ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 12, с. 1702–1709

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СУЩЕСТВОВАНИЕ СУБЛОРЕНЦЕВЫХ ДЛИННЕЙШИХ

© 2023 г. Ю. Л. Сачков

Получены достаточные условия существования оптимальных траекторий в общих задачах оптимального управления со свободным терминальным временем, а также в сублоренцевых задачах.

DOI: 10.31857/S0374064123120105, EDN: NWKNMD

Введение. Лоренцева геометрия является математической основой теории относительности [1–3], а сублоренцева геометрия – попыткой обобщения субримановой геометрии [4, 5], задающейся распределением и положительно определённой в нём квадратичной формой, на случай квадратичной формы единичного индекса [6–15]. В данной работе методами геометрической теории управления [16–18] получены достаточные условия существования оптимальных траекторий в общих задачах оптимального управления со свободным терминальным временем, а также в сублоренцевых задачах.

1. Существование оптимальных управлений в задачах со свободным терминальным временем. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot q = f(q,u), \quad q \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^k, \quad n,k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \text{ свободно}, \tag{2}$$

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q,u)\,dt \to \min. \tag{3}$$

Обозначим множества достижимости [16–18] этой системы из точки q_0:

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{q(t_1) : q(t), \quad t \in [0,t_1], \quad \text{траектория системы (1) т.ч. } t_1 \geqslant 0, \ \ q(0) = q_0\}$$

– множество достижимости за произвольное неотрицательное время;

$$\mathcal{A}^-_{q_0} = \{q(t_1) : q(t), \quad t \in [t_1,0], \quad \text{траектория системы (1) т.ч. } t_1 \leqslant 0, \ \ q(0) = q_0\}$$

– множество достижимости за произвольное неположительное время;

$$\mathcal{A}^{t_1}_{q_0} = \{q(t) : q(t), \quad t \in [0,t_1], \quad \text{траектория системы (1) т.ч. } q(0) = q_0\}$$

– множество достижимости за время не больше $t_1 \geqslant 0$.

Как известно (см. [17, п. 10.2]), исследование задачи оптимального управления (1)–(3) сводится к исследованию множеств достижимости расширенной системы

$$\dot{\widehat q} = \widehat f(\widehat q,u), \quad \widehat q = (y,q) \in \widehat M = \mathbb{R} \times M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^k, \tag{4}$$

$$\widehat f(\widehat q,u) = (\varphi(q,u), f(q,u)), \tag{5}$$

$$\widehat q(0) = (0,q_0), \quad q(t_1) = q_1. \tag{6}$$

А именно, траектория $q(t)$, $t \in [0,t_1]$, оптимальна в задаче (1)–(3) с оптимальным значением функционала J тогда и только тогда, когда для соответствующей траектории $\widehat q(t) = (\int_0^t \varphi(q,u)\,dt, q(t))$ системы (4), (5) выполнено условие

$$\widehat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)} \bigcap \{(y,q_1) : y < J\} = \varnothing. \tag{7}$$

Здесь и далее $\widehat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}$ есть множество достижимости системы (4), (5) из точки $(0,q_0)$ за произвольное неотрицательное время.

Теорема 1. *Пусть для системы (4)–(6) выполнены условия:*

1) множество $U\subset\mathbb{R}^k$ компактно;

2) для любого $\widehat{q}\in\widehat{M}$ множество $\widehat{f}_U(\widehat{q})=\{\widehat{f}(\widehat{q},u):u\in U\}\subset T_{\widehat{q}}\widehat{M}$ выпукло;

3) существует компакт $\widehat{K}\subset\widehat{M}$, содержащий образы всех траекторий $\widehat{q}(t)$, $t\in[0,t_1]$, системы (4), (5) с граничными условиями (6);

4) существует траектория $\widehat{q}'(t)=(y'(t),q'(t))$, $t\in[0,t_1']$, системы (4), (5) с граничными условиями $\widehat{q}'(0)=(0,q_0)$, $\widehat{q}'(t_1')=(J',q_1)$ такая, что для любой траектории $\widehat{q}(t)$, $t\in[0,t_1]$, системы (4), (5) с граничными условиями $\widehat{q}(0)=(0,q_0)$, $\widehat{q}(t_1)=(J,q_1)$ из неравенства $t_1>t_1'$ следует неравенство $J>J'$.

