ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 24–40

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ТЕОРИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

© 2024 г. М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова

Предложены новые подходы в задаче конструирования для многомерных нелинейных систем теории управления эквивалентных скалярных дифференциальных уравнений, а также в задаче конструирования для нелинейных уравнений Лурье (скалярных дифференциальных уравнений, содержащих производные только чётных порядков) эквивалентных гамильтоновых систем. Изучены условия разрешимости соответствующих задач, предложены новые формулы перехода к эквивалентным уравнениям и системам. Для уравнений Лурье предлагаемые подходы основаны на переходе от линейной части к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием найденной системы. Получены расчётные формулы и алгоритмы, эффективность которых иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: скалярное дифференциальное уравнение, нелинейное уравнение, уравнение Лурье, линейная задача, нелинейная задача, эквивалентность, разрешимость, гамильтонова система, наблюдаемость системы.

DOI: 10.31857/S0374064124010038, EDN: RQBIXE

1. Введение и постановка задач. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(y), \tag{1}$$

в котором

$$L(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n, \quad M(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m \tag{2}$$

— взаимно простые вещественные многочлены степеней n и m $(n > m \geqslant 0)$ соответственно, а $f(y)$ — скалярная m раз непрерывно дифференцируемая функция. К такому уравнению приводят многие задачи теории систем, теории управления и др. (см., например, [1, § 1.2; 2, гл. 4, § 3; 3, § 1.1.4]). Уравнение (1) описывает динамику одноконтурной системы управления, состоящей из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $W(p) = M(p)/L(p)$ и нелинейной обратной связи с характеристикой $f(y)$.

Уравнение (1) различными способами может быть преобразовано к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Наиболее простым является переход от (1) к системе

$$z' = A_0z + \gamma f((z, c_0)), \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

в которой

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{4}$$

коэффициенты вектора γ определяются равенствами

$$\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_{n-m-1} = 0, \quad \gamma_{n-m} = b_0, \quad \gamma_{n-m+1} + \gamma_{n-m}a_1 = b_1, \quad \ldots,$$
$$\gamma_n + \gamma_{n-1}a_1 + ... + \gamma_{n-m}a_m = b_m. \tag{5}$$

Здесь и ниже символ (z, c) обозначает скалярное произведение векторов $z, c \in \mathbb{R}^n$. Решения уравнения (1) и системы (3) связаны равенством $y(t) = (z(t), c_0)$.

Основное внимание в настоящей работе уделяется изучению следующих двух задач.

Задача Z1. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$x' = Ax + \xi f((x, c)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

в которой A — квадратная (порядка n) матрица, $f(y)$ — m раз непрерывно дифференцируемая функция, а $\xi, c \in \mathbb{R}^n$ — фиксированные векторы, при этом $c \neq 0$. Требуется определить условия, при выполнении которых система (6) будет эквивалентна скалярному дифференциальному уравнению вида (1) таким образом, чтобы их решения $x(t)$ и $y(t)$ были бы связаны равенством $y(t) = (x(t), c)$.

Понятие эквивалентности системы (6) и уравнения (1) более детально будет обсуждаться ниже.

Изучению различных аспектов взаимосвязи уравнения (1) и системы (6) посвящена обширная литература (см., например, [1, § 1.2; 2, гл. 4, § 3; 3, § 1.1.4; 4, гл. 4, § 1; 5, § 23]).

Вторая задача связана с изучением важного частного случая дифференциального уравнения вида (1), в котором

$$L(p) = p^{2n} + a_1p^{2n-2} + a_2p^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}p^2 + a_n, \tag{7}$$
$$M(p) = b_0p^{2m} + b_1p^{2m-2} + \ldots + b_{m-1}p^2 + b_m \tag{8}$$

— взаимно простые многочлены $(0 \leqslant m < n)$, а $f(y)$ — скалярная $2m$ раз непрерывно дифференцируемая функция.

К таким уравнениям с многочленами (7) и (8), содержащими степени только чётных порядков, приводят многие задачи гамильтоновой механики, теории гамильтоновых систем и её приложений (см., например, [6, 7]). Для того чтобы в задаче исследования уравнения (1), (7), (8) воспользоваться богатым арсеналом теории гамильтоновых систем и её методами, полезно от уравнения перейти к эквивалентной гамильтоновой системе в стандартной форме

$$x' = J\nabla H(x), \quad y = (x, c), \tag{9}$$

здесь $c \in \mathbb{R}^{2n}$ — фиксированный вектор, символ (x, c) обозначает скалярное произведение векторов x и c из $\mathbb{R}^{2n}$, а матрица J и вектор $\nabla H(x)$ определяются равенствами

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla H(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}\right)^T, \tag{10}$$

в которых 0 и I — соответственно нулевая и единичная (порядка n) матрицы, $H(x)$ — скалярная вещественная гладкая функция, называемая *гамильтонианом* системы (9).

Второй в настоящей статье является

Задача Z2. Рассматривается дифференциальное уравнение вида (1), (7), (8). Требуется построить эквивалентную этому уравнению гамильтонову систему

$$x' = Ax + \xi f((x, c)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{11}$$

так, чтобы их решения $y(t)$ и $x(t)$ были бы связаны равенством $y(t) = (x(t), c)$. Здесь A — квадратная (порядка $2n$) матрица, $\xi, c \in \mathbb{R}^{2n}$ — фиксированные векторы.

Гамильтоновость системы (11) означает существование скалярной вещественной гладкой функции $H(x)$ такой, что

$$J\nabla H(x) = Ax + \xi f((x,c)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Отметим, что уравнение (1), (7), (8) может быть сведено к системе вида (3). Однако такая система, вообще говоря, не является гамильтоновой. Изучению взаимосвязи уравнений вида (1), (7), (8) и гамильтоновых систем вида (11) и их приложениям посвящена обширная литература (см., например, [8–10]).

В настоящей статье обсуждаются условия, при выполнении которых задачи Z1 и Z2 имеют решения, а также предлагаются алгоритмы конструирования эквивалентных уравнений и систем.

2. Вспомогательные сведения.

