

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2023 г. А. А. Полосин

Изучается асимптотическое поведение спектра интегрального оператора, схожего с интегральным оператором с логарифмическим ядром, зависящим от суммы аргументов. Простой заменой переменных соответствующее уравнение сводится к интегральному уравнению типа свёртки, заданному на конечном отрезке (как известно, такие уравнения в общем случае не решаются в квадратурах). Далее с помощью преобразования Фурье уравнение сводится к задаче сопряжения аналитических функций, а затем – к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, выделение главных членов в которой позволяет получить соотношение, определяющее спектр исходной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123120087, EDN: NXRBR1

Введение. В работе [1] было доказано, что интегральный оператор с логарифмическим ядром, зависящим от суммы аргументов, вида

$$(Au)(x) = \int_{\delta}^1 \ln(t+x)u(t) dt, \quad \delta \leq x \leq 1,$$

где $0 < \delta < 1$ – фиксированное число, имеет лишь одно положительное собственное значение. В статье [2] найдена асимптотика спектра интегрального уравнения переноса

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{|t-x|^{\alpha}}, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

В работах [3, 4] изучена асимптотика собственных значений и собственных функций более общего семейства интегральных операторов типа свёртки

$$(Au)(\tau) = \int_0^T k(t-\tau)u(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

для которых образ Фурье ядра $k(s)$ – функция $K(x)$ – является невырожденной однородной функцией, т.е. $K(cx) = c^{-\gamma}K(x)$ для любого $c > 0$ и любого вещественного x , где $0 < \gamma < 1$.

Метод решения уравнений типа свёртки, рассматриваемых на конечном отрезке, при известных двух частных решениях, отвечающих правым частям специального вида, предложен в [5]. В [6] изучена асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с ядром $k(x) = (\pi x)^{-1} \sin(lx)$, $l > 0$, рассматриваемого на отрезке $[-1, 1]$, а в статье [7] исследована асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с логарифмическим ядром.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу на собственные значения для интегрального оператора, родственного используемому в работе [1]:

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{\delta}^1 \ln \frac{\gamma \sqrt{xt}}{t+x} \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{xt}}, \quad \delta \leq x \leq 1, \quad (1)$$

где $0 < \delta < 1$, $\gamma > 0$ – фиксированные числа. Изучим асимптотику спектра этого оператора в предположении, что $\lambda \gg 0$.

Обозначив $x = \sqrt{\delta}e^y$, $t = \sqrt{\delta}e^s$, $v(y) = e^{y/2}\psi(\sqrt{\delta}e^y)$, $a = -\ln \sqrt{\delta}$, запишем (1) в виде

$$v(y) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{\gamma/2}{\operatorname{ch}((y-s)/2)} v(s) ds, \quad -a \leq y \leq a. \quad (2)$$

Заметим, что собственная функция уравнения (2) будет либо чётной, либо нечётной.

Рассмотрим сначала случай чётной собственной функции: $v(y) = v(-y)$. Пусть $T(y)$ – чётная функция, удовлетворяющая условиям $T''(y) = v(y)$, $T(\pm a) = 0$:

$$T(y) = \int_0^y (y-t)v(t) dt - \int_0^a (a-t)v(t) dt,$$

тогда с учётом равенства

$$T'(a) = \int_0^a v(t) dt = -T'(-a)$$

уравнение (2) можно представить в виде

$$v(y) = w(y) - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{T(s) ds}{\operatorname{ch}^2((s-y)/2)}, \quad -a \leq y \leq a, \quad (3)$$

где

$$w(y) = \frac{\lambda}{\pi} T'(a) \ln \frac{\gamma^2/2}{\operatorname{ch} y + \operatorname{ch} a}.$$

В соответствии с общей схемой, описанной в [8, с. 201], продолжим уравнение (3) на всю вещественную прямую, доопределив функции $v(y)$, $w(y)$ и $T(y)$ нулём вне отрезка $[-a, a]$:

$$v(y) = w(y) - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(s) ds}{\operatorname{ch}^2((s-y)/2)} + f_+(y-a) + f_+(-y-a), \quad -\infty < y < +\infty, \quad (4)$$

где $f_+(y) = 0$ при $y \leq 0$.

