

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ
С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕСЯНА

© 2023 г. Б. Ю. Иргашев

Получено решение задачи Коши для одного вырождающегося уравнения с дробной производной Джрбашяна–Нерсесяна, частные решения которого представлены с помощью функции Килбаса–Сайго.

DOI: 10.31857/S0374064123120129, EDN: NWUWZQ

В последнее время интенсивно изучаются уравнения с производными дробного порядка с переменными коэффициентами. В работе [1] изучалось уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} x^{\beta} u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < b,$$

где $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq 0$, λ – спектральный параметр. В статье [2] были найдены решения в замкнутой форме уравнений дробного порядка

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) = ax^{\beta} y(x) + f(x), \quad 0 < x < d \leq \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

$$(D_{-}^{\alpha} y)(x) = ax^{\beta} y(x) + f(x), \quad 0 \leq d < x < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

с производными Римана–Лиувилля на полуоси $(0, \infty)$ (см. [3, с. 85]).

К таким уравнениям приводят многие прикладные задачи [4]. Примером является уравнение теории полярной географии [5]

$$(D_{0+}^{1/2} y)(x) = ax^{\beta} y(x) + x^{-1/2}, \quad x > 0, \quad -1/2 < \beta \leq 0,$$

возникающее при $a = -1$ в задачах диффузии [5].

Рассмотрим следующее уравнение:

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}} u(y) = \lambda y^s u(y), \quad y > 0, \quad \lambda, s \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}}$ – оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядка $\alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1 > 0$, ассоциированный с последовательностью

$$\{\gamma_k\}_0^m = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}, \quad \gamma_k \in (0, 1], \quad k = \overline{0, m},$$

определяемый соотношением [6]

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}} = D_{0y}^{\gamma_m-1} D_{0y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{0y}^{\gamma_1} D_{0y}^{\gamma_0},$$

D_{0y}^{γ} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка γ с началом в точке $y = 0$ [1, с. 9]:

$$D_{0y}^{\gamma} g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^y \frac{g(t) dt}{|y-t|^{1+\gamma}}, & \gamma < 0, \\ g(y), & \gamma = 0, \\ \left(\frac{d}{dy}\right)^p D_{0y}^{\gamma-p} g(y), & p-1 < \gamma \leq p, \quad p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В работе [6] рассмотрена задача Коши для уравнения

$$\sum_{k=0}^n a_k D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u(y) = f(y) \quad (2)$$

с переменными коэффициентами. Исследуемая задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Доказана теорема существования и единственности решения. В статье [7] в терминах функции Райта построено явное представление решения задачи Коши для уравнения (2). В статье [8] для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка вида (2) с производными Римана–Лиувилля была сформулирована и решена начальная задача.

В данной работе в терминах функции Килбаса–Сайго строится решение следующей задачи Коши (см. [6]).

Задача Коши. Найти функцию $u(y)$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:

- 1) $u(y) \in L_1[0, l]$, $0 < l < +\infty$;
- 2) $D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_j\}} u(y) \in AC[0, l]$, $0 \leq j \leq m-1$;
- 3) $D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}} u(y) = \lambda y^s u$, $y > 0$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0\}} u(y) = A_0$, $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1\}} u(y) = A_1$, $\dots$, $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}\}} u(y) = A_{m-1}$, здесь A_i , $i = \overline{0, m-1}$, – заданные константы.

Теорема. Пусть $\alpha > 0$, $\gamma_0 + \gamma_m + s > 1$. Тогда задача Коши имеет единственное решение.

Доказательство. Решение задачи будем искать в виде

$$u(y) = \sum_{k=0}^{m-1} d_k u_k(y), \quad (3)$$

где d_k – произвольные постоянные и

$$u_k(y) = y^{\alpha_k} E_{\alpha, (\alpha+s)/\alpha, (\alpha_k+s)/\alpha}(\lambda y^{\alpha+s}).$$

Здесь

$$E_{\alpha, m, l} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \quad c_0 = 1, \quad c_i = \prod_{j=0}^i \frac{\Gamma(\alpha(jm+l)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+l+1)+1)}, \quad i \geq 1,$$

– функция Килбаса–Сайго [2].

Для определения постоянных d_k запишем функции u_k в виде

$$u_k(y) = c_0 y^{\alpha_k} + c_1 \lambda y^{\alpha_k + \alpha + s} + y^{\alpha_k} \sum_{n=2}^{\infty} c_n (\lambda y^{\alpha+s})^n, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Учитывая неравенство $\gamma_0 + \gamma_m + s > 1$ и применяя формулу (см. [6])

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_j\}} y^{\alpha_k} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq j-1, \\ \Gamma(1 + \alpha_k), & k = j, \\ \frac{\Gamma(1 + \alpha_k)}{\Gamma(1 + \alpha_k - \alpha_j)} y^{\alpha_k - \alpha_j}, & j < k \leq m, \end{cases}$$

из начальных условий 3) задачи Коши находим

$$d_k = \frac{A_k}{\Gamma(\alpha_k + 1)}.$$

Теперь покажем, что представление

$$u(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k y^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k + 1)} E_{\alpha, (\alpha+s)/\alpha, (\alpha_k+s)/\alpha}(\lambda y^{\alpha+s})$$

удовлетворяет уравнению (1). Из обобщённой формулы Ньютона–Лейбница (см., например, [9, с. 15]) имеем

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} u = D_{0y}^{\alpha} u - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{\alpha_k - \alpha} A_k}{\Gamma(\alpha_k - \alpha + 1)}.$$

Далее, используя формулу (10) из работы [2] (в нашем случае $m = (\alpha + s)/\alpha$, $l = (\alpha_k + s)/\alpha$, $\alpha_k = \alpha(l - m + 1)$), будем иметь

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}} u(y) = \lambda y^s u(y).$$

Перейдём к единственности решения. Пусть функция $u(y)$ – решение задачи Коши. Из результата работы [6, лемма 1] следует, что $u(y)$ есть также решение следующего интегрального уравнения Вольтерры:

$$u(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k y^{\alpha_k}}{\Gamma(1 + \alpha_k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y (y-t)^{\alpha-1} t^s u(t) dt, \quad 0 \leq y \leq l. \quad (4)$$

Из условий 1) и 2) задачи Коши следует интегрируемость функции $y^s u(y)$. Это означает, что интегральное уравнение (4) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Из утверждения теоремы следует, что общее решение уравнения (1) из класса $L_1[0, l]$, $0 < l < +\infty$, можно представить в виде (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
2. *Килбас А.А., Сайго М.* Решение в замкнутой форме одного класса линейных дифференциальных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 195–204.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
4. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. New York; London, 1974.
5. *Wiener K.* On solutions of a differential equation of nonintegral order that occurs in the theory of polarography // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle- Wittenberg Math.-Natur. Reihe. 1983. V. 32. № 1. Р. 41–46.
6. *Джэрбашиян М.М., Нерсисян А.Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. № 1. С. 3–28.
7. *Богатырева Ф.Т.* Начальная задача для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 5. С. 21–26.
8. *Псху А.В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб. 2011. Т. 202. № 4. С. 111–122.
9. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.

Наманганский инженерно-строительный институт,
Узбекистан,
Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз,
г. Ташкент

Поступила в редакцию 01.03.2023 г.
После доработки 21.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.