

УДК 517.977.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ОДНОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ФОЙГТА

© 2023 г. А. В. Звягин, Е. И. Костенко

Изучается задача управления с обратной связью для одной математической модели, описывающей движение вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траекторий движения поля скоростей. Доказывается существование оптимального управления, дающего минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества.

DOI: 10.31857/S0374064123120117, EDN: NWUHBJ

1. Введение. Постановка задачи. В ограниченной области $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f(t, x); \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad (2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (3)$$

$$v(t, x)|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0; \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ и $p(t, x)$ – искомые скорость и давление рассматриваемой среды; $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – тензор скорости деформации с элементами $\mathcal{E}_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$; $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ – константы, отвечающие за вязкоупругие свойства изучаемой жидкости; $z(\tau; t, x)$ – траектория движения частицы жидкости; $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера (см. [1, с. 29]). Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, т.е. вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы.

Начально-краевая задача (1)–(4) является математической моделью движения вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траектории движения частицы среды (см. работы [2–7], в которых исследован вопрос слабой разрешимости частных случаев рассматриваемой модели). Наличие интегрального слагаемого в уравнении (1) отражает учёт памяти сплошной среды, которую необходимо учитывать вдоль траектории движения частицы среды. Таким образом, возникает $z(s; t, x)$ -траектория частицы среды, указывающая в момент времени s расположение частицы, находящейся в момент времени t в точке x . Данная траектория определяется полем скоростей v . Необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v , т.е. чтобы уравнение (3) имело единственное решение для поля скоростей v . Для этого в работе разрешимость интегральной задачи Коши (3) изучается в терминах регулярных лагранжевых потоков (РЛП) (см. [8–10]).

В данной статье для изучаемой математической модели рассматривается задача управления с обратной связью. Заметим, что задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число исследований (см., например, книгу [11] и приведённую в ней библиографию), однако в большинстве из них изучаются различные задачи оптимального управления для системы Навье–Стокса. Но в природе существует огромное число жидкостей, которые описываются более сложными системами уравнений (такие жидкости называются “неньютоновскими жидкостями”). Список работ, где рассматриваются задачи оптимального

управления, в том числе и задачи с обратной связью для подобных моделей движения жидкости, существенно короче (см. [12–14]). В настоящей статье доказывается существование оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью.

2. Постановка задачи управления и основной результат. Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из множества Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω . Обозначим множество $\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} v = 0\}$. Через V^0 обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 – по норме $W_2^1(\Omega)$. Через V^{-1} будем обозначать сопряжённое пространство к V^1 . Введём пространство

$$W = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\},$$

в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи.

Перейдём к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Для этого рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W \rightrightarrows L_2(0, T; V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W и имеет непустые компактные выпуклые значения;

(Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху (т.е. для каждого $v \in W$ и открытого множества $V \subset L_2(0, T; V^{-1})$ такого, что $\Psi(v) \subset V$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset V$) и компактно (т.е. образ Ψ относительно компактен в $L_2(0, T; V^{-1})$);

(Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т.е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1})} := \sup\{\|u\|_{L_2(0, T; V^{-1})} : u \in \Psi(v)\} \leq M \quad \text{для всех } v \in W;$$

(Ψ4) отображение Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W$, $v_l \rightharpoonup v_0$, $u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \rightarrow u_0$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1)–(4). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(v). \quad (5)$$

Таким образом, в работе рассматриваем задачу управления с обратной связью (1)–(5). Будем предполагать, что начальное условие v_0 принадлежит пространству V^0 .

Определение. Слабым решением задачи управления с обратной связью (1)–(5) называется пара функций $(v, f) \in W \times L_2(0, T; V^{-1})$, удовлетворяющая:

- a) условию обратной связи (5);
- b) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_{\Omega} e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

где z – РЛП, порождённый v ;

- c) начальному условию $v(0) = v_0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4). Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи управления с обратной связью (1)–(5).