Тогда в задаче оптимального управления (1)–(3) существует оптимальное управление.

Доказательство. Существует компакт $\widehat{K}_1\subset\widehat{M}$ такой, что $\widehat{K}\subset\operatorname{int}\widehat{K}_1$. Возьмём любую функцию $a\in C^\infty(\widehat{M})$ такую, что $a|_{\widehat{K}}\equiv1$, $a|_{\widehat{M}\setminus\widehat{K}_1}\equiv0$. Рассмотрим, наряду с системой (4), систему

$$\dot{\widehat{q}}=\overline{f}(\widehat{q},u):=a(\widehat{q})\cdot\widehat{f}(\widehat{q},u),\quad \widehat{q}\in\widehat{M},\quad u\in U. \tag{8}$$

В силу теоремы Филиппова [17, теорема 10.1] множества достижимости $\overline{\mathcal{A}}^t_{(0,q_0)}$ системы (8) из точки $(0,q_0)$ за время не большее t компактны для любого $t\geqslant0$, поэтому пересечение $\overline{\mathcal{A}}^{t_1'}_{(0,q_0)}\bigcap\{(y,q_1)\in\widehat{M}\}$ компактно. Но системы (4) и (8) имеют одни и те же траектории с граничными условиями (6), потому и пересечение

$$\widehat{\mathcal{A}}^{t_1'}_{(0,q_0)}\bigcap\{(y,q_1)\in\widehat{M}\}=\overline{\mathcal{A}}^{t_1'}_{(0,q_0)}\bigcap\{(y,q_1)\in\widehat{M}\}$$

также компактно. Положим $\widetilde{J}=\min\{y:(y,q_1)\in\widehat{\mathcal{A}}^{t_1'}_{(0,q_0)}\}$. Существует траектория $\widetilde{q}(t)$, $t\in[0,\widetilde{t}_1]$, $\widetilde{t}_1\leqslant t_1'$, системы (4) с граничными условиями $\widetilde{q}(0)=(0,q_0)$, $\widetilde{q}(\widetilde{t}_1)=(\widetilde{J},q_1)$. Соответствующая траектория $q(t)$, $t\in[0,\widetilde{t}_1]$, системы (1) оптимальна в задаче (1)–(3), так как

$$\widehat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}\bigcap\{(y,q_1)\in\widehat{M}:y<\widetilde{J}\}=\widehat{\mathcal{A}}^{t_1'}_{(0,q_0)}\bigcap\{(y,q_1)\in\widehat{M}:y<\widetilde{J}\}=\varnothing$$

(ср. с (7)). Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (4) теоремы 1 выполнено, в частности, если не существует траектории $q(t)$, $t\in[0,t_1]$, системы (1), удовлетворяющей граничным условиям (2) и неравенству $t_1>t_1'$.

Определим следующую функцию на $M\times M$, задающую максимальное время движения траекторий системы (1) от точки q_0 до точки q_1:

$$T(q_0,q_1):=\sup\{t_1>0:\text{существует траектория } q(t) \text{ системы (1)}, \ t\in[0,t_1],\ \text{такая, что } q(0)=q_0,\ q(t_1)=q_1\}. \tag{9}$$

Условие (4) теоремы 1 может быть ослаблено до более простого условия:

4′) $T(q_0,q_1)<+\infty$.

Условие 4′) выполнено, если $q=(x^1,\ldots,x^n)\in M\subset\mathbb{R}^n$, и в силу управляемой системы (1) для одной из координат имеет место неравенство $\dot{x}^i\geqslant C>0$. В этом случае

$$T(q_0,q_1)\leqslant|x_1^i-x_0^i|/C.$$

2. Существование сублоренцевых длиннейших. Рассмотрим задачу о длиннейших для сублоренцевой структуры с ортонормированным репером $X_1,\ldots,X_k\in\operatorname{Vec}(M)$:

$$\dot{q}=\sum_{i=1}^k u_iX_i,\quad q\in M, \tag{10}$$

$$u \in U = \Big\{ u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k : -u_1^2 + \sum_{i=2}^k u_i^2 \leqslant 0, \quad -u_1 \leqslant 0 \Big\}, \tag{11}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \ \text{свободно}, \tag{12}$$

$$l = \int_0^{t_1} \Big(u_1^2 - \sum_{i=2}^k u_i^2 \Big)^{1/2} dt \to \max. \tag{13}$$