2.1. Об эквивалентности систем. Имеют место следующие несложно устанавливаемые утверждения.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\det(A_0 - pI) = (-1)^n L(p).$$

В частности, собственные значения матрицы A_0 совпадают с нулями многочлена $L(p)$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой. Тогда решения $y = y(t)$ и $z = z(t)$ уравнения (1) и системы (3) связаны равенствами*

$$y = (z, c_0), \quad z = \tilde{y} - T\tilde{f}(y). \tag{12}$$

Здесь

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}(y) = \begin{bmatrix} f(y) \\ (f(y))' \\ (f(y))'' \\ \vdots \\ (f(y))^{(m-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

при этом вектор $\tilde{f}(y)$ имеет размерность $n-1$, а прямоугольная $n\times(n-1)$-матрица T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \dots & \gamma_1 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

производные $y^{(k)}$ и $(f(y))^{(k)}$ вычисляются по переменной t от функций $y = y(t)$ и $f(y(t))$ соответственно.

Равенства (12) дают формулы перехода от уравнения (1) к системе (3) и обратно. В соответствии с этими формулами уравнение (1) и система (3) эквивалентны: каждому $y_0 \in \mathbb{R}^n$ соответствует $z_0 = y_0 - T\tilde{f}(y_0) \in \mathbb{R}^n$ (здесь $\tilde{f}(y_0)$ — значение вектор-функции $\tilde{f}(y(t))$ при $t = 0$, а $y(t)$ — это решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $\tilde{y}(0) = y_0$) так, что если $z(t)$ — решение задачи Коши для системы (3) с начальным условием $z(0) = z_0$, то $y(t) = (z(t), c_0)$, и наоборот.

Замечание 1. Отметим, что уравнение (1) имеет смысл только для m раз дифференцируемых функций $f(y)$. В то же время эквивалентная ему система (3) определена для существенно более широкого класса функций, в частности, для непрерывно дифференцируемых функций $f(y)$.

Пусть функция $f(y)$ является непрерывно дифференцируемой. Системы (3) и (6) будем называть *эквивалентными*, если существует невырожденная матрица Q такая, что замена $x = Qz$ преобразует систему (6) в систему (3). Другими словами, существует невырожденная матрица Q такая, что выполнены равенства

$$A_0 = Q^{-1}AQ, \quad \xi = Q\gamma, \quad Q^*c = c_0, \tag{15}$$

здесь Q^* — транспонированная матрица.

Пусть функция $f(y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой. Уравнение (1) и систему (6) будем называть *эквивалентными*, если система (6) эквивалентна системе (3). В этом случае решения $y = y(t)$ и $x = x(t)$ уравнения (1) и системы (6) связаны, соответственно, равенствами

$$y(t) = (x(t), c), \quad x(t) = Q[\tilde{y}(t) - T\tilde{f}(y(t))]. \tag{16}$$

Сформулируем следующее полезное утверждение.

Лемма 3. *Пусть уравнение (1) и система (6) эквивалентны. Тогда имеет место равенство*

$$\det(A - pI) = (-1)^n L(p), \tag{17}$$

в котором $L(p)$ *— многочлен из (2).*

Справедливость равенства (17) следует из леммы 1 и из первого равенства в (15), означающего, что матрицы A и A_0 подобны.

Замечание 2. Пусть системы (3) и (6) эквивалентны. Тогда, в частности, матрицы A и A_0 подобны. В этом случае A_0 представляет собой (см., например, [3, § 1.1.4]) фробениусову нормальную форму матрицы A, состоящую из одного блока (фробениусовой клетки). Поэтому эквивалентность систем (3) и (6), в частности, означает, что матрица A приводима к фробениусовой форме, состоящей из одного блока. Указанная приводимость равносильна тому, что геометрические кратности всех собственных значений матрицы A равны единице (см. также приводимую ниже теорему 6). Матрица A приводима, если все её собственные значения являются различными. Соответственно, если фробениусова нормальная форма матрицы A состоит из более чем одного блока, то системы (3) и (6) не являются эквивалентными.

2.2. О наблюдаемости систем. Рассмотрим систему (6). Определим квадратную (порядка n) матрицу

$$D(c) = \begin{bmatrix} c^* \\ c^*A \\ c^*A^2 \\ \vdots \\ c^*A^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

в которой вектор c^* и произведения c^*A^j рассматриваются как вектор-строки. Матрица D называется (см., например, [1, § 2.3; 3, § 1.3.3]) *матрицей наблюдаемости* системы (6). Система (6) называется *наблюдаемой*, если $\det D(c) \neq 0$.

Обратим внимание, что система (3) является наблюдаемой.

3. Решение задачи Z1. Отметим сначала, что не для любой системы вида (6) задача Z1 имеет решение. Простым примером является система

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 + x_2^2,$$

для которой имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(y) = y^2.$$

Рассматриваемая система не может быть эквивалентна никакому уравнению вида $y'' + a_1y' + + a_2y = b_0(y^2)' + b_1y^2$. Действительно, в силу леммы 3 указанная система может быть эквивалентна только уравнению вида $y'' - 2y' + y = b_0(y^2)' + b_1y^2$. Но в этом случае соответствующая фробениусова матрица A_0 должна иметь вид

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для матриц A и A_0 ни при какой невырожденной матрице Q не может выполняться первое из равенств (15), участвующих в определении эквивалентности.

Приведем критерий эквивалентности систем (3) и (6).

Теорема 1. *Пусть функция $f(y)$ является непрерывно дифференцируемой. Системы (3) и (6) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (6) является наблюдаемой и выполнены равенства*

$$A_0 = DAD^{-1}, \quad \gamma = D\xi, \tag{19}$$

здесь $D = D(c)$ — матрица наблюдаемости системы (6).

Пусть системы (3) и (6) эквивалентны. Тогда система (6) приводима к системе (3) невырожденной заменой переменных $z = Dx$.

Прежде чем привести доказательство теоремы 1, отметим, что в соотношениях (19) отсутствует третье из равенств (15), используемых в определении эквивалентности систем (3) и (6). Это связано с тем, что верна

Лемма 4. *Имеет место равенство $S^*c = c_0$, здесь $S = D^{-1}$.*

Это равенство (или равносильное ему $(S^*)^{-1}c_0 = c$) следует из соотношений $(S^*)^{-1} = D^*$ и $D^*c_0 = c$.

Доказательство теоремы 1. Достаточность следует из равенств (19) и леммы 4.

Необходимость. Пусть системы (3) и (6) эквивалентны. Требуется тогда показать, что система (6) является наблюдаемой и выполнены равенства (19).