Обозначим через $\Sigma \subset W \times L_2(0, T; V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1)–(5). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- (Ф1) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$;
 (Ф2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W и $f_m \rightarrow f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. Если отображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi 1)$ – $(\Psi 4)$, а функционал Φ удовлетворяет условиям $(\Psi 1)$, $(\Psi 2)$, то задача оптимального управления с обратной связью (1)–(5) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

Доказательство данных утверждений состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного В.Г. Звягиным [15, 16], доказываются существование слабых решений исследуемой задачи управления с обратной связью. Для этого вводится семейство $(0 \leq \xi \leq 1)$ вспомогательных включений, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени для многозначных векторных полей доказываются существование слабых решений вспомогательной задачи управления с обратной связью при $\xi = 1$. Далее для доказательства разрешимости исходной задачи управления с обратной связью на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. В заключение показывается, что во множестве решений найдётся хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

3. Схема доказательства. Рассмотрим следующее семейство $(0 \leq \xi \leq 1)$ вспомогательных задач с малым параметром $\theta > 0$. Необходимо найти пару функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$ ($W_1 = \{v \in C([0, T]; V^3), v' \in L_2(0, T; V^3)\}$), удовлетворяющих:

- а) условию обратной связи (5);
 б) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \xi \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi dx + \\ + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_{\Omega} e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) ds dx = \xi \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

где z – РЛП, порождённый v ;

- с) начальному условию $v(0) = \xi v_0$.

Далее для изучения вспомогательной задачи перейдём к операторной трактовке. Введём операторы

$$J : V^3 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A : V^1 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A_2 : V^3 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle A_2 v, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B : V^1 \times [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega} \rightarrow V^{-1}, \quad (B(v, z)(t), \varphi) = \left(\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right),$$

$$v \in V^1, \quad z \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (0, T);$$

$$K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1.$$

Также определим следующие операторы:

$$L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \theta A_2)v' + \mu_0 Av, v|_{t=0});$$

$$\begin{aligned}
C : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) = (K(v), 0); \\
G : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = \left(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z), 0 \right); \\
\mathcal{Y} : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad \mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), v_0).
\end{aligned}$$

Тогда задача о нахождении управления с обратной связью для вспомогательной задачи при фиксированном $0 \leq \xi \leq 1$, удовлетворяющего начальному условию $v(0) = \xi v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0 \leq \xi \leq 1$ операторного включения

$$v \in \xi \mathcal{M}, \quad (6)$$

где $\mathcal{M} = L^{-1}(\mathcal{Y} + C(v) - G(v))$.

Для введённых выше операторов справедливы следующие свойства.

Лемма 1. 1. *Отображение $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ обратимо и обратное к нему отображение $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_1$ является непрерывным.*

2. *Отображение $K : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является компактным.*

3. *Отображение $B : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является L -уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k .*

Далее для операторного включения (6) доказываются априорные оценки.

Лемма 2. *Если $v \in W_1$ – решение семейства включений (6) для некоторого $\xi \in [0, 1]$, то для него имеет место оценка $\|v\|_{W_1} \leq C$, где константа C зависит от θ .*

Из данной априорной оценки следует, что все решения операторного включения (6) лежат в шаре $B_R \subset W_1$ с центром в нуле и радиуса $R = C + 1$. Согласно утверждению 1 леммы 1 оператор $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение $v \in \xi \mathcal{M}$ не принадлежит границе шара B_R .

В силу утверждения 1 леммы 1 оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_1$ является непрерывным. Согласно утверждениям 2 и 3 леммы 1 отображение $(\mathcal{Y} + C(v) - G(v)) : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Следовательно, оператор $\mathcal{M} : W_1 \rightarrow W_1$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .

Таким образом, векторное поле $v - \xi \mathcal{M}$ невырождено на границе шара B_R , а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi \mathcal{M}, B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что $\deg(I - \mathcal{M}, B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_1$ включения (6) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи при $\xi = 1$.

Далее для полученного решения вспомогательной задачи при $\xi = 1$ доказывается следующая оценка решений.