Перейдём в соотношении (4) к образам Фурье, обозначив

$$V(p) = \int_{-a}^a v(y) e^{ipy} dy, \quad W(p) = \int_{-a}^a w(y) e^{ipy} dy, \quad F^+(p) = \int_0^{+\infty} f_+(y) e^{ipy} dy.$$

В результате будем иметь

$$T'(a) = \int_0^a v(t) dt = \frac{V(0)}{2}, \quad \int_{-a}^a T(y) e^{ipy} dy = \frac{V(0) \cos(ap) - V(p)}{p^2},$$

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi} V(0) \int_0^a \cos(py) \ln \frac{\gamma^2/2}{\operatorname{ch} y + \operatorname{ch} a} dy.$$

Заметим, что

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi} V(0) \left[\frac{\sin(ap)}{p} \ln \frac{\gamma^2/4}{\operatorname{ch} a} - \frac{\cos(ap)}{p^2} \frac{\operatorname{th} a}{2} + \int_0^a \frac{1 + \operatorname{ch} y \operatorname{ch} a}{(\operatorname{ch} y + \operatorname{ch} a)^2} \frac{\cos(py)}{p^2} dy \right],$$

так что при $p \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$W(p) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\pi} V(0) \frac{\sin(ap)}{p} \ln \frac{\gamma^2/4}{\operatorname{ch} a} + O\left(\frac{1}{p^2}\right), & \gamma \neq 2\sqrt{\operatorname{ch} a}, \\ -\frac{\lambda}{2\pi} V(0) \frac{\cos(ap)}{p^2} \operatorname{th} a + O\left(\frac{1}{p^3}\right), & \gamma = 2\sqrt{\operatorname{ch} a}. \end{cases}$$

Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$\left(1 - \frac{\lambda}{p \operatorname{sh}(\pi p)}\right) (V(p) - V(0) \cos(ap)) = \tilde{W}(p) + e^{iap} F^+(p) + e^{-iap} F^+(-p), \quad -\infty < p < +\infty, \quad (5)$$

где $\tilde{W}(p) = W(p) - V(0) \cos(ap)$.

Обозначим через μ вещественный положительный корень уравнения $p \operatorname{sh}(\pi p) = \lambda$. Положив в (5) $p = \mu$, получим условие, определяющее собственные значения исходной задачи:

$$-\tilde{W}(\mu) = e^{i\mu} F^+(\mu) + e^{-i\mu} F^+(-\mu). \quad (6)$$

Введём каноническую функцию $X(z)$ задачи сопряжения [9, с. 176] по правилу

$$1 - \frac{\lambda}{p \operatorname{sh}(\pi p)} = \left(1 - \frac{\mu^2}{p^2}\right) \frac{X^-(p)}{X^+(p)}, \quad X(\infty) = 1,$$

тогда

$$X(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{t} \frac{t^2 - \mu^2}{t \operatorname{sh}(\pi t) - \lambda} \right) \frac{dt}{t - z} \right\}. \quad (7)$$

Заметим, что $X^-(-z) = 1/X^+(z)$.

Положим

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - \mu^2}{z^2 X^+(z)} \left(V(z) e^{iaz} - V(0) \frac{1 + e^{2iaz}}{2} \right) - \frac{\tilde{W}(z) e^{iaz} + F^+(z) e^{2iaz}}{X^-(z)}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \frac{F^+(-z)}{X^-(z)}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

В силу (5) $\Phi(z)$ будет мероморфной функцией, исчезающей на бесконечности, так что

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - z_k},$$

где через z_k , $k \in \mathbb{N}$, обозначены корни уравнения

$$z \operatorname{sh}(\pi z) = \lambda, \quad (8)$$

лежащие строго в верхней полуплоскости.

2. Основные результаты. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Уравнение (8) не имеет кратных корней тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\Lambda \sin(\lambda \Lambda) \neq -1, \quad (9)$$

где $\Lambda = \sqrt{(1 + \sqrt{1 + (\pi\lambda/2)^{-2}})/2}$.