Установим сначала, что система (6) является наблюдаемой, т.е. матрица (18) невырождена. Как было отмечено выше, система (3) является наблюдаемой, т.е. матрица $D(c_0)$ невырождена или (что равносильно) векторы

$$c_0^*, \quad c_0^*A_0, \quad c_0^*A_0^2, \quad \ldots, \quad c_0^*A_0^{n-1}$$

линейно независимы. Эти векторы нам удобно представить в виде вектор-столбцов:

$$c_0, \quad A_0^*c_0, \quad (A_0^*)^2c_0, \quad \ldots, \quad (A_0^*)^{n-1}c_0. \tag{20}$$

Так как системы (3) и (6) эквивалентны, то существует невырожденная матрица Q такая, что выполнены равенства (15). Несложно видеть, что матрица $(Q^*)^{-1}$ переводит набор векторов (20) в набор

$$c, \quad A^*c, \quad (A^*)^2c, \quad \ldots, \quad (A^*)^{n-1}c,$$

который образует линейно независимую систему. Это равносильно невырожденности матрицы (18). Таким образом, система (6) является наблюдаемой.

Покажем теперь справедливость равенства $A_0 = DAS$, здесь $S = D^{-1}$. Замена $x = Sz$ приводит систему (6) к эквивалентной системе

$$z' = DASz + D\xi f(y), \quad y = (z, S^*c) = (z, c_0). \tag{21}$$

Далее для упрощения изложения ограничимся рассмотрением случая $n = 3$. Тогда в силу соотношения (17) имеем

$$-\det(A_0 - pI) = p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3. \tag{22}$$

Равенство $z = Dx$ принимает вид

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^* \\ c^*A \\ c^*A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$z_1 = (c, x), \quad z_2 = (A^*c, x), \quad z_3 = ((A^*)^2c, x),$$

откуда находим

$$z_1' = (c, x') = (c, Ax + \xi f(y)) = (A^*c, x) + (c, \xi)f(y) = z_2 + (c, \xi)f(y),$$

$$z_2' = (A^*c, x') = (A^*c, Ax + \xi f(y)) = ((A^*)^2c, x) + (A^*c, \xi)f(y) = z_3 + (A^*c, \xi)f(y),$$

$$z_3' = ((A^*)^2c, x') = ((A^*)^2c, Ax + \xi f(y)) = ((A^*)^3c, x) + ((A^*)^2c, \xi)f(y) = \\ = ((A^*)^3c, Sz) + ((A^*)^2c, \xi)f(y).$$

С учётом этого система (21) в развёрнутом виде записывается следующим образом:

$$z_1' = z_2 + (c, \xi)f(y), \quad z_2' = z_3 + (A^*c, \xi)f(y), \\ z_3' = ((A^*)^3c, Sz) + ((A^*)^2c, \xi)f(y). \tag{23}$$

Представим линейный функционал $((A^*)^3c, Sz)$ в виде $((A^*)^3c, Sz) = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3$ с некоторыми коэффициентами β_1, β_2, β_3. Тогда матрица DAS и вектор $D\xi$ в системе (21) или (что равносильно) в системе (23) имеют вид

$$DAS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, \qquad D\xi = \begin{bmatrix} (c, \xi) \\ (A^*c, \xi) \\ ((A^*)^2c, \xi) \end{bmatrix}.$$

Но так как $S = D^{-1}$, то матрицы A и $\tilde{B} = DAS$ подобны и, следовательно, характеристические многочлены этих матриц должны быть одинаковы, т.е. $a_1 = -\beta_3$, $a_2 = -\beta_2$, $a_3 = -\beta_1$ (см. (22)). Отсюда следует, что матрица $\tilde{B}$ совпадает с определённой равенством (4) матрицей A_0 (при $n = 3$), т.е. имеет место соотношение $A_0 = DAS$.

Одновременно было показано, что решения $x(t)$ и $z(t)$ систем (6) и (3) связаны равенством $z_1(t) = (x(t), c)$, где $z_1(t)$ — первая компонента вектор-функции $z(t)$. Таким образом, система (6) эквивалентна и системе (3), и системе (21), которые отличаются только векторами γ и $D\xi$, поэтому $\gamma = D\xi$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть системы (3) и (6) эквивалентны. Тогда в равенствах (15) следует полагать $Q = D^{-1}$; здесь $D = D(c)$. Другими словами, замена $x = D^{-1}z$ преобразует систему (6) в систему (3) и, следовательно, верны равенства*

$$A_0 = DAD^{-1}, \quad \xi = D^{-1}\gamma, \quad (D^{-1})^*c = c_0.$$

3.1. Об эквивалентности уравнения (1) и системы (6). Пусть системы (3) и (6) эквивалентны и пусть функция $f(y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой. Тогда уравнение (1) и система (6) тоже эквивалентны. Это означает, что каждому вектору $\tilde{y}_0 = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ соответствует вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что соответствующие решения $y = y(t)$ и $x = x(t)$ уравнения (1) и системы (6) связаны равенствами (16), которые принимают вид

$$y(t) = (x(t), c), \quad \tilde{y}(t) = D(c)x + T\tilde{f}(y(t)),$$

где $D(c)$ — матрица (18), T — матрица (14).

Отсюда и из теоремы 1 вытекает основное утверждение для задачи Z1.

Теорема 2. *Пусть функция $f(y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой. Уравнение (1) и система (6) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (6) является наблюдаемой и выполнены равенства (19).*

Пусть уравнение (1) и система (6) эквивалентны. Тогда система (6) приводима к уравнению (1) заменой переменных
$$x = D^{-1}[\tilde{y} - T\tilde{f}(y)],$$
здесь T — матрица (14), а $\tilde{y}$ и $\tilde{f}(y)$ — векторы из (13).

3.2. Конструирование эквивалентного скалярного уравнения (1). Пусть система (6) является наблюдаемой и выполнены равенства (19). Тогда в соответствии с теоремой 2 система (6) эквивалентна некоторому скалярному уравнению вида (1). Опишем схему конструирования такого уравнения. Очевидно, что достаточно построить соответствующие многочлены $L(p)$ и $M(p)$ (см. равенства (2)):

1) многочлен $L(p)$ определяется по формуле (17);

2) по матрице наблюдаемости $D = D(c)$ и вектору ξ системы (6) строится вектор $\gamma = D\xi$;

3) по формулам (5) вычисляются коэффициенты b_j многочлена $M(p)$ и, следовательно, определяется сам многочлен $M(p)$.

3.3. Пример 1. В качестве иллюстрации рассмотрим трехмерную систему
$$x' = Ax + \xi f((x, c)), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{24}$$
в которой ξ и c — некоторые фиксированные векторы из $\mathbb{R}^3$, а матрица A имеет вид
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Изучим вопрос о том, при каких значениях вектора c система (24) сводится к эквивалентному скалярному дифференциальному уравнению (1).