Лемма 3. *Если $v \in W_1$ – решение семейства включений (6) для $\xi = 1$, то для него имеет место оценка $\|v\|_W \leq C_1$, где константа C_1 не зависит от θ .*

На основе оценки леммы 3, условий $(\Psi 1)$ – $(\Psi 4)$, плотного вложения пространства V^3 в V^0 , без ограничения общности (если необходимо переходя к подпоследовательности) получаем, что для любого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0 ; $v^m \rightarrow v^*$ слабо в $L_2(0, T; V^1)$ при $m \rightarrow \infty$; $v^m \rightarrow v^*$ *-слабо в $L_\infty(0, T; V^0)$ при $m \rightarrow \infty$; $(v^m)' \rightarrow (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow \infty$; $z^m(\tau; t, x)$ сходится по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega$ по (τ, x) к $z(\tau; t, x)$ для $t \in [0, T]$ и существует $f^* \in L_2(0, T; V^{-1})$ такое, что $f^m \rightarrow f^* \in \Psi(v^*)$ при $m \rightarrow \infty$.

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ в интегральном равенстве для вспомогательной задачи при $\xi = 1$, получаем, что предельная пара функций (v^*, f^*) удовлетворяет интегральному равенству из определения слабого решения задачи управления с обратной связью (1)–(5), условию обратной связи (5) и начальному условию из (4). Это и завершает доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что множество решений Σ не пусто. Таким образом, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

Как и ранее, используя оценку леммы 3, без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности), можем предположить, что $v_l \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0, T; V^0)$; $v_l \rightarrow v_*$ сильно в $L_2(0, T; L_4(\Omega))$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0, T; V^1)$; $z_l(\tau; t, x) \rightarrow z_*(\tau; t, x)$ по норме Лебега относительно $(\tau, x) \in [0, T] \times \Omega$; $f_l \rightarrow f_* \in \Psi(v_*)$ сильно в $L_2(0, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow +\infty$.

Аналогично как в п. 2 перейдём к пределу во включении

$$Jv'_l + \mu_0 Av_l + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_l, z_l) - K(v_l) = f_l \in \Psi(v_l)$$

и получим включение

$$Jv'_* + \mu_0 Av_* + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_*, z_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*).$$

Следовательно, $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, то имеем $\Phi(v_*, f_*) \leq \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$, откуда следует, что (v_*, f_*) – требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-10026).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. Zvyagin V., Orlov V. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2018. V. 38. № 12. P. 6327–6350.
3. Звягин А.В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74. № 3. С. 189–190.
4. Звягин В.Г., Орлов В.П. О регулярности слабых решений обобщённой модели вязкоупругости Фойгта // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 11. С. 1933–1949.
5. Звягин А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 1. С. 66–97.
6. Zvyagin V., Orlov V. Weak solvability of one viscoelastic fractional dynamics model of continuum with memory // J. of Math. Fluid Mech. 2021. V. 23. Art. 9.
7. Zvyagin V.G., Kostenko E.I. Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory // Lobachevskii J. of Math. 2023. V. 44. № 3. P. 969–988.
8. DiPerna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Inventiones Mathematicae. 1989. V. 98. № 3. P. 511–547.
9. Crippa G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 2008. V. 1. № 2. P. 333–348.
10. Crippa G., de Lellis C. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // J. für die reine und angewandte Mathematik. 2008. V. 616. P. 15–46.
11. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
12. Звягин А.В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 245–249.
13. Zvyagin V., Zvyagin A., Ustiuzhaninova A. Optimal feedback control problem for the fractional Voigt α -model // Math. 2020. V. 8. № 7. Art. 1197.
14. Звягин В.Г., Звягин А.В., Хонг Н.М. Об оптимальном управлении с обратной связью для модели движения нелинейно-вязкой жидкости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 1. С. 135–139.
15. Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Соврем. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 46. С. 92–119.
16. Звягин В.Г., Турбин М.В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М., 2012.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.09.2023 г.

После доработки 08.09.2023 г.

Принята к публикации 11.10.2023 г.