Для доказательства достаточно исключить z из системы, состоящей из уравнения (8) и уравнения $\operatorname{sh}(\pi z) + \pi z \operatorname{ch}(\pi z) = 0$, получающегося в результате дифференцирования уравнения (8) по z .

В дальнейшем будем предполагать, что условие (9) выполнено.

Вычислив вычеты в выражении для функции $\Phi(z)$, находим

$$a_k = -\frac{z_k^2 - \mu^2}{z_k^2 X^+(z_k)} \frac{F^+(z_k)e^{2iaz_k} + \tilde{W}(z_k)e^{iaz_k}}{\pi \operatorname{cth}(\pi z_k) + 1/z_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда при $\operatorname{Im} z > 0$ следует, что

$$F^+(z) = X^-(-z)\Phi(-z) = -\frac{1}{X^+(z)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z + z_k}.$$

Таким образом, мы получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_k , $k \in \mathbb{N}$, в обозначениях $p(z) = \pi \operatorname{cth}(\pi z) + z^{-1}$, $\chi(z) = (e^{-iaz} X^+(z))^2 / (1 - \mu^2 z^{-2})$:

$$a_m = \frac{1}{\chi(z_m)p(z_m)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z_m + z_k} - \frac{1 - (\mu/z_m)^2}{X^+(z_m)} \frac{\tilde{W}(z_m)e^{iaz_m}}{p(z_m)}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Исследуем расположение и свойства корней z_k , $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. Все не вещественные корни уравнения (8) лежат в полосе $|\operatorname{Re} z| < \mu$.

Достаточно заметить, что если $|\operatorname{Re} z| \geq \mu$, $\operatorname{Im} z > 0$, то

$$|z \operatorname{sh}(\pi z)| \geq |z| |\operatorname{sh}(\pi z)| > |\operatorname{Re} z| \operatorname{sh}(\pi |\operatorname{Re} z|) \geq \mu \operatorname{sh} \mu = \lambda.$$

Лемма 3. Количество корней уравнения (8), лежащих в прямоугольнике с вершинами $\pm\mu + i0$, $\pm\mu + i2N$, где $N \in \mathbb{N}$, равно $2N$.

Доказательство. Обозначим $f(z) = z \operatorname{sh}(\pi z) - \lambda$, $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, тогда

$$\operatorname{Re} f(z) = x \operatorname{sh}(\pi x) \cos(\pi y) - y \sin(\pi y) \operatorname{ch}(\pi x) - \lambda, \quad \operatorname{Im} f(z) = x \sin(\pi y) \operatorname{ch}(\pi x) + y \operatorname{sh}(\pi x) \cos(\pi y).$$

Изучим приращение аргумента $f(z)$ на сторонах рассматриваемого прямоугольника.

Подсчитаем количество точек пересечения графика $f(z)$ с действительной осью на отрезке $[\mu, \mu + i2N]$. Уравнение $\operatorname{Im} f(z) = 0$ запишем в виде $\operatorname{tg}(\pi y) = -y \operatorname{th}(\pi \mu)/\mu$. Так как $\operatorname{th}(\pi \mu)/\mu > 0$, то на каждом интервале вида $(k - 1/2, k)$, $k = \overline{1, 2N}$, у этого уравнения будет существовать ровно один корень y_k ; стало быть, общее количество корней равно $2N$. При этом для нечётных k выполняются неравенства $\sin(\pi y_k) > 0$, $\cos(\pi y_k) < 0$, так что

$$\operatorname{Re} f(z_k) = \lambda \cos(\pi y_k) - y_k \sin(\pi y_k) \operatorname{ch}(\pi \mu) - \lambda < 0,$$