Предположим сначала, что при некотором векторе $c = (c_1, c_2, c_3)$ такое сведение возможно. Тогда, так как характеристический многочлен матрицы A равен $\det(A - pI) = -(p^3 + 7p^2 + 14p + 8)$, в силу леммы 3 соответствующее эквивалентное уравнение будет иметь вид
$$y''' + 7y'' + 14y' + 8y = b_0(f(y))'' + b_1(f(y))' + b_2 f(y) \tag{25}$$
с неизвестными (пока) коэффициентами b_0, b_1, b_2. Другими словами, в указанном случае система (24) будет сводиться к одному уравнению (25) третьего порядка относительно неизвестной функции $y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$.

Исследуем теперь указанный вопрос на основе теорем 1 и 2. Имеем
$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad A^*c = \begin{bmatrix} c_2 - c_1 \\ -2c_2 \\ -4c_3 \end{bmatrix}, \quad (A^*)^2c = \begin{bmatrix} c_1 - 3c_2 \\ 4c_2 \\ 16c_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица (18) здесь запишется как
$$D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 - c_1 & -2c_2 & -4c_3 \\ c_1 - 3c_2 & 4c_2 & 16c_3 \end{bmatrix},$$
тогда $\det D(c) = -6c_2c_3(c_1 + c_2)$.

Таким образом, в силу теоремы 2 система (24) сводится к одному уравнению (25) третьего порядка относительно функции $y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ тогда и только тогда, когда $c_2c_3(c_1 + c_2) \neq 0$. В частности, система (24) не может быть сведена к уравнению (25) относительно одной из координат x_1, x_2 или x_3 вектора x, так как для этого в качестве вектора c следует брать $c=(1,0,0)$, $c=(0,1,0)$ или $c=(0,0,1)$ соответственно; но тогда $\det D(c)=0$.

Вместе с тем если взять некоторые комбинации координат x_1, x_2 и x_3, то это становится возможным. Пусть, например, $c=(1,-2,1)$. В этом случае имеем

$$D=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -4 \\ 7 & -8 & 16 \end{bmatrix} \tag{26}$$

и, следовательно, $\det D(c)=-12\neq 0$. Тогда в силу теоремы 2 система (24) при любом векторе ξ сводится к одному уравнению (25) относительно функции $y=x_1-2x_2+x_3$.

Пусть, например, $\xi=(1,0,0)$. Согласно теореме 1 векторы γ и ξ, участвующие в канонической системе (3) и системе (24), связаны равенством $\gamma=D\xi$. Отсюда получим $\gamma=(1,-3,7)$. Следовательно, коэффициенты b_0, b_1, b_2 в правой части уравнения (25) равны (см. формулы (5)) $b_0=1$, $b_1=4$, $b_2=0$. Таким образом, уравнение (25) принимает вид

$$y'''+7y''+14y'+8y=(f(y))''+4(f(y))'. \tag{27}$$

Для конструирования замены, приводящей систему (24) к эквивалентному уравнению (27), воспользуемся теоремой 2. Согласно этой теореме соответствующая замена определяется равенством $x=D^{-1}[\tilde y-T\tilde f(y)]$, в котором, в соответствии с формулами (13), (14) и (26),

$$\tilde y=\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix}, \quad \tilde f(y)=\begin{bmatrix} f(y) \\ (f(y))' \end{bmatrix},$$

$$D^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 32 & 24 & 4 \\ 20 & 9 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad T=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Линейная задача. Задача Z1 изучалась для нелинейной системы (6), которая становится линейной при $\xi=0$, т.е. когда она принимает вид

$$x'=Ax, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{28}$$

где A — квадратная (порядка n) матрица.

Конечно, система (28) является частным случаем системы (6) и поэтому полученные выше результаты переносятся и на линейную задачу. Однако в силу важности линейной постановки, а также с учётом того, что линейная задача имеет свои особенности, полезно привести и некоторые результаты, относящиеся к системе (28).

Задача Z1 в линейной постановке может быть сформулирована как задача об условиях, при выполнении которых линейную систему (28) можно преобразовать к эквивалентному скалярному линейному дифференциальному уравнению вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0. \tag{29}$$

В более полной формулировке вопрос состоит в следующем. Можно ли с помощью какой-либо линейной замены свести n-мерную систему (28) к эквивалентному уравнению n-го порядка вида (29), в котором роль неизвестного y играет линейная комбинация (x,c), где $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ — некоторый ненулевой вектор.

Замечание 3. В нелинейной постановке задачи Z1 вектор c прямо указан в исходной системе (6), а в линейной постановке это не так, поэтому естественно рассматривать два варианта постановки задачи:

1. Вектор c задаётся и для этого вектора решается задача Z1. Такую постановку будем называть *задачей L1*.

Здесь особый интерес вызывает вопрос о том, можно ли систему (28) свести к эквивалентному уравнению (29), в котором роль неизвестного y играет какая-либо координата x_j вектора x, например, первая координата x_1 (в этом случае полагаем $c = (1, 0, \ldots, 0)$).

2. Вектор c следует определить. В этой постановке требуется выяснить, существует ли ненулевой вектор c такой, что систему (28) можно свести к эквивалентному уравнению (29), в котором роль неизвестного y играет функция $y = (x, c)$. Такую постановку будем называть *задачей L2*.

Соответственно и понятие эквивалентности системы (28) и уравнения (29) можно рассматривать в двух вариантах.

Прежде чем сформулировать это понятие отметим, что, как и в нелинейной задаче, переход от уравнения (29) к системе вида (28) несложен. Он может быть осуществлен, например, с помощью замены

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad \ldots, \quad z_n = y^{(n-1)},$$

которая приводит уравнение (29) к линейной системе

$$\frac{dz}{dt} = A_0 z, \quad z \in \mathbb{R}^n; \tag{30}$$

здесь A_0 — матрица, определённая в (4). В этом случае решения уравнения (29) и системы (30) связаны равенством $y(t) = (z(t), c_0)$, где $c_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$.

В случае задачи L1 будем говорить, что для заданного вектора c уравнение (29) и система (28) *эквивалентны*, если существует невырожденная матрица Q такая, что замена $x = Qz$ преобразует систему (28) в систему (30), при этом выполнено равенство $Q^*c = c_0$. Другими словами, существует невырожденная матрица Q такая, что выполнены соотношения

$$A_0 = Q^{-1}AQ, \quad Q^*c = c_0.$$

В этом случае решения $y = y(t)$ и $x = x(t)$ уравнения (29) и системы (28) связаны, соответственно, равенствами

$$y(t) = (x(t), c), \quad x(t) = Q\tilde{y}(t).$$

В случае задачи L2 будем говорить, что уравнение (29) и система (28) *эквивалентны*, если существует ненулевой вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, для которого уравнение (29) и система (28) эквивалентны.