Переходя на траекториях системы (10), (11) к новому времени $s(t) = \int_0^t u_1(\tau)\, d\tau$, получаем задачу оптимального управления, эквивалентную задаче (10)–(13):

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i, \quad q \in M, \tag{14}$$

$$u \in U' = \Big\{ u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=2}^k u_i^2 \leqslant 1, \quad u_1 = 1 \Big\}, \tag{15}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \ \text{свободно}, \tag{16}$$

$$l = \int_0^{t_1} \Big(1 - \sum_{i=2}^k u_i^2 \Big)^{1/2} dt \to \max. \tag{17}$$

Траектории этих систем различаются лишь параметризацией времени с одним и тем же значением функционала качества l. Поэтому сублоренцевы длиннейшие в задаче (14)–(17) и в задаче (10)–(13) существуют или не существуют одновременно.

Будем далее обозначать через $T(q_0, q_1)$ функцию (9) для системы (14), (15).

Теорема 2. *Пусть для задачи (14)–(17) выполнены условия:*

1) $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$;

2) множество $\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}$ *компактно;*

3) $T(q_0, q_1) < +\infty$.

Тогда в задаче (14)–(17) существует оптимальная траектория.

Доказательство. Рассмотрим, наряду с первой задачей (14)–(17), вторую задачу

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i, \quad q \in M, \tag{18}$$

$$(u_0, u) \in V = \Big\{ (u_0, u) \in \mathbb{R}^{k+1} : u_0 \in [0, 1], \quad u_1 = 1, \quad \sum_{i=2}^k u_i^2 \leqslant 1 \Big\}, \tag{19}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \ \text{свободно}, \tag{20}$$

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(u)\, dt \to \min, \quad \varphi(u) = -u_0 \Big(1 - \sum_{i=2}^k u_i^2 \Big)^{1/2}. \tag{21}$$

При $u_0 = 1$ вторая задача (18)–(21) совпадает с первой задачей (14)–(17). При этом для второй задачи любая траектория, для которой $u_0|_S < 1$ на множестве $S \subset [0, t_1]$ положительной меры, неоптимальна. Поэтому оптимальные траектории в обеих задачах (14)–(17) и (18)–(21) существуют или не существуют одновременно.

Проверим, что вторая задача (18)–(21) удовлетворяет условиям 1)–4) теоремы 1. Для этой задачи расширенная система (4), (5) имеет вид

$$\dot{\widehat{q}} = \widehat{f}(\widehat{q}, u_0, u), \quad \widehat{q} = (y, q) \in \widehat{M} = \mathbb{R} \times M, \quad (u_0, u) \in V, \tag{22}$$

$$\widehat{f}(\widehat{q}, u_0, u) = \left(\varphi(u), \sum_{i=1}^{k} u_i X_i\right). \tag{23}$$

1. Множество значений управляющего параметра V компактно.

2. Для любого $\widehat{q} \in \widehat{M}$ множество допустимых скоростей

$$\widehat{f}_V(\widehat{q}) = \{\widehat{f}(\widehat{q}, u_0, u) : (u_0, u) \in V\}$$

выпукло. Действительно, выберем в T_qM координаты $(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ так, чтобы $X_i(q) = \partial q/\partial x_i$, $i = \overline{1,k}$, и обозначим координату в $T_y\mathbb{R}$ через $\dot{y}$. Тогда

$$\widehat{f}(\widehat{q}, u_0, u) = (\dot{y}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = (\varphi(u), u_1, \ldots, u_k, \dot{x}_{k+1}, \ldots, \dot{x}_n)$$

и множество

$$\widehat{f}_V(\widehat{q}) = \left\{(\dot{y}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \in T_{\widehat{q}}\widehat{M} : \dot{y}^2 \leqslant 1 - \sum_{i=2}^{k} \dot{x}_i^2, \quad \dot{y} \leqslant 0\right\}$$

выпукло.