а для чётных k – неравенства $\sin(\pi y_k) < 0$, $\cos(\pi y_k) > 0$, а значит,

$$\operatorname{Re} f(z_k) = \lambda \left(\cos(\pi y_k) + \frac{\sin^2(\pi y_k) \operatorname{ch}^2(\pi \mu)}{\operatorname{sh}^2(\pi \mu) \cos(\pi y_k)} - 1 \right) = \lambda \frac{\operatorname{sh}^2(\pi \mu)(1 - \cos(\pi y_k)) + \sin^2(\pi y_k)}{\cos(\pi y_k) \operatorname{sh}^2(\pi \mu)} > 0.$$

С учётом ещё того, что $f(\mu) = 0$, $\arg f(\mu + i0) = \pi/2$ и $f(\mu + i2N) = i2N \operatorname{sh}(\pi \mu)$, приращение аргумента функции $f(z)$ на отрезке $[\mu + i0, \mu + i2N]$ равно $2\pi N$.

На отрезке $[\mu + i2N, -\mu + i2N]$

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x + i2N) = x \operatorname{sh}(\pi x) - \lambda \leq 0, \quad \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x + i2N) = 2 \operatorname{sh}(\pi x),$$

приращение аргумента равно π .

Так как на отрезке $[-\mu + i2N, -\mu + i0]$ $f(z) = f(-\mu + iy) = f(\mu - iy) = \overline{f(\mu + iy)}$, то приращение аргумента на этом отрезке равно $2\pi N$; на отрезке $[-\mu + i0, \mu + i0]$ приращение аргумента, очевидно, равно $-\pi$. Таким образом, общее приращение аргумента при обходе прямоугольника в направлении против часовой стрелки составляет $4\pi N$, что и доказывает лемму.

Следствие 1. *Количество корней уравнения (8) с ненулевой мнимой частью конечно.*

Два корня уравнения (8), ближайшие к $i\lambda$, обозначим через z_1^* , z_2^* ; возможны случаи $\operatorname{Re} z_1^* = \operatorname{Re} z_2^* = 0$ или $\operatorname{Re} z_1^* = -\operatorname{Re} z_2^* > 0$, $\operatorname{Im} z_1^* = \operatorname{Im} z_2^*$.

Следствие 2. *Для всех корней уравнения (8), кроме z_1^* , z_2^* , справедлива оценка*

$$|z_k - i\lambda| \geq 1.$$

Разобьём множество корней, отличных от z_1^* , z_2^* , на три дизъюнктных подмножества в зависимости от знака их действительной части:

$$\{z_k\}_{k=1}^\infty \setminus \{z_1^*, z_2^*\} = \{z_m^+\}_{m=1}^M \coprod \{z_m^-\}_{m=1}^M \coprod \{z_l^0\}_{l=1}^\infty,$$

$$\operatorname{Re} z_m^+ > 0, \quad z_m^- = -\overline{z_m^+}, \quad m = \overline{1, M}, \quad \operatorname{Re} z_l^0 = 0, \quad l \in \mathbb{N},$$

занумеровав корни в каждом подмножестве в порядке возрастания их мнимых частей.

Лемма 4. *Если $|z| \leq 1$, то $|e^{\pi z} - 1| \geq 2|z|e^{-\pi|z|/2}$.*

Доказательство. Обозначим $z = re^{i\theta}$. Так как $r < 1$, то

$$\left| \sin\left(\frac{\pi r}{2} \sin \theta\right) \right| \geq \frac{2}{\pi} \frac{\pi r}{2} |\sin \theta| = r |\sin \theta|, \quad \left| \operatorname{sh}\left(\frac{\pi r}{2} \cos \theta\right) \right| \geq \frac{\pi r}{2} |\cos \theta| \geq r |\cos \theta|,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |e^{\pi z} - 1|^2 &= 2e^{\pi r \cos \theta} [\operatorname{ch}(\pi r \cos \theta) - \cos(\pi r \sin \theta)] = \\ &= 4e^{\pi r \cos \theta} \left[\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi r}{2} \cos \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi r}{2} \sin \theta\right) \right] \geq 4e^{-\pi r} [(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2] = 4r^2 e^{-\pi r}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает искомое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для корней z_m^+ с номерами, удовлетворяющими условию $2m \leq \mu e^{C\mu}$, где $C < \pi$ – фиксированная константа, справедлива асимптотическая формула*

$$z_m^+ = \mu + 2im - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu) + O(1/\mu).$$