Прежде чем переходить к обсуждению задач L1 и L2, отметим, что из теоремы 2 и леммы 3 следует

Теорема 3. *Пусть уравнение (29) и система (28) эквивалентны. Тогда уравнение (29) — это уравнение* $L(d/dt)y = 0$, *где* $L(p) = (-1)^n \det(A - pI)$.

Другими словами, системе (28) может соответствовать единственный вид эквивалентного уравнения (29): этот вид определяется характеристическим многочленом матрицы A.

4.1. Задача L1. Пусть задан ненулевой вектор c. Определим в соответствии с равенством (18) матрицу $D = D(c)$ наблюдаемости системы (28).

Для решения задачи L1 применимы полученные выше результаты (с естественными модификациями). Ограничимся здесь приведением аналогов теорем 1 и 2.

Теорема 4. *Уравнение (29) и система (28) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (28) является наблюдаемой и выполнено равенство* $A_0 = DAD^{-1}$.

Теорема 5. *Пусть уравнение (29) и система (28) эквивалентны. Тогда система (28) приводима к уравнению (29) заменой переменных* $x = D^{-1}\tilde{y}$.

4.2. Задача L2. Справедлива следующая

Теорема 6. *Задача L2 разрешима тогда и только тогда, когда геометрические кратности всех собственных значений матрицы A равны единице.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача L2 разрешима, т.е. существует ненулевой вектор $\tilde{c}$ такой, что матрица $D(\tilde{c})$, определённая равенством (18), обратима и, следовательно, система (28) эквивалентна уравнению (29), в котором роль неизвестного y играет функция $y = (x, \tilde{c})$. Требуется показать, что тогда геометрические кратности всех собственных значений матрицы A равны единице. Допустим противное, т.е. пусть геометрическая кратность некоторого собственного значения λ_0 матрицы A больше единицы. Тогда и у транспонированной матрицы A^* геометрическая кратность собственного значения $\bar{\lambda}_0$ больше единицы. Для упрощения пусть указанная геометрическая кратность равна двум, т.е. существуют два линейно независимых вектора e_1 и e_2, так что $A^*e_1 = \bar{\lambda}_0 e_1$ и $A^*e_2 = \bar{\lambda}_0 e_2$.

Вектор $\tilde{c}$ единственным образом представляется в виде $\tilde{c} = k_1e_1 + k_2e_2 + g$, где k_1 и k_2 — некоторые коэффициенты, а g — вектор, являющийся линейной комбинацией остальных собственных и присоединённых векторов матрицы A^*. Нетрудно видеть, что тогда векторы $\tilde{c}$, $A^*\tilde{c}$, $(A^*)^2\tilde{c}$, $\ldots$, $(A^*)^n\tilde{c}$ линейно зависимы, т.е. матрица $D(\tilde{c})$, определённая равенством (18), вырождена, что противоречит исходному предположению. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть геометрические кратности всех собственных значений матрицы A равны единице. Требуется показать, что тогда задача L2 разрешима. У транспонированной матрицы A^* геометрические кратности всех собственных значений также равны единице. Пусть e_1, e_2, $\ldots$, e_n — базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, образованный собственными и присоединёнными векторами матрицы A^*. Положим $\tilde{c} = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$. Нетрудно видеть, что тогда векторы $\tilde{c}$, $A^*\tilde{c}$, $(A^*)^2\tilde{c}$, $\ldots$, $(A^*)^n\tilde{c}$ линейно независимы, т.е. матрица $D(c_0)$, определённая равенством (18), невырождена. Достаточность доказана.

Одновременно была предложена схема конструирования вектора $\tilde{c}$, для которого задача L2 разрешима.

5. Гамильтоновы системы: вспомогательные сведения. Прежде чем перейти к обсуждению задачи Z2, приведём необходимые сведения из теории гамильтоновых систем (см., например, [6, 7]).

Автономной гамильтоновой системой называют динамическую систему, описываемую уравнением

$$x' = J\nabla H(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n},$$

в котором матрица J и вектор $\nabla H(x)$ определяются равенствами (10).

Линейной автономной гамильтоновой системой (ЛАГС) называют систему вида

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{31}$$

в которой A — вещественная квадратная симметрическая (порядка $2n$) матрица. Гамильтониан этой системы равен $H(x) = (Ax, x)/2$.

Ниже участвующую в системе (31) матрицу JA будем называть *гамильтоновой*. Отметим следующие свойства гамильтоновой матрицы JA:

G1) если матрица JA имеет собственное значение λ, то числа $-\lambda$, $\overline{\lambda}$, $-\overline{\lambda}$ также являются собственными значениями этой матрицы, причём той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса;

G2) если матрица JA имеет собственное значение $\lambda = 0$, то алгебраическая кратность этого собственного значения является чётным числом;

G3) характеристический многочлен матрицы JA содержит степени только чётных порядков.

Отметим также, что каждая гамильтонова матрица входит в один и только один класс эквивалентности симплектически подобных матриц. При этом в каждом таком классе выделяют один представитель, называемый *нормальной формой*. Вид нормальной формы определяется свойствами корневых подпространств матрицы JA. Более детально с теорией нормальных форм и, в частности, со списками нормальных форм можно ознакомиться в работах [7, § 7.2; 11, § 2.6; 12].

Одной из специфик нормальных форм является тот факт, что данному набору собственных значений с данными кратностями могут соответствовать различные нормальные формы. Указанные свойства гамильтоновых матриц определяют многие важные качественные характеристики гамильтоновых систем (линейных и нелинейных), такие как свойства сильной устойчивости, устойчивость в линейной и нелинейной постановках и др. (см., например, [12, 13]).

Для иллюстрации указанного факта рассмотрим гамильтоновы матрицы четвёртого порядка, имеющие две пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_1 i$ и $\pm\omega_2 i$ (здесь $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$). В этом случае имеются два вида нормальных форм:

$$JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{здесь } \sigma = 1 \text{ или } \sigma = -1. \tag{32}$$

В случае $\sigma = 1$ говорят, что числа $\omega_1 i$ и $\omega_2 i$ являются собственными значениями первого рода, а при $\sigma = -1$ – собственными значениями первого и второго рода соответственно. Отметим, что не существует симплектических преобразований, переводящих нормальную форму при $\sigma = 1$ в нормальную форму при $\sigma = -1$.

