i = \overline{1, n}$) и условие 5) для функций $b_1(t)$ ($i = \overline{1, n}$), из (17) получаем следующее интегро-дифференциальное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t; x, y)}{dt} &\leq 2 \left\{ |F_0(t)| + \int_{t_0}^t [|P_0(t, \tau)| + |P_1(t, \tau)|(b_1(\tau))^{-1/2} + \right. \\ &\left. + |K_0(t, \tau)|](V(\tau; x, y))^{1/2} d\tau \right\} (V(t; x, y))^{1/2} + 2\mu(t)V(t; x, y), \end{aligned}$$

где

$$\mu(t) \equiv W(t)(b_1(t))^{-1/2} + |b_0(t)| + \frac{1}{2}b_1^*(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [A_i^*(t) + R_i^*(t)].$$

Проинтегрировав это соотношение в пределах от t_0 до t , получим интегральное неравенство

$$V(t; x, y) \leq c_* + 2 \int_{t_0}^t \left\{ |F_0(s)| + \int_{t_0}^s [|P_0(s, \tau)| + |P_1(s, \tau)|(b_1(\tau))^{-1/2} + |K_0(s, \tau)|] (V(\tau; x, y))^{1/2} d\tau \right\} (V(s; x, y))^{1/2} ds + 2 \int_{t_0}^t \mu(s) V(s; x, y) ds, \quad (20)$$

где

$$c_* = V(t_0; x, y) = (x(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + b_1(t_0)(y(t_0))^2 + \sum_{i=1}^n c_i(t_0).$$

Из доказанной в работе [11] леммы 1 вытекает, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. Пусть для непрерывных неотрицательных функций $u(t)$, $\alpha_k(t)$ ($k = 1, 2$) и $\beta(t, \tau)$ при $t \geq \tau \geq t_0$ выполняется с некоторой положительной постоянной C неравенство

$$(u(t))^2 \leq C + \int_{t_0}^t \left[\alpha_1(s)u(s) + \alpha_2(s)(u(s))^2 + \int_{t_0}^s \beta(t, \tau)u(s)u(\tau)d\tau \right] ds.$$

Тогда имеет место оценка

$$(u(t))^2 \leq \left[C^{1/2} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \alpha_1(s) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^s M(\eta) d\eta \right\} ds \right]^2 \exp \left\{ \int_{t_0}^t M(s) ds \right\},$$

где $M(t) \equiv \alpha_2(t) + \int_{t_0}^t \beta(t, \tau) d\tau$.

Применим к интегральному неравенству (20) сформулированную лемму и с учётом условий 2)–5) теоремы придём к оценке

$$V(t; x, y) \leq c_{**}, \quad (21)$$

где

$$c_{**} = \left[(c_*)^{1/2} + \int_{t_0}^{\infty} |F_0(s)| \exp \left\{ -\int_{t_0}^s M(\eta) d\eta \right\} ds \right]^2 \exp \left\{ 2 \int_{t_0}^{\infty} M(\eta) d\eta \right\} < \infty,$$

$$M(t) \equiv \mu(t) + \int_{t_0}^t [|P_0(t, \tau)| + |P_1(t, \tau)|(b_1(\tau))^{-1/2} + |K_0(t, \tau)|] d\tau.$$

В силу соотношений (18) из неравенства (21) вытекают утверждения (8) и (9) теоремы.

Далее, учитывая условие 7) теоремы, вследствие замены (2) и равенства

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\lambda^2 x'(t) + W(t)y'(t) + W'(t)y(t) = -\lambda^2 [-\lambda^2 x(t) + W(t)y(t)] + W(t)y'(t) + W'(t)y(t) = \\ &= \lambda^4 x(t) + [W'(t) - \lambda^2 W(t)]y(t) + W(t)y'(t) \end{aligned}$$

получаем, что $x'(t) = O(1)$ и $x''(t) = O(1)$. Следовательно, для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) верно, что $x^{(k)}(t) = O(1)$ ($k = 0, 1, 2$). Теорема доказана.

