

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.951

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. III

© 2024 г. В. И. Елкин

Рассматриваются симметрии уравнений с частными производными на основе использования дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением.

Ключевые слова: уравнение с частными производными, дифференциальная система, динамическая система с управлением, первый интеграл, симметрия, декомпозиция.

DOI: 10.31857/S0374064124010055, EDN: RQSDRQ

1. Введение. Постановка задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t, y, p) = 0, \quad \nu = \overline{1, l}. \quad (1)$$

После приведения этой системы к специальному виду в параметрической форме, разрешённой относительно всех производных

$$\partial_k y^i = g_k^i(t, y, u), \quad (2)$$

где $\partial_k = \partial/\partial t_k$, открывается возможность применения дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением, используя некоторую аналогию данных объектов. Эти методы позволяют исследовать некоторые вопросы декомпозиции, построения симметрий и др. В статье [1] на основе понятия первого интеграла с помощью замены координат, куда входят первые интегралы, была получена простая декомпозиция вида

$$\partial_k z^i = 0, \quad i = \overline{1, q}, \quad \partial_k z^j = h_k^j(t, x, u), \quad j = \overline{q+1, n}. \quad (3)$$

В работе [2] рассматривается более общая декомпозиция, которая также имеет аналог в теории динамических систем с управлением под названием *агрегирование (факторизация)*. Здесь исследуются симметрии, т.е. преобразования переменных, “переводящие решения в решения”. Кроме практического смысла тиражирования решений, симметрии определяют также некоторую декомпозицию уравнений с частными производными.

2. О симметриях дифференциальных уравнений. Симметрии дифференциальных уравнений — это такие преобразования зависимых и независимых переменных, которые переводят решения дифференциальных уравнений в решения. Таким образом, симметрии позволяют находить новые решения по известным решениям, но этим не ограничивается их роль. Различные качественные характеристики дифференциальных уравнений определяются существованием тех или иных симметрий. Например, для обыкновенных дифференциальных уравнений симметрии помогают находить интегралы, которые в случае уравнений механики дают законы сохранения. Для уравнений с частными производными (математической физики) симметрии также поставляют законы сохранения, которые имеют более сложный вид. Знание симметрий позволит преобразовать дифференциальные уравнения к удобному для исследований виду, например, к некоторой декомпозиции.

В данном пункте кратко опишем поход к нахождению симметрий дифференциальных уравнений, предложенный Л.В. Овсянниковым, под наименованием *групповой анализ* [3].

Рассмотрим систему $\mathcal{L}$ дифференциальных уравнений первого порядка (1), включающую m независимых переменных $t = (t^1, \dots, t^m)$ и n зависимых переменных $y = (y^1, \dots, y^n)$. Решением системы $\mathcal{L}$ является гладкая функция $y = \Phi(t)$, удовлетворяющая системе $\mathcal{L}$. Будем отождествлять эту функцию, заданную в области $I \subset \mathbb{R}^m$ изменения переменных t , с её графиком, т.е. с множеством точек

$$N = \{(t, y) \in \mathbb{R}^d : y = \Phi(t)\}, \quad d = m + n.$$

Этот график является m -мерным многообразием в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим некоторый диффеоморфизм (т.е. взаимно-однозначное отображение, гладкое в обе стороны) $\psi: M \rightarrow M$, где M — область в $\mathbb{R}^d$, причём $N \subset M$. Под действием диффеоморфизма ψ многообразие N перейдёт в некоторое многообразие $\hat{N} = \psi(N)$. Многообразие $\hat{N}$ не является, вообще говоря, графиком какой-либо однозначной функции $y = \hat{\Phi}(t)$. Понятие симметрии относится к случаю, когда $\hat{N}$ — график.

Итак, будем говорить, что диффеоморфизм ψ является симметрией системы $\mathcal{L}$, если каждое решение $y = \Phi(x)$ системы, трактуемое как многообразие N , переводится этим диффеоморфизмом в многообразие $\hat{N} = \psi(N)$, являющееся графиком некоторой функции $y = \hat{\Phi}(t)$, представляющей собой решение системы $\mathcal{L}$. Естественным образом понятие симметрии обобщается для случая локального диффеоморфизма ψ .