Как будет показано ниже, отмеченный факт может приводить к тому, что задача конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1), (7), (8) может иметь качественно различные решения, а именно приводить к гамильтоновым системам вида (31) с различными нормальными формами.

6. Задача Z2: вспомогательная система. Рассмотрим задачу построения для дифференциального уравнения (1), (7), (8) эквивалентной гамильтоновой системы вида (11).

На первом этапе построим вспомогательную систему, а именно в соответствии с указанными в лемме 2 формулами (12) перейдём от уравнения (1), (7), (8) к эквивалентной системе вида (3):

$$z' = A_0 z + \gamma f(y), \quad y = (z, c_0), \tag{33}$$

в которой $z, c_0, \gamma \in \mathbb{R}^{2n}$; запись (z, c_0) обозначает скалярное произведение векторов; A_0, c_0 и γ — соответственно матрица и векторы

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & -a_{n-1} & 0 & \dots & -a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \gamma_4 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

при этом координаты вектора γ определяются равенствами

$$\gamma_2 = \gamma_4 = ... = \gamma_{2n-2m-2} = 0, \quad \gamma_{2n-2m} = b_0,$$
$$\gamma_{2n-2m+2} + \gamma_{2n-2m} a_1 = b_1, \quad \dots, \quad \gamma_{2n} + \gamma_{2n-2} a_1 + \dots + \gamma_{2n-2m} a_m = b_m.$$

Переход от уравнения (1), (7), (8) к системе (33) осуществляется заменой

$$z = \tilde{y} - T\tilde{f}(y),$$

где T — прямоугольная $2n \times (2n-2)$-матрица

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ \gamma_{2n-2} & 0 & \gamma_{2n-4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2n-2} & 0 & \gamma_{2n-4} & \dots & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix},$$

$\tilde{y}$ и $\tilde{f}(y)$ — векторы

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(2n-1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}(y) = \begin{bmatrix} f(y) \\ (f(y))' \\ (f(y))'' \\ \vdots \\ (f(y))^{(2m-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

при этом вектор $\tilde{f}(y)$ имеет размерность $2n-2$. В этих формулах производные $y^{(k)}$ и $(f(y))^{(k)}$ вычисляются по t от заданной функции $y = y(t)$ и от $f(y(t))$ соответственно.

Теорема 7. *Система (33) является гамильтоновой только при $n = 1$, т.е. когда уравнение (1), (7), (8) является простейшим вида $y'' + a_1 y = b_0 f(y)$. При $n \geqslant 2$ система (33) уже не является гамильтоновой.*

Справедливость этой теоремы вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5. *Система*

$$J\nabla H(z) = A_0 z + \gamma f((z, c_0)), \quad z \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{35}$$

разрешима относительно неизвестной функции $H(z)$ тогда и только тогда, когда $n = 1$.

Справедливость этой леммы устанавливается перекрёстным дифференцированием уравнений системы (35), а именно: при $n \geqslant 2$ следует продифференцировать первое уравнение по z_{2n}, а n-е уравнение — по z_{n+1}; тогда получим противоречие: вычисленная производная $\partial^2 H/(\partial z_{n+1}\partial z_{2n})$ в первом случае равна нулю, а во втором — единице. При $n = 1$ система (35) является двумерной; перекрестное дифференцирование уравнений этой системы даёт нуль в обоих случаях и, следовательно, система (35) разрешима.

Ниже будем предполагать, что $n \geqslant 2$.

7. Задача Z2: основное утверждение.

7.1. Вспомогательные построения. Обсудим задачу конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1), (7), (8).

Так как многочлен $L(p)$ содержит степени только чётных порядков, то корни уравнения $L(p) = 0$ обладают свойствами, аналогичными свойствам G1) и G2) гамильтоновых матриц. Поэтому многочлену $L(p)$ с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько соответствующих нормальных форм с тем же набором собственных значений.

На первом этапе по корням уравнения $L(p) = 0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA.

На втором этапе задаётся ненулевой вектор $c \in \mathbb{R}^{2n}$ и линейная гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad y = (x(t), c). \tag{36}$$

Пусть эта система наблюдаема и $D = D(c)$ — соответствующая матрица наблюдаемости.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть функция* $f(y)$ *является* $2m$ *раз непрерывно дифференцируемой. Пусть линейная система (36) наблюдаема. Тогда замена*

$$x = (D(c))^{-1}[\tilde{y} - T\tilde{f}(y)] \tag{37}$$

осуществляет переход от уравнения (1), (7), (8) к системе

$$x' = JAx + \xi f(y), \quad y = (x, c), \tag{38}$$

в которой матрица JA *— это выбранная нормальная форма,* $\xi = (D(c))^{-1}\gamma$.

Отметим также, что уравнение (1), (7), (8) и система (38) эквивалентны. Однако получаемая при замене (37) нелинейная система (38) совсем не обязательно будет гамильтоновой.

Напомним, что вектор c выбирался из единственного условия наблюдаемости линейной системы (36). Это, вообще говоря, предоставляет большую свободу в выборе вектора c. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях на вектор c нелинейная система (38) уже будет гамильтоновой, т.е. верна

Лемма 7. *Пусть функция* $f(y)$ *является* $2m$ *раз непрерывно дифференцируемой. Пусть вектор* c *выбран с учётом двух требований:*

а) линейная система (36) наблюдаема;

б) при некотором вещественном α *выполняется равенство*

$$\gamma = \alpha D(c) Jc, \tag{39}$$

в котором $D(c)$ *– матрица наблюдаемости системы (36),* γ *— вектор из (34),* J *— матрица (10).*

Тогда замена (37) приводит нелинейное уравнение (1), (7), (8) к системе (38), которая является гамильтоновой, при этом функция

$$H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \alpha F((x, c)) \tag{40}$$

является её гамильтонианом. Здесь $F(y)$ *— первообразная функции* $f(y)$, *т.е.* $F'(y) = f(y)$.

Справедливость леммы 7 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 8. *Система*

$$J\nabla H(x) = JAx + \xi f((c, x)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{41}$$

разрешима относительно неизвестной функции $H(x)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что функция (40) является решением системы (41). Действительно, для функции (40) имеем

$$J\nabla H(x) = JAx + \alpha J\nabla F((x, c)),$$

поэтому остаётся установить справедливость равенства

$$\alpha J\nabla F((x, c)) = \xi f((c, x)).$$

Имеем $\nabla F((x, c)) = f((c, x))c$, отсюда $J\nabla F((x, c)) = f((c, x))Jc$. Таким образом, следует показать справедливость равенства $\alpha Jc = \xi$, которое следует из (39) и равенства $\xi = D^{-1}\gamma$ (см. лемму 6). Лемма доказана.