Отметим, что в работах [1, с. 215–217; 7–9] рассмотрены различные ИДУ типа Вольтерры, причём в [8] рассмотрен векторный аналог результатов из [7, 9], а в монографии [10, с. 73–80] обобщены соответствующие результаты работ [1, с. 215–217; 7–9] на линейные ИДУ первого и второго порядков типа Вольтерры. Мы в настоящей работе использовали, главным образом, идеи построения функционалов из [10, с. 73–80].

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. Если

1) $\lambda > 0$, $W(t) > 0$, $K(t, \tau) = C(t, \tau) + K_0(t, \tau)$, $F(t) = F_0(t)$, то интеграл $\int_t^\infty |C(s, t)| ds$ определён для всех $t \in I$;

2) выполняются условия 3), 5)–7) теоремы, то любое решение ИДУ (1) и его первая и вторая производные ограничены на полуоси I .

В данном случае $K_i(t, \tau) \equiv F_i(t) \equiv c_i(t) \equiv 0$ ($i = \overline{1, n}$).

3. Пример. Для ИДУ третьего порядка (1) с $t_0 = 1$ и

$$a_2(t) \equiv 4 + e^{t(\sin t)^{1/3}} + \frac{2t+1}{(t+1)^2}, \quad a_1(t) \equiv 2a_2(t) + \frac{t+1}{t+2}, \quad a_0(t) \equiv a_2(t) + 1 + \frac{t+1}{t+2} - \frac{e^{-t} \cos t}{(t+10)^2},$$

$$Q_0(t, \tau) \equiv Q_2(t, \tau) - \frac{e^{-t+\tau}}{(t^2 + \tau^2 + 1)^2} + e^{-2t} \cos(t\tau), \quad Q_1(t, \tau) \equiv 2Q_2(t, \tau) - \frac{e^{-t+\tau}}{(t^2 + \tau^2 + 1)^2},$$

$$f(t) \equiv e^{-t} \left(\frac{e^{t^2(\cos t)^{1/5}}}{t+7} - \frac{\sin(3t)}{t^2+1} \right),$$

где

$$Q_2(t, \tau) \equiv e^{-t+\tau+t^2(\cos t)^{1/5}+\tau^2(\cos \tau)^{1/5}} \left(\frac{1}{t-\tau+6} + \frac{t+\tau+3}{t+\tau+4} \right) + \frac{e^{-t+\tau}(\sin t)^{1/9}}{(t+\tau+1)^{11/10}} + \frac{e^{-t+\tau}}{(t+\tau+5)^3},$$

выполняются все условия теоремы при $\lambda = 1$, $W(t) \equiv e^{-t}$. Здесь

$$b_2(t) \equiv e^{t(\sin t)^{1/3}} + 1 + \frac{2t+1}{(t+1)^2}, \quad b_1(t) \equiv 3 + \frac{t+1}{t+2}, \quad b_{10} \equiv \frac{7}{2}, \quad b_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+1)(t+2)},$$

$$b_0(t) \equiv \frac{\cos t}{(t+10)^2}, \quad P_0(t, \tau) \equiv e^{-t} \cos(t\tau), \quad P_1(t, \tau) \equiv -\frac{1}{(t^2 + \tau^2 + 1)^2},$$

$$K(t, \tau) \equiv e^{t^2(\cos t)^{1/5}+\tau^2(\cos \tau)^{1/5}} \left(\frac{1}{t-\tau+6} + \frac{t+\tau+3}{t+\tau+4} \right) + \frac{(\sin t)^{1/9}}{(t+\tau+1)^{11/10}} + \frac{1}{(t+\tau+5)^3},$$

$$n = 1, \quad \psi_1(t) \equiv e^{t^2(\cos t)^{1/5}}, \quad R_1(t, \tau) \equiv \frac{t+\tau+3}{t+\tau+4} + \frac{1}{t-\tau+6}, \quad A_1(t) \equiv \frac{t+3}{t+4},$$

$$A_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+3)(t+4)}, \quad R_1^*(t) \equiv 0, \quad B_1(t) \equiv \frac{1}{t+6}, \quad C(t, \tau) \equiv \frac{(\sin t)^{1/9}}{(t+\tau+1)^{11/10}},$$