3. Докажем, что существует компакт $\widehat{K} \subset \widehat{M}$, содержащий носители всех траекторий $\widehat{q}(t) = (y(t), q(t))$, $t \in [0, t_1]$, расширенной системы (22), (23) с граничными условиями (6). Действительно, пусть $\widehat{q}(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть любая такая траектория. Тогда

$$\{q(t) : t \in [0, t_1]\} \subset \mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}, \quad |y(t)| \leqslant \int_0^t |\varphi(u)|\, dt \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant T(q_0, q_1),$$

так как $\varphi|_V \leqslant 1$, откуда $\{y(t) : t \in [0, t_1]\} \subset [0, T(q_0, q_1)]$, и искомый компакт есть $\widehat{K} = [0, T(q_0, q_1)] \times (\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1})$.

Условие 4) теоремы 1 следует из условия 3) данной теоремы (см. замечание 1).

Все условия 1)–4) теоремы 1 выполнены, поэтому оптимальная траектория существует во второй задаче (18)–(21), а также и в первой задаче (14)–(17) (а значит, и в задаче (10)–(13)).

Замечание 2. Условие 2) теоремы 2 может очевидным образом быть заменено более слабым условием

$2'$) существует компакт $K \subset M$ такой, что носитель любой траектории системы (10), (11) с граничными условиями (12) содержится в K.

Замечание 3. Теорема 2 есть обобщение на сублоренцев случай аналогичной теоремы, известной в лоренцевой геометрии [2, с. 66].

Замечание 4. М. Гроховским [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для любых $q_0, q_1 \in M$ выполнены условия 2), 3) теоремы 2. Если для некоторых $q_0, q_1 \in M$ выполнено условие 1) теоремы 2, то для них существует оптимальная траектория.*

Теорема 3 следует из теоремы 2. Теорема 2 сильнее теоремы 3, так как в теореме 2 требуется проверка условий 2), 3) лишь для точек q_0, q_1 из граничных условий задачи (16), а не для всех точек $q_0, q_1 \in M$, как в теореме 3 (см. также далее примеры пп. 3.2, 3.5).

3. Примеры.

3.1. Пространство Минковского. Пусть $M = \mathbb{R}^n_{x^1,\ldots,x^n}$, $X_i = \partial/\partial x^i$, $i = \overline{1,n}$, $q_j = (x^1_j, \ldots, x^n_j) \in M$, $j = 0, 1$. Тогда

$$\mathcal{A}_{q_0} = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in M : x^1 - x^1_0 \geqslant \left(\sum_{i=2}^{n} (x^i - x^i_0)^2\right)^{1/2}\right\},$$

$$\mathcal{A}^-_{q_1} = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in M : x^1 - x^1_1 \leqslant -\left(\sum_{i=2}^{n} (x^i - x^i_1)^2\right)^{1/2}\right\},$$

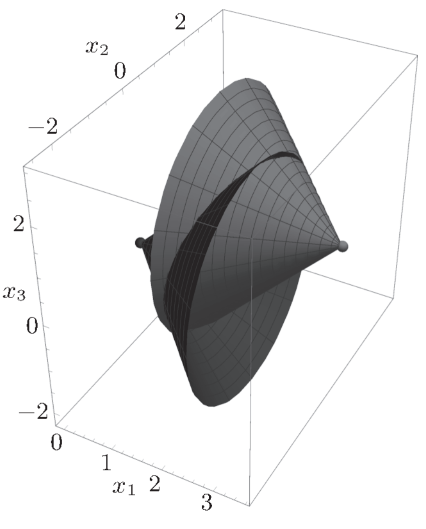

Рис. 1. Пространство Минковского.

и множество $\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}$ компактно (рис. 1) для $n = 3$. Условие 3) теоремы 2 выполнено, так как $\dot{x}^1 = 1$ для системы (14), (15), откуда $T(q_0, q_1) \leqslant |x^1_0 - x^1_1|$. Если $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$, то лоренцева длиннейшая существует по теореме 2 – это прямолинейный отрезок, соединяющий q_0 и q_1 (см. [2]).

3.2. Лоренцева плоскость Лобачевского. Пусть $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $X_1 = y\partial/\partial x$, $X_2 = y\partial/\partial y$, $q_i = (x_i, y_i) \in M$, $i = 0, 1$. Тогда

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{(x, y) \in M : x - x_0 \geqslant |y - y_0|\},$$

$$\mathcal{A}^-_{q_1} = \{(x, y) \in M : x - x_1 \leqslant -|y - y_1|\}.$$

Случай 1. Если $x_1 - 1 < y_1 \leqslant x_1 + 1$, $y_1 > 1 - x_1$, то множество $\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}$ есть непустой компакт (рис. 2). Условие 3) теоремы 2 выполнено, так как $\dot{x}|_{\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}} \geqslant C > 0$ для системы (14), (15), откуда $T(q_0, q_1) \leqslant |x_0 - x_1|/C$. Поэтому лоренцева длиннейшая существует по теореме 2 – это дуга гиперболы или прямой, соединяющая q_0 и q_1 (см. [19]).