Доказательство. Обозначим $f(z) = z \operatorname{sh}(\pi z) - \lambda$, $z_{m,0}^+ = \mu + 2im - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)$. Воспользуемся теоремой Руше, положив $\varphi(z) = -f(z_{m,0}^+)$. Пусть $|\delta| \leq 1$, тогда

$$2f(z) = 2z \operatorname{sh}(\pi z) - 2\lambda = \mu e^{\pi\mu} \left[\frac{z}{\mu} e^{\pi(z-\mu)} - 1 - \left(\frac{z}{\mu} e^{-\pi(z+\mu)} - e^{-2\pi\mu} \right) \right],$$

$$|2f(z)| \geq \mu e^{\pi\mu} \left(\left| \frac{z}{\mu} e^{\pi(z-\mu)} - 1 \right| - \left| \frac{z}{\mu} e^{-\pi(z+\mu)} - e^{-2\pi\mu} \right| \right),$$

$$|2f(z_{m,0}^+ + \delta)| \geq \mu e^{\pi\mu} (|e^{\pi\delta} - 1| - T),$$

где

$$T = e^\pi \left| \frac{\delta - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)}{\mu + 2im} \right| + e^{-2\pi\mu} \left(1 + e^\pi \left| \left(1 + \frac{\delta - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)}{\mu + 2im} \right) \left(1 + \left(\frac{2m}{\mu} \right)^2 \right) \right| \right).$$

Так как

$$\left| \frac{\delta - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)}{1 + 2im/\mu} \right| = O(1),$$

$$\left| \left(1 + \frac{\delta - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)}{\mu + 2im} \right) \left(1 + \left(\frac{2m}{\mu} \right)^2 \right) \right| \leq \left(1 + \frac{O(1)}{\mu} \right) e^{2C\mu},$$

то в силу леммы 4 справедливо неравенство $|2f(z)| \geq \mu e^{\pi\mu} (2|\delta|e^{-\pi/2} + O(1/\mu))$.

Далее, поскольку

$$2\varphi = \mu e^{\pi\mu} \left[\frac{1}{\pi\mu} \frac{\ln(1 + 2im/\mu)}{1 + 2im/\mu} + \left(1 - \frac{1}{\pi\mu} \frac{\ln(1 + 2im/\mu)}{1 + 2im/\mu} \right) \left(1 + \frac{2im}{\mu} \right)^2 e^{-2\pi\mu} - e^{-2\pi\mu} \right],$$

то $|2\varphi(z)| = O(e^{\pi\mu})$, поэтому существует такая константа C_0 , не зависящая ни от m , ни от μ , что на окружности $|\delta| = C_0/\mu$ выполняется неравенство $|f| > |\varphi|$, что и доказывает лемму.

Изучим теперь свойства канонической функции (7).

Лемма 6. *Справедливо неравенство*

$$\frac{t}{\operatorname{sh}(\pi t)} \frac{t \operatorname{sh}(\pi t) - \lambda}{t^2 - \mu^2} > 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Достаточно заметить, что

$$\frac{t}{\operatorname{sh}(\pi t)} \frac{t \operatorname{sh}(\pi t) - \lambda}{t^2 - \mu^2} = \frac{1}{t^2 - \mu^2} \left(t^2 - t \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu)}{\operatorname{sh}(\pi t)} \right) = 1 + \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu)}{t^2 - \mu^2} \left(\frac{\mu}{\operatorname{sh}(\pi\mu)} - \frac{t}{\operatorname{sh}(\pi t)} \right),$$

и записать искомое неравенство в виде

$$\frac{t/\operatorname{sh}(\pi t) - \mu/\operatorname{sh}(\pi\mu)}{t^2 - \mu^2} < 0.$$

Изучим теперь поведение канонической функции (7) в верхней полуплоскости.