Перейдём теперь к группам симметрий. Пусть S — локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов некоторой области в $\mathbb{R}^d$, состоящая из преобразований s^τ вида

$$t' = h(t, y, \tau), \quad y' = g(t, y, \tau). \quad (4)$$

Под действием преобразования s^τ группы S многообразие N , являющееся графиком функции $y = \Phi(t)$, перейдёт в многообразие $\hat{N}$, которое в параметрической форме (параметр t) задаётся уравнениями

$$t' = h(t, \Phi(t), \tau), \quad (5)$$

$$y' = g(t, \Phi(t), \tau). \quad (6)$$

Так как $h(t, y, 0) = t$, то (по крайней мере для малых τ) уравнения (5) можно разрешить относительно t и подставить в (6). В результате получим представление многообразия $\hat{M}$ в виде графика функции $y' = \hat{\Phi}(t')$. Будем говорить, что эта функция получается из функции $y = \Phi(t)$ действием преобразования s^τ . Группа S называется *группой симметрий*, если такие функции, получаемые действием преобразований группы на решения, снова являются решениями системы $\mathcal{L}$, т.е. преобразования s^τ — симметрии системы $\mathcal{L}$. Заметим, что симметрии часто называют *допускаемыми преобразованиями*, а группы симметрий — *допускаемыми группами* системы $\mathcal{L}$. Говорят также, что система $\mathcal{L}$ допускает преобразование или группу преобразований.

При рассмотрении вопроса о симметриях удобно перейти в так называемое расширенное пространство переменных, которое, наряду с зависимыми и независимыми переменными, содержит в качестве переменных ещё производные зависимых переменных по независимым. Введём в рассмотрение величины p_k^i , равные значениям производных от функций $y = \Phi(t)$:

$$p_k^i = \frac{\partial \Phi^i}{\partial t^k}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Под действием преобразования s^τ группы S функция $y = \Phi(t)$ перейдет в некоторую функцию $y' = \hat{\Phi}(t')$. Для того чтобы получить закон изменения производных запишем, используя (5), (6), следующие равенства:

$$g^i(t, \Phi(t), \tau) = \hat{\Phi}^i(h(t, \Phi(t), \tau)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Продифференцировав эти равенства по t^k , получим систему уравнений

$$\frac{\partial g^i}{\partial t^k} + \frac{\partial g^i}{\partial y^l} p_k^l = \hat{p}_j^i \left(\frac{\partial h^j}{\partial t^k} + \frac{\partial h^j}{\partial y^l} p_k^l \right), \quad (7)$$

которые следует разрешить относительно $\hat{p}_j^i = \partial \hat{\Phi}^i / \partial \hat{t}^j$. Последняя операция (при достаточно малых τ) даёт однозначный результат. Действительно, при $\tau = 0$ скобки в (7) равны символу Кронекера δ_k^j . Следовательно, определитель этой системы уравнений отличен от нуля на некотором интервале изменения величины τ . Поэтому величины $\hat{p}_j^i$ можно представить как функции переменных t, y, p, τ , причём никак не связанные с конкретным видом функции $y = \Phi(t)$:

$$\hat{p}_j^i = f_j^i(t, y, p, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (4), (8) задают однопараметрическую группу, действующую в пространстве $\mathbb{R}^{(m+n+n) \times m}$ точек с координатами (t, y, p) . Это пространство называется *продолженным пространством*. (Предложенная конструкция продолжения евклидова пространства представляет собой сильно упрощённый вариант теории расслоения струй.) Группа (4), (8) называется *продолжением группы* S на производные $p_k^i = \partial y^i / \partial t^k$. Обозначим её через $\tilde{S}$.

Продолженная группа $\tilde{S}$, задаваемая соотношениями (4), (8), действует в продолженном пространстве $\mathbb{R}^{(m+n+n) \times m}$. Найдём векторное поле, порождаемое группой $\tilde{S}$ в этом пространстве.

Пусть группе S соответствует векторное поле

$$X = \xi^k(t, y) \frac{\partial}{\partial t^k} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (9)$$

Таким образом,

$$\xi^k(t, y) = \left. \frac{\partial h^k(t, y, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad \eta^i(t, y) = \left. \frac{\partial g^i(t, y, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}.$$

Из определения группы $\tilde{S}$ следует, что ей соответствует векторное поле вида

$$\tilde{X} = X + \zeta_k^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial p_k^i} = \xi^k(t, y) \frac{\partial}{\partial t^k} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \zeta_k^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial p_k^i}.$$