$$D(t) \geq 2e^{t(\sin t)^{1/3}} + 2 + \frac{2t+1}{(t+1)^2}, \quad K_0(t, \tau) \equiv \frac{1}{(t+\tau+5)^3},$$

$$F(t) \equiv \frac{e^{t^2(\cos t)^{1/5}}}{t+7} - \frac{\sin 3t}{t^2+1}, \quad E_1(t) \equiv \frac{1}{t+7}, \quad c_1(t) \equiv \frac{1}{t+6}, \quad F_0(t) \equiv -\frac{\sin 3t}{t^2+1}.$$

Для ИДУ третьего порядка в приведённом примере коэффициенты $a_k(t)$ ($k = 0, 1, 2$) не дифференцируемы в точках $t = \pi m$ ($m \in \mathbb{N}$), ядра $Q_k(t, \tau)$ ($k = 0, 1, 2$) и свободный член $f(t)$ не дифференцируемы в точках $t = \pi/2 + \pi m$ ($m \in \mathbb{N}$), ядра $Q_k(t, \tau)$ ($k = 0, 1, 2$) не дифференцируемы также ещё и в точках $t = \pi l$ ($l \in \mathbb{N}$). Таким образом, нам удалось найти ИДУ вида (1), для которого применима доказанная нами теорема.

Этот пример показывает, что класс ИДУ вида (1), для которого приведённая выше задача решается, не пуст.

Заключение. Отметим, что идея приведения ИДУ третьего порядка (1) к системе (3) заимствована из монографии академика Г.И. Марчука [12]; идея использования некоторых вспомогательных функций при построении функционала Ляпунова описана в монографии академика Н.Н. Красовского [13, с. 199].

В работе мы, используя конструкции функционалов Ляпунова для ИДУ первого порядка типа Вольтерры [6–9] и для ИДУ первого и второго порядков типа Вольтерры [10, с. 73–80], т.е. используя идеи построения функционалов Ляпунова, смогли построить функционал Ляпунова для ИДУ третьего порядка (1). Для этого понадобился нестандартный метод сведения к системе. Таким образом, главная новизна работы состоит в нестандартном сведении ИДУ к эквивалентной системе, состоящей из одного линейного дифференциального уравнения первого порядка и одного линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерры; в построении нового функционала Ляпунова для исследования ограниченности на полуоси решений и их первых двух производных заданного линейного ИДУ третьего порядка.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа финансировалась за счёт средств Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burton T.A.* Volterra Integral and Differential Equations. New York, 1983.
2. *Lakshmikantham V., Rao M.R.M.* Theory of Integro-Differential Equations. Amsterdam, 1995.
3. *Burton T.A.* Volterra Integral and Differential Equations. Amsterdam, 2005.
4. *Tunç C., Tunç O.* New results on the stability, integrability and boundedness in Volterra integro-differential equations // *Bull. Comput Appl. Math.* 2018. V. 6. № 1. P. 41–58.
5. *Искандаров С.* Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // *Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.* Бишкек, 2006. Вып. 34. С. 37–43.
6. *Volterra V.* Sur la theorie mathematique des phenomenes hereditaires // *J. Math. Pure and Appl.* 1928. V. 7. P. 249–298.
7. *Levin J.J., Nohel J.A.* Perturbations of a nonlinear Volterra equation // *Mech. Math. J.* 1965. V. 12. P. 431–447.
8. *Винокуров В.Р.* Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // *Дифференц. уравнения.* 1967. Т. 3. № 10. С. 1732–1744.
9. *Levin J.J.* A nonlinear Volterra equation not of convolution type // *J. of Different. Equat.* 1968. V. 4. P. 176–186.
10. *Искандаров С.* Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерры. Бишкек, 2002.
11. *Ведь Ю.А., Пахыров З.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // *Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии.* Фрунзе, 1973. Вып. 9. С. 68–103.
12. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М., 1988.
13. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

Институт математики
НАН Кыргызской Республики,
г. Бишкек

Поступила в редакцию 23.10.2022 г.
После доработки 09.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.