Случай 2. Если же $y_1 \leqslant x_1 - 1$, то множество $\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}$ непусто и некомпактно. Кроме того, нарушается условие 3) теоремы 2, так как возможно сколь угодно долгое движение вблизи абсолюта $\{y = 0\}$ (рис. 3). Лоренцева длиннейшая не существует (см. [19]).

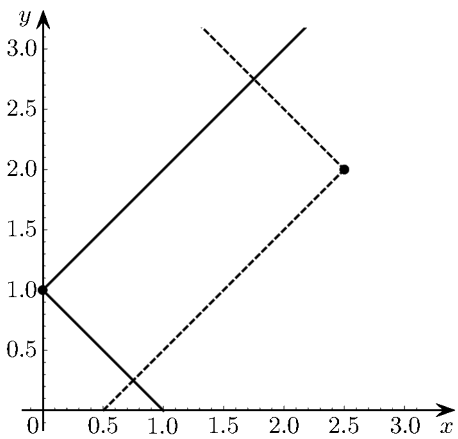

Рис. 2. Лоренцева плоскость Лобачевского, случай 1.

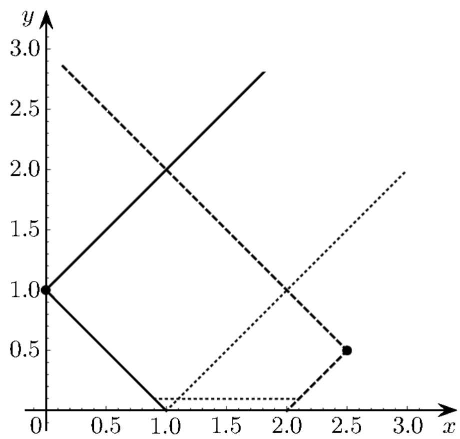

Рис. 3. Лоренцева плоскость Лобачевского, случай 2.

Теорема 3 к данной задаче неприменима, так как существуют точки $q_0, q_1 \in M$, для которых нарушаются условия этой теоремы (см. случай 2).

3.3. Сублоренцева группа Гейзенберга. Пусть

$$M = \mathbb{R}^3_{x,y,z}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad q_0 = (0, 0, 0), \quad q_1 = (x_1, y_1, z_1) \in M.$$

Тогда [6]

$$\mathcal{A}_{q_0} = \left\{(x, y, z) \in M : |z| \leqslant \frac{x^2 - y^2}{4}, \;\; x \geqslant 0\right\},$$

$$\mathcal{A}^-_{q_1} = \left\{(x, y) \in M : \left|z - z_1 - \frac{x_1 y - y_1 x}{2}\right| \leqslant \frac{(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2}{4}, \;\; x \leqslant x_1\right\},$$

и множества $\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}$ компактны (рис. 4). Условие 3) теоремы 2 выполнено, так как $\dot{x} = 1$ для системы (14), (15), откуда $T(q_0, q_1) \leqslant |x_0 - x_1|$. Если $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$, то лоренцева длиннейшая существует по теореме 2. Если $q_1 \in \partial\mathcal{A}_{q_0}$, то длиннейшая анормальная и светоподобная, а в случае $q_1 \in \operatorname{int}\mathcal{A}_{q_0}$ длиннейшая нормальная и времениподобная.

3.4. Лоренцева структура на двумерном торе. Пусть

$$M = \mathbb{T}^2_{x,y} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad q_0 = (0,0), \quad q_1 = (x_1, 0) \in M.$$

Тогда $\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}$ компактно в силу компактности тора. Траектория $e^{tX_1}(q_0)$ периодическая, поэтому $T(q_0, q_1) = +\infty$. Лоренцевой длиннейшей, соединяющей q_0 и q_1, не существует. Этот пример показывает существенность условия 3) теоремы 2.