Поле $\tilde{X}$ называется *продолжением* поля X на производные $p_k^i = \partial y^i / \partial t^k$. Найдём компоненты $\zeta_k^i(t, y, p)$ продолженного поля. По определению

$$\zeta_k^i(t, y, p) = \left. \frac{\partial f_k^i(t, y, p, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Для того чтобы вычислить эти производные, продифференцируем равенства (7) по τ при $\tau = 0$. Заметим, что в этих равенствах можно менять порядок дифференцирования. После этих операций получим уравнения

$$\frac{\partial \eta^i}{\partial t^k} + \frac{\partial \eta^i}{\partial y^l} p_k^l = \zeta_k^i + p_j^i \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial t^k} + \frac{\partial \xi^j}{\partial y^l} p_k^l \right),$$

откуда окончательно имеем

$$\zeta_k^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial t^k} + \frac{\partial \eta^i}{\partial y^l} p_k^l - p_j^i \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial t^k} + \frac{\partial \xi^j}{\partial y^l} p_k^l \right).$$

Система дифференциальных уравнений $\mathcal{L}$ задаёт в продолженном пространстве некоторое множество

$$F^\alpha(t, y, p) = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}, \quad (10)$$

где F^α — гладкие функции. Далее всегда предполагается, что система удовлетворяет так называемому условию максимального ранга, которое означает, что ранг матрицы Якоби от функций F^α (по всем переменным) равен r во всех точках продолженного пространства, удовлетворяющих (10). В этом случае уравнения (10) определяют в продолженном пространстве многообразие размерности $(m + n + m) \times (n - r)$.

Следующее достаточно очевидное утверждение является основным для нахождения групп симметрий: однопараметрическая группа S , действующая в пространстве независимых переменных t и зависимых переменных y , является группой симметрий системы дифференциальных уравнений $\mathcal{L}$, если равенства (10), задающие эту систему, определяют инвариантное многообразие продолженной группы $\tilde{S}$, т.е. преобразования группы переводят точки многообразия снова в точки многообразия.

Теперь воспользуемся критерием инвариантности многообразия, заданного в неявном виде [3, с. 45]. Из него следует, что векторное поле (9) порождает однопараметрическую группу симметрий системы дифференциальных уравнений $\mathcal{L}$, если

$$\tilde{X}F^\alpha|_{F(t,y,p)=0} = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}. \quad (11)$$

(Здесь в левой части равенства указано действие поля как оператора на функцию.)

Векторное поле (9), порождающее однопараметрическую группу симметрий, называется *инфинитезимальной симметрией* или *допускаемым полем*. В действительности уравнения (11) являются дифференциальными уравнениями относительно неизвестных компонент ξ и η таких полей. Уравнения (11) называются *определяющими уравнениями* для системы $\mathcal{L}$.

Найдём определяющие уравнения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(t, y), \quad (t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (12)$$

Искомое допускаемое векторное поле имеет вид

$$X = \xi(t, y) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

продолженное (на производные $p^i = dy^i/dt$) поле —

$$\tilde{X} = X + \zeta^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial p^i} = \xi(t, y) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial t} + \frac{\partial \eta^i}{\partial y^l} p^l - p^i \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial y^l} p^l \right) \right) \frac{\partial}{\partial p^i}. \quad (13)$$

Система (12) в продолженном пространстве записывается в виде многообразия

$$p^i - f^i(t, y) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для нахождения определяющих уравнений нужно подействовать продолженным векторным полем (13) на функции $p^i - f^i(t, y)$, затем подставить вместо p^i функции $f^i(t, y)$ и приравнять полученные выражения к нулю. В результате получим равенства

$$X_0 \eta^i - f^i X_0 \xi = X f^i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где X_0 — векторное поле, имеющее вид

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Нетрудно видеть, что соотношения (14) можно записать в компактной форме

$$[X_0, X] = (X_0 \xi) X_0.$$

3. Симметрии динамических систем с управлением. Динамической системой с управлением называется система уравнений вида

$$\dot{y}^i = g^i(t, y, u), \quad i = \overline{1, n}, \quad (t, y) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r. \quad (15)$$

Предполагается, что функции g^i , $\partial f^i / \partial y^j$, $\partial g^i / \partial u^\alpha$ являются гладкими. Обычно называют y фазовыми переменными (состояниями), u — управлениями (внешними воздействиями). Множество M , называемое фазовым пространством, — область, U — область. Управления могут быть кусочно-непрерывными функциями $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. В этом случае они называются допустимыми.

Решением или фазовой траекторией системы (15) называется непрерывная кусочно-гладкая функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (15).