Доказательство леммы 7. В силу леммы 6 замена (37) преобразует уравнение (1), (7), (8) к системе (38). Поэтому остаётся убедиться в том, что функция (40) является гамильтонианом системы (38), а этот факт следует из леммы 8.

Замечание 4. Равенство (39) в развёрнутом виде сводится к системе из n линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных αc_1^2, αc_2^2, $\ldots$, αc_{2n}^2 с параметром α.

В указанные уравнения входят и коэффициенты, определяющие вид выбранной нормальной формы. Это может приводить к тому, что только при одном выборе нормальной формы система уравнений (39) имеет решение. Другими словами, в нелинейной задаче, в отличие от линейной постановки (см. ниже в п. 9), вид нормальной формы конструируемой гамильтоновой системы может определяться однозначно.

7.2. Основное утверждение. Подытожим полученные результаты в виде отдельного утверждения.

Теорема 8. *Пусть функция $f(y)$ является $2m$ раз непрерывно дифференцируемой. Пусть в соответствии со свойствами корней уравнения $L(p)=0$ выбрана одна из возможных нормальных форм JA. Пусть вектор c выбран таким образом, чтобы:*

1) линейная система (36) была наблюдаема;

2) выполнялось равенство (39) при некотором α.

Тогда замена (37) приводит уравнение (1), (7), (8) к эквивалентной гамильтоновой системе (38) с гамильтонианом (40).

8. Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'''' + 5y'' + 4y = (f(y))'' + 3f(y), \tag{42}$$

в котором $f(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Оно является уравнением вида (1), (7), (8), в котором

$$L(p) = p^4 + ap^2 + b, \quad M(p) = b_0p^2 + b_2.$$

В этих многочленах $a=5$, $b=4$, $b_0=1$ и $b_2=3$.

Отметим, что определенный в (34) вектор γ здесь равен $\gamma = \begin{bmatrix}0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_4\end{bmatrix}^T$ при $\gamma_2 = 1$ и $\gamma_4 = -2$. Отметим также, что все четыре корня характеристического уравнения $\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$ являются чисто мнимыми вида $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, где $\omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 1$.

Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (42) эквивалентной гамильтоновой системы вида (38):

$$x' = JAx + \xi f(y), \quad y = (x, c), \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{43}$$

используя теорему 8.

Выше было отмечено, что многочлену $L(p)$ соответствуют две различные нормальные формы JA системы (43), а именно матрицы (32) при $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$.

В качестве вектора c будем рассматривать вектор $c = (c_1, c_2, 0, 0)$ такой, что $c_1c_2 \neq 0$. В этом случае матрица (18) имеет вид

$$D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 c_1 & \sigma\omega_2 c_2 \\ -\omega_1^2 c_1 & -\sigma\omega_2^2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^3 c_1 & -\sigma\omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Тогда

$$\det D(c) = \begin{cases} -c_1^2c_2^2\omega_1\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2, & \text{если } \sigma = 1, \\ c_1^2c_2^2\omega_1\omega_2(\omega_1^4 - \omega_2^4), & \text{если } \sigma = -1, \end{cases} \tag{45}$$

и, следовательно, $\det D(c) \neq 0$ при $c_1c_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$. Таким образом, матрица $D(c)$ обратима, а значит, система (43) наблюдаема.

Остаётся обеспечить выполнение условия 2) теоремы 8, т.е. выбрать вектор c таким, чтобы выполнялось равенство (39). Это равенство в рассматриваемом примере сводится к системе двух уравнений

$$\alpha(\omega_1c_1^2 + \sigma\omega_2c_2^2) = -\gamma_2, \quad \alpha(\omega_1^3c_1^2 + \sigma\omega_2^3c_2^2) = \gamma_4$$

относительно неизвестных αc_1^2 и αc_2^2. Отсюда получим

$$\alpha c_1^2 = \frac{\omega_2^2\gamma_2+\gamma_4}{\omega_1(\omega_1^2-\omega_2^2)}, \quad \alpha c_2^2 = -\frac{\omega_1^2\gamma_2+\gamma_4}{\sigma\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}.$$

Отметим, что в силу взаимной простоты многочленов $L(p)$ и $M(p)$ имеем

$$(\omega_1^2\gamma_2+\gamma_4)(\omega_2^2\gamma_2+\gamma_4)\neq 0,$$

поэтому $\alpha\neq 0$ и

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 = -\sigma\frac{\omega_2}{\omega_1}\kappa, \quad \kappa = \frac{\omega_2^2\gamma_2+\gamma_4}{\omega_1^2\gamma_2+\gamma_4} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Таким образом, уравнение (39) разрешимо только при $\sigma=1$. Тогда вид нормальной формы (32) определяется однозначно: в ней следует положить $\sigma=1$. Числа c_1, c_2, α здесь имеют следующие значения: $c_1=1$, $c_2=2$, $\alpha=-1/6$.

Следовательно, по теореме 8 замена (37) (в которой $D(c)$ — матрица (44) при $\omega_1=2$, $\omega_2=1$, $\sigma=1$, $c_1=1$, $c_2=2$) приводит уравнение (42) к эквивалентной гамильтоновой системе вида (43), в которой JA – матрица (32) при $\omega_1=2$, $\omega_2=1$ и $\sigma=1$, а вектор $\xi=(D(c))^{-1}\gamma=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/6 & 1/3\end{bmatrix}^T$. Гамильтониан этой системы равен

$$H(x) = \frac{1}{2}(2x_1^2+x_2^2+2x_3^2+x_4^2) - \frac{1}{6}F(x_1+2x_2).$$

9. Линейная задача: гамильтоновы системы. Обсудим теперь задачу конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для линейного уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y=0, \tag{46}$$

в котором $L(p)$ — многочлен (7). Конечно, уравнение (46) является частным случаем уравнения (1), (7), (8) и, следовательно, полученные выше результаты переносятся и на линейную задачу. Однако линейная задача имеет свои особенности, поэтому полезно привести и некоторые результаты, относящиеся к уравнению (46).