3.5. Геодезически неполная лоренцева структура на плоскости. Пусть

$$M = \mathbb{R}^2_{x,y}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = (y^2+1)\frac{\partial}{\partial y}, \quad q_0 = (0,0), \quad q_1 = (x_1, 0) \in M.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant |\operatorname{arctg} y|\}, \quad \mathcal{A}^-_{q_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - x_1 \leqslant -|\operatorname{arctg} y|\}$$

и при $x_1 \geqslant \pi$ пересечение $\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1} \supset \{(\pi/2, y) \in \mathbb{R}^2\}$ некомпактно (рис. 5). Однако $\dot{x} = 1$, откуда $T(q_0, q_1) = x_1$ при $x_1 \geqslant 0$. Лоренцева длиннейшая, соединяющая q_0 и q_1, существует (это прямолинейный отрезок), при $x_1 \in (0, \pi)$ это следует из теоремы 2. Данный пример показывает, что условие 2) теоремы 2 не является необходимым для существования длиннейших.

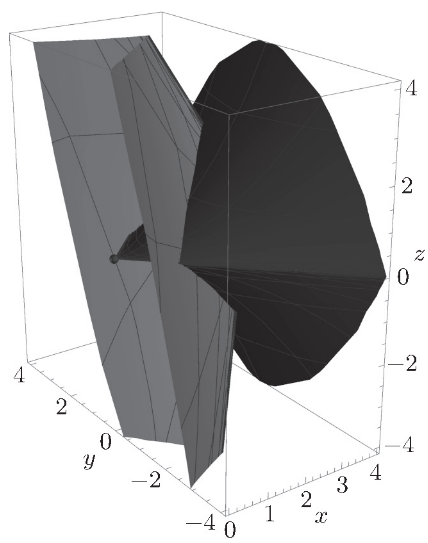

Рис. 4. Сублоренцева группа Гейзенберга.

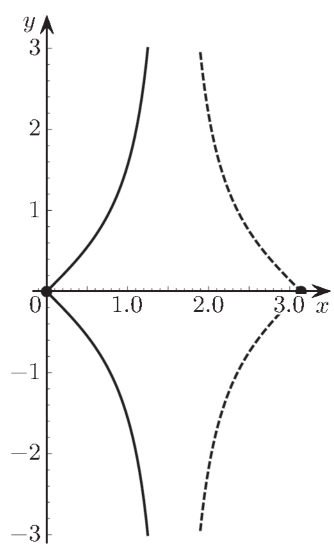

Рис. 5. Лоренцева структура на плоскости.

Теорема 3 к данной задаче неприменима, так как существуют точки $q_0, q_1 \in M$, для которых нарушается условие 2) этой теоремы.

3.6. Сублоренцева структура на группе SH(2). Пусть M есть группа гиперболических движений плоскости

$$\mathrm{SH}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch} z & \operatorname{sh} z & x \\ \operatorname{sh} z & \operatorname{ch} z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$X_1 = \operatorname{ch} z \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sh} z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad q_0 = (0,0,0), \quad q_1 = (x_1, y_1, z_1) \in M.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{(x,y,z) \in M : x \geqslant 0, \quad |z| \leqslant \operatorname{arsh} x, \quad \varphi_1(x,z) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x,z)\},$$

$$\varphi_1(x,z) = 1 + \operatorname{ch} z - \sqrt{4 + (x - \operatorname{sh} z)^2}, \quad \varphi_2(x,z) = \sqrt{4 + (x + \operatorname{sh} z)^2} - 1 - \operatorname{ch} z,$$

$$\mathcal{A}^-_{q_0} = \{(x,y,z) \in M : x \leqslant 0, \quad |z| \leqslant -\operatorname{arsh} x, \quad \varphi_1(x,z) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x,z)\},$$

$$\mathcal{A}^-_{q_1} = q_1 \mathcal{A}^-_{q_0}$$

и множества $\mathcal{A}_{q_0} \bigcap \mathcal{A}^-_{q_1}$ компактны (рис. 6). Условие 3) теоремы 2 выполнено, так как $\dot{x} = \operatorname{ch} z \geqslant 1$ для системы (14), (15), откуда $T(q_0, q_1) \leqslant |x_0 - x_1|$. Если $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$, то сублоренцева длиннейшая существует по теореме 2. Если $q_1 \in \partial \mathcal{A}_{q_0}$, то эта длиннейшая анормальная и светоподобная, а в случае $q_1 \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{q_0}$ длиннейшая нормальная и времениподобная.