Далее будем считать, что управления являются постоянными. Дело в том, что для исследования агрегирования этого достаточно, а в качестве приложения симметрий будет именно декомпозиция, основанная на агрегировании, при этом будем следовать работам [4, 5], которые затем будут обобщены для дифференциальных уравнений с частными производными в п. 4. Предполагаем, что однопараметрические группы симметрий порождаются векторными полями (инфинитезимальными) операторами

$$X = \xi(t, y) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha(t, y, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

действующими в $(n+r+1)$ -мерном пространстве переменных (t, y, u) . Продолжение осуществляется на производные $\partial y^i / \partial t$, $\partial y^i / \partial u^\alpha$, причём продолженный оператор имеет вид

$$\tilde{X} = X + \zeta^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial p^i} + \lambda_\alpha^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial q_\alpha^i},$$

где

$$\zeta^i = D_t(\eta^i) - p^i D_t(\xi) - q_\alpha^i D_t(\omega^\alpha), \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + p^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Условие того, что поле X допускается системой:

$$\tilde{X}(p^i - f^i(t, y, u))|_{p=f} = 0.$$

Отсюда следуют равенства

$$X_0 \eta^i - f^i X_0 \xi = X f^i, \quad (16)$$

$$X_0(\omega^\alpha) = 0, \quad (17)$$

где

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Полагая

$$X^* = \theta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad X = \xi X_0 + X^*, \quad (18)$$

получаем из (16), (17) соотношения

$$X_0(\theta^i) = X^*(f^i), \quad (19)$$

$$X_0(\omega^\alpha) = 0. \quad (20)$$

Это можно записать с помощью коммутатора

$$[X_0, X^*] = 0.$$

Соотношения (19), (20) представляют собой дифференциальные уравнения относительно компонент допускаемого поля (18). После их нахождения симметрии являются решением некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Симметрии, как уже отмечалось, могут быть использованы для построения новых решений системы уравнений по известным решениям. Существует ещё одно приложение симметрий для упрощения исследования систем уравнений, а именно, декомпозиция этих уравнений.

4. Симметрии и декомпозиция дифференциальных уравнений с частными производными. Вернёмся к дифференциальным уравнениям с частными производными (1), причём в специальной форме (2):

$$\partial_k y^i = g_k^i(t, y, u), \quad t \in I \subset \mathbb{R}^m, \quad y \in L \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^s, \quad (21)$$

где I , L , U — некоторые области. Исследуем вопрос о существовании инфинитезимальных симметрий (допускаемых векторных полей) для системы (21). Как и в работах [1, 2], воспользуемся аналогией систем (2) с управляемыми системами (15). Далее будем считать, что параметрические переменные (“управления”) являются всевозможными постоянными. Дело в том, что (также как и для управляемых систем (15)) для исследования агрегирования этого достаточно (см. [2]), а в качестве приложения симметрий будет именно декомпозиция, основанная на агрегировании, при этом будем следовать работам [4, 5], которые здесь обобщаются на дифференциальные уравнения с частными производными. Итак, речь идёт о нахождении векторных полей

$$X = \xi^k(t, y, u) \frac{\partial}{\partial t^k} + \eta^i(t, y, u) \frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha(t, y, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (22)$$

Этим полям соответствуют продолженные поля (продолжение осуществляется на производные $\partial y^i / \partial t$, $\partial y^i / \partial u^\alpha$), причём продолженные операторы имеют вид

$$\tilde{X} = X + \zeta_k^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial p_k^i} = \xi^k(t, y) \frac{\partial}{\partial t^k} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \zeta_k^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial p_k^i},$$

где

$$\zeta_k^i = D_{t_k}(\eta^i) - p^i D_{t_k}(\xi) - q_\alpha^i D_{t_k}(\omega^\alpha), \quad D_{t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} + p_k^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

По аналогии с п. 3 условие того, что поле X допускается системой, будет следующим:

$$\tilde{X}(p_k^i - g_k^i(t, y, u))|_{p=g} = 0,$$

где

$$X_l \eta^i - g^i X_l \xi - q_\alpha^i X_l \omega^\alpha = X g^i. \quad (23)$$

Так как эти равенства должны выполняться тождественно по t , y , u , p , q , то

$$X_l \eta^i - g^i X_l \xi = X g^i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (24)$$

$$X_l(\omega^\alpha) = 0, \quad (25)$$

где X_l — операторы полного дифференцирования системы (21) по переменным t^l :

$$X_l = g_l^i(t, y, u) \partial / \partial y^i, \quad l = \overline{1, m}. \quad (26)$$