Уравнение (46) стандартной заменой $z_1=y$, $z_2=y'$, $\ldots$, $z_{2n}=y^{(2n-1)}$ сводится к эквивалентной системе

$$z'=A_0z, \quad y=(z,c_0), \tag{47}$$

в которой матрица A_0 и вектор c_0 определены первыми двумя равенствами в (34). В соответствии с теоремой 7 система (47) является гамильтоновой только при $n=1$, т.е. когда уравнение (46) является простейшим вида $y''+a_1y=0$. При $n\geqslant 2$ система (47) уже не является гамильтоновой. Таким образом, переход от уравнения (46) к системе (47) при $n\geqslant 2$ не решает задачу Z2.

Как и в общем нелинейном случае, на первом этапе по корням уравнения $L(p)=0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA. На втором этапе задаётся ненулевой вектор $c\in\mathbb{R}^{2n}$ и гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt}=JAx, \quad y=(x(t),c). \tag{48}$$

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 9. *Уравнение (46) и гамильтонова система (48) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (48) наблюдаема.*

Эта теорема может быть дополнена следующим утверждением, справедливость которого следует из теоремы 2. Положим $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y & y' & \cdots & y^{(2n-1)} \end{bmatrix}^T$, здесь $y^{(k)}$ — производные заданной скалярной функции $y = y(t)$.

Теорема 10. *Пусть в соответствии со свойствами корней уравнения $L(p) = 0$ выбрана одна из возможных нормальных форм JA. Пусть вектор c выбран таким образом, что система (48) наблюдаема. Тогда замена $x = D^{-1}\tilde{y}$ (здесь $D = D(c)$ — матрица наблюдаемости системы (48)) приводит уравнение (46) к эквивалентной гамильтоновой системе (48). При этом матрицы A_0 и JA связаны равенством $A_0 = D(JA)D^{-1}$.*

Замечание 5. В соответствии с теоремами 9 и 10 задача построения для уравнения (46) эквивалентной гамильтоновой системы в нормальной форме может иметь более одного решения. Другими словами, уравнение (46) линейными невырожденными преобразованиями может сводиться к качественно различным гамильтоновым системам вида (48) в том смысле, что соответствующие гамильтоновы матрицы входят в разные классы эквивалентности симплектически подобных матриц.

Отметим также, что задача построения для уравнения (46) эквивалентной гамильтоновой системы с конкретной нормальной формой может не иметь решения. Такая ситуация возникает, например, когда уравнение $L(p) = 0$ имеет кратные корни. В этом случае уравнению (46) могут соответствовать такие варианты нормальных форм гамильтоновых матриц, для которых соответствующая система не является наблюдаемой при любом векторе c.

10. Пример 3. В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение Лурье четвёртого порядка

$$y'''' + ay'' + by = 0, \tag{49}$$

в котором вещественные коэффициенты a и b удовлетворяют условиям $a > 0$, $b > 0$, $d = a^2 - 4b > 0$. В этом случае все четыре корня характеристического уравнения $\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$ различные и чисто мнимые вида $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, где числа $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ являются корнями уравнения $\omega^4 - a\omega^2 + b = 0$.

Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (49) эквивалентной гамильтоновой системы. Воспользуемся предложенной выше схемой. В рассматриваемой задаче уравнению (49) могут соответствовать две различные нормальные формы искомой гамильтоновой системы, а именно матрицы (32) при $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. Покажем, что соответствующим выбором вектора $c \in \mathbb{R}^4$ можно получить две качественно различные ЛАГС вида (48), в которых матрица JA имеет вид нормальной формы (32), и которые будут эквивалентны уравнению (49) как при $\sigma = 1$, так и при $\sigma = -1$.

Пусть, например, $c = (c_1, c_2, 0, 0)$ — некоторый вектор такой, что $c_1c_2 \neq 0$. Покажем, что тогда уравнение (49) можно свести линейным невырожденным преобразованием к гамильтоновой системе вида (48).

Воспользуемся теоремой 9 для определения наблюдаемости системы (48), в которой JA имеет вид нормальной формы (32). Как и в примере 2, матрица $D(c)$ здесь имеет вид (44) и, следовательно (см. (45)), $\det D(c) \neq 0$ при $c_1c_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$. Отсюда матрица $D(c)$ обратима, а, следовательно, система (48) наблюдаема. Тогда по теореме 9 уравнение (49) и система (48) эквивалентны.

Таким образом, линейное уравнение (49) приводимо к двум качественно раздичным гамильтоновым представлениям (48) с нормальными формами (32). Конкретный выбор нормальной формы требует учёта дополнительной информации об объекте, описываемом уравнением (49).

Заключение. В статье исследуются два вопроса, связанные с построением эквивалентных дифференциальных уравнений в задачах теории управления и теории гамильтоновых систем. При обсуждении первого предложены новые подходы в задаче конструирования эквивалентных скалярных дифференциальных уравнений для многомерных нелинейных систем теории управления, изучены условия разрешимости соответствующих задач, предложены новые формулы перехода к эквивалентным уравнениям и системам. При обсуждении второго из указанных вопросов предложены новые подходы в задаче конструирования эквивалентных гамильтоновых систем для дифференциальных уравнений, содержащих производные только чётных порядков (уравнений Лурье). Эти подходы основаны на переходе от линейной части уравнения к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим исследованием полученной переопределённой системы.

Авторы выражают благодарность проф. Э.М. Мухамадиеву и проф. А.Б. Назимову за полезное обсуждение рассмотренных в настоящей статье вопросов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа финансировалась за счёт средств бюджета Уфимского университета науки и технологий. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М., 1985.
2. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М., 1970.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М., 2019.
4. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М., 2005.
5. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М., 1985.
6. *Meyer K., Hall G., Offin D.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. New York, 2009.
7. *Журавлев В.Ф., Петров Ф.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М., 2015.
8. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О гамильтоновости систем Лурье // Автоматика и телемеханика. 2000. № 8. С. 25–29.
9. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Исследование задачи о параметрическом резонансе в системах Лурье со слабоосциллирующими коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 2022. № 2. С. 107–121.
10. *Юмагулов М.Г., Беликова О.Н., Исанбаева Н.Р.* Бифуркации в окрестностях границ областей устойчивости точек либрации задачи трех тел // Астрономический журн. 2018. Т. 95. № 2. С. 158–168.
11. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М., 2005.
12. *Брюно А.Д.* Нормальные формы систем Гамильтона с периодическим возмущением. М., 2019 (Препринт / Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша; № 56).
13. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 178–195.

Уфимский университет науки и технологий

Поступила в редакцию 03.07.2023 г.
После доработки 10.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.