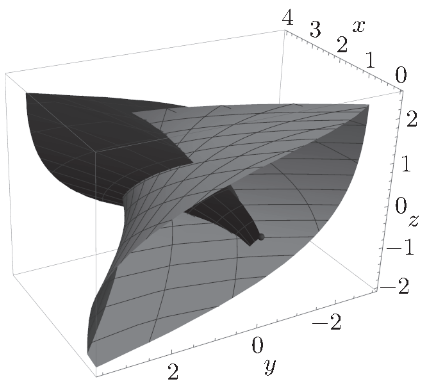

Рис. 6. Группа CH(2).

3.7. Сублоренцевы структуры на группах SE(2), $\widetilde{\mathbf{SE}}\,(2)$.

Пусть M есть группа евклидовых движений плоскости

$$\mathrm{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \right\},$$

$$X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad q_0 = (0,0,0), \quad q_1 = (x_1, y_1, \theta_1) \in M.$$

Тогда [20] $\mathcal{A}_{q_0} = \mathcal{A}^-_{q_1} = M$, $T(q_0, q_1) = +\infty$, и сублоренцевой длиннейшей не существует.

Эти же факты справедливы для поднятия задачи на односвязную накрывающую $\widetilde{\mathrm{SE}}(2)$.

Заключение. Примеры п. 3.2 (случай 2) и п. 3.7 показывают, что при нарушении условий 2) и 3) теоремы 2 сублоренцевы длиннейшие могут не существовать.

Примеры пп. 3.4, 3.6 показывают, что нарушение условия 3) теоремы 2 может приводить к несуществованию длиннейших.

Остаётся открытым вопрос, может ли приводить к несуществованию длиннейших нарушение лишь условия 2) теоремы 2?

Автор признателен рецензенту, полезные замечания которого побудили к рассмотрению примеров из пп. 3.6, 3.7.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00140).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wald R.M.* General Relativity. Chicago, 1984.
2. *Beem J.K., Ehrlich P.E., Easley K.L.* Global Lorentzian Geometry. Monographs Textbooks Pure Appl. Math. V. 202. New York; Basel; Hong Kong, 1996.
3. *Müller O., Sànchez M.* An Invitation to Lorentzian Geometry // Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 2014. V. 115. P. 153–183.
4. *Montgomery R.* A Tour of Subriemannnian Geometries, their Geodesics and Applications. Providence, 2002.
5. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian Viewpoint. Cambridge, 2019.
6. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // J. of Dynamical and Control Systems. 2006. V. 12. № 2. P. 145–160.
7. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 2002. V. 50. P. 161–178.

8. *Grochowski M.* Normal forms of germs of contact sub-Lorentzian structures on $\mathbb{R}^3$. Differentiability of the sub-Lorentzian distance // J. Dynam. Control Systems. 2003. V. 9. № 4. P. 531–547.
9. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. V. 59. № 7. P. 885–900.
10. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. 2011. V. 177. № 3. P. 383–394.
11. *Grochowski M.* On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$ // Geometric Singularity Theory. Banach Center Publications. Warszawa, 2004. V. 65. P. 57–65.
12. *Chang D.-C., Markina I., Vasil'ev A.* Sub-Lorentzian geometry on anti-de Sitter space // J. Math. Pures Appl. 2008. V. 90. P. 82–110.
13. *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19. P. 864–889.
14. *Grong E., Vasil'ev A.* Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover // J. Geom. Mech. 2011. V. 3. № 2. P. 225–260.
15. *Grochowski M., Medvedev A., Warhurst B.* 3-dimensional left-invariant sub-Lorentzian contact structures // Differ. Geometry and its Appl. 2016. V. 49. P. 142–166.
16. *Jurdjevic V.* Geometric Control Theory. Cambridge, 1997.
17. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М., 2005.
18. *Сачков Ю.Л.* Введение в геометрическую теорию управления. М., 2021.
19. *Сачков Ю.Л.* Лоренцева геометрия на плоскости Лобачевского // Мат. заметки. 2023. V. 114. № 1. P. 127–130.
20. *Bonnard B., Jurdjevic V., Kupka I., Sallet G.* Transitivity of families of invariant vector fields on the semidirect products of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 271. № 2. P. 525–535.

Институт программных систем
имени А.К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.
После доработки 05.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.