Далее при исследовании симметрий и декомпозиции рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными специального вида, причём для упрощения, не ограничивая общности, «автономные», т.е. с правыми частями, не зависящими от аргументов t :

$$\partial_k y^i = g_k^i(y, u), \quad t \in I \subset \mathbb{R}^m, \quad y \in L \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^s, \quad (27)$$

где I , L , U — некоторые области. Речь идёт о декомпозиции системы (27) с помощью замены зависимых переменных y , точнее, о возможности преобразования системы с помощью замены переменных

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i = \overline{1, n}, \quad (28)$$

к виду

$$\partial_k z^l = h_k^l(z^1, \dots, z^m, u), \quad l = \overline{1, m}, \quad (29)$$

$$\partial_k z^i = h_k^i(z^1, \dots, z^n, u), \quad i = \overline{m+1, n}. \quad (30)$$

Если такое представление возможно, то будем говорить, что система (27) допускает декомпозицию по зависимым переменным порядка $n - m$, причём первые m функций в замене переменных (28)

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i = \overline{1, m}, \quad (31)$$

называются *агрегатами*. Замену зависимых переменных (28) в системе (27) будем осуществлять следующим образом: нужно подействовать операторами (26) на функции (28), получив

$$X_l(\varphi^i(y)) = g_l^j(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j}, \quad (32)$$

и выразить функционально полученные функции через (28):

$$g_l^j(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y), \dots, \varphi^n(y), u). \quad (33)$$

Функции $h^i(z^1, \dots, z^n, u)$ являются новыми правыми частями системы, при этом декомпозиция (29), (30) возникает, когда первые m функций (33) функционально выражаются только через агрегаты (31), т.е.

$$g_l^j(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y), \dots, \varphi^m(y), u), \quad i = \overline{1, m}.$$

Непосредственное применение этого условия не даёт конструктивного метода нахождения агрегатов и проверки возможности декомпозиции. Поэтому в статье [2] применён опосредованный подход, когда сначала с помощью решения некоторых систем дифференциальных уравнений отыскиваются полные семейства векторных полей, для которых агрегаты являются интегралами, а затем находятся агрегаты, т.е. интегралы этих семейств. При этом совместность упомянутых систем дифференциальных уравнений определяет возможность декомпозиции.

Для применения симметрий в вопросах декомпозиции вида (29), (30) в силу указанных выше причин (в частности, автономности) естественно рассматривать симметрии, не меняющие переменные t и параметрические переменные u . Для соответствующих полей (22) это означает, что $\xi^k = 0$, $\omega^\alpha = 0$. Тогда для искомых векторных полей

$$X = \eta^i(t, y, u) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (34)$$

выражения (24), (25) можно с помощью операции коммутирования заменить компактным выражением

$$[X_l, X] = 0, \quad l = \overline{1, m}. \quad (35)$$

Векторные поля (34), удовлетворяющие (35), образуют алгебру Ли, обозначаемую $\mathfrak{a}$, т.е. коммутаторы и линейные комбинации полей из $\mathfrak{a}$ снова принадлежат $\mathfrak{a}$. Кроме того, введём подалгебру, состоящую из полей вида

$$X = \eta^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

которую обозначим через $\mathfrak{a}_0$. Заметим, что существуют аналоги этих алгебр для управляемых динамических систем. В частности, была обнаружена глубокая связь свойств структуры

управляемой динамической системы со свойствами соответствующих алгебр. Вероятно, что существуют подобные связи и для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Здесь рассматривается применение алгебры $\mathfrak{a}_0$ для исследования возможности декомпозиции системы (27).

Напомним, что *полным семейством векторных полей* или *операторов* называется семейство полей

$$Z_a = b_a^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (36)$$

где по повторяющемуся индексу здесь и далее проводится суммирование, если:

1) $\text{rank} \|b_a^i(y)\| = p$, т.е. векторы $Z_a(y)$, $a = \overline{1, p}$, линейно независимы в каждой точке $y \in M$ или, как ещё говорят, линейно несвязаны в области M ;

2) $[Z_a, Z_c] = h_{ac}^d(y) Z_d$, $a, c, d = \overline{1, p}$, т.е. все коммутаторы $[Z_a, Z_c]$ семейства выражаются линейно с переменными коэффициентами $h_{ac}^d(y)$ через остальные поля семейства.

Теорема 1 [6, с. 12]. *Полное семейство (36), $p < n$, имеет в окрестности каждой точки $t = n - p$ функционально независимых интегралов (полный набор)*

$$\Phi^k(y), \quad \text{rank} \left\| \frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} \right\|_{i=\overline{1, n}}^{k=\overline{1, n-m}} = n - m, \quad (37)$$

причём любой интеграл $\Phi(y)$ функционально выражается через полный набор

$$\Phi(y) = F(\Phi^1(y), \dots, \Phi^m(y)).$$

Следующее утверждение определяет некоторое условие декомпозиции на основе существования симметрий.

Теорема 2. *Если в $\mathfrak{a}_0$ существует полное семейство векторных полей*

$$Z_a = b_a^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l = \overline{1, p}, \quad (38)$$

то система допускает декомпозицию (29), (30) системы (27), причём агрегатами являются полный набор интегралов этого семейства.

Доказательство. Для семейства (38) возьмём полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i = \overline{1, m}$, $m = n - p$. Рассмотрим выражения

$$[X_l, Z_a](\varphi^i(y)) = X_l(Z_a(\varphi^i(y))) - Z_a(X_l(\varphi^i(y))) = 0. \quad (39)$$

Из (39) вытекает, что функции $X_l(\varphi^i(y))$ являются интегралами семейства (36) и по теореме 1 функционально выражаются через полный набор интегралов и, следовательно, $\varphi^i(y)$ являются агрегатами для системы (27).

Выражения (35) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений

$$X_l(b_a^i) = Z_a(g^i), \quad i = \overline{1, n}, \quad a = \overline{1, p}, \quad u \in U, \quad (40)$$

относительно неизвестных компонент семейства (36). В (40) выражения $\xi_u(b_a^i)$, $Z_a(f^i)$ представляют собой действия полей ξ_u , Z_a на функции $b_a^i(y)$, g^i как операторов. После решения этой системы нужно найти полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i = \overline{1, m}$, $m = n - p$, полного семейства (36), что, согласно [6, с. 12], сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения правых частей фактор-системы следует функции $g^j(y, u) \partial \varphi^k / \partial y^j$ выразить функционально через функции $\varphi^i(y)$, $i = \overline{1, m}$, $m = n - p$, т.е. представить их в виде

$$g^j(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^p(\varphi^1(y), \dots, \varphi^m(y), u).$$

Построенные функции h^k и определяют искомую фактор-систему

$$\dot{z}^k = h^k(z, u), \quad k = \overline{1, m}.$$

Пример. Рассмотрим

$$\partial_k y_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + u_1, \quad \partial_k y_2 = 2y_1 y_2 + 2y_2 y_3 + u_2, \quad \partial_k y_3 = 2y_1 y_3 + u_3.$$

Убедимся, что компоненты полей семейства

$$X_1 = \eta_{11} \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta_{21} \frac{\partial}{\partial y_2} + \eta_{31} \frac{\partial}{\partial y_3}, \quad X_2 = \eta_{12} \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta_{22} \frac{\partial}{\partial y_2} + \eta_{32} \frac{\partial}{\partial y_3},$$

такие что

$$\eta_{11} + \eta_{21} + \eta_{31} = 0, \quad \eta_{12} + \eta_{22} + \eta_{32} = 0, \quad (41)$$

удовлетворяют соответствующим уравнениям (35), причём интеграл семейства равен

$$y_1 + y_2 + y_3.$$

Для нахождения агрегированной системы следует подействовать операторами полного дифференцирования на этот интеграл и выразить функционально полученный результат через интеграл. В полученном выражении следует заменить интеграл на новую переменную z^1 . В результате агрегированная система примет вид

$$\partial_k z_l = z_l^2 + u_1 + u_2 + u_3.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджета Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской академии наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елкин В.И. Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. I. // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1474–1482.
2. Елкин В.И. Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. II. // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 57. № 11. С. 1453–1460.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
4. Павловский Ю.Н. Групповые свойства управляемых систем и фазовые организационные структуры. I. Группы, характеризующие динамические системы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 4. С. 862–872.
5. Павловский Ю.Н. Групповые свойства управляемых систем и фазовые организационные структуры. II. Фазовые организационные структуры // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 5. С. 1093–1103.
6. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М., 1947.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 18.07.2023 г.
После доработки 18.07.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.