Теорема. Пусть $z = \mu + i\mu\xi$, $\operatorname{Re} \xi > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \ln(X^+(z))^{-2} &= \mu \left[\xi \ln \left(1 + \frac{1}{i\xi(2+i\xi)} \right) 2i \ln \left(1 + \frac{1}{1+i\xi} \right) \right] + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1+i\xi+s}{1+i\xi-s} \frac{ds}{s} + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2s}{1-s^2} \ln \left(\frac{i\xi}{i\xi+1-s} \frac{i\xi+1+s}{i\xi+2} \right) ds + 2 \frac{\xi-i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{s^2}{s^2-1} \right) \frac{ds}{s^2-(1+i\xi)^2} + \\ &+ \frac{\xi-i}{\pi(1+i\xi/2)} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-t}) \frac{dt}{t-i\pi\mu\xi} + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Представим каноническую функцию (7) в виде

$$\ln(X^+(\mu + i\mu\xi))^{-2} = 2 \frac{\xi-i}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{s}{s^2-1} \left(s - \frac{\operatorname{sh}(\pi\mu)}{\operatorname{sh}(\pi\mu s)} \right) \right) \frac{ds}{s^2-(1+i\xi)^2} = \sum_{k=1}^3 I_k,$$

где

$$I_1 = 2 \frac{\xi-i}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln e^{\pi\mu(1-s)} ds}{s^2-(1+i\xi)^2} = \mu \left[\xi \ln \left(1 + \frac{1}{i\xi(2+i\xi)} \right) + 2i \ln \left(1 + \frac{1}{1+i\xi} \right) \right],$$

$$I_2 = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^1 \ln \left(\frac{s}{s^2 - 1} \left(s e^{-\pi \mu (1-s)} - \frac{1 - e^{-2\pi \mu}}{1 - e^{-2\pi \mu s}} \right) \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2},$$

$$I_3 = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{s}{s^2 - 1} \left(s - \frac{\operatorname{sh}(\pi \mu)}{\operatorname{sh}(\pi \mu s)} \right) \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2}.$$

Вычислим второй интеграл. Для этого представим его в виде $I_2 = I_{21} + I_{22}$, где

$$\begin{aligned} I_{21} &= 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^1 \ln \left(\frac{s}{1 - e^{-2\pi \mu s}} \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2} = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \left(\frac{s}{1 - e^{-2\pi \mu s}} \right) d \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \ln(1 - e^{-2\pi \mu}) \ln \frac{2 + i\xi}{i\xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi \mu s}{e^{2\pi \mu s} - 1} \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \ln(1 - e^{-2\pi \mu}) \ln \frac{2 + i\xi}{i\xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} - \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi \mu} \ln \frac{1 + i\xi - t/(2\pi \mu)}{1 + i\xi + t/(2\pi \mu)} \frac{dt}{e^t - 1} = \\ &= -\frac{1}{\pi i} e^{-2\pi \mu} (1 + O(e^{-2\pi \mu})) \ln \frac{2 + i\xi}{i\xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi \mu} \left(-\frac{t}{\pi \mu (1 + i\xi)} + O\left(\left(\frac{t}{2\pi \mu (1 + i\xi)} \right)^2 \right) \right) \frac{dt}{e^t - 1} = \\ &= -e^{-2\pi \mu} \frac{1}{\pi i} \ln \frac{2 + i\xi}{i\xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} + \frac{1}{\pi^2 \mu (i - \xi)} \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} + O(\mu^{-2}); \\ I_{22} &= \frac{1}{\pi i} \ln(1 - e^{-2\pi \mu}) \ln \frac{i\xi}{2 + i\xi} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \left(e^{-\pi \mu} \frac{2s \operatorname{sh}(\pi \mu s) - 2 \operatorname{sh}(\pi \mu)}{s^2 - 1} \right) d \left(\ln \left(\frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) \right) - \frac{1}{\pi i} \ln(1 - e^{-2\pi \mu}) \ln \frac{i\xi}{2 + i\xi} = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \left(\frac{2s}{1 - s^2} + \frac{\pi \mu s \operatorname{ch}(\pi \mu s) + \operatorname{sh}(\pi \mu s)}{s \operatorname{sh}(\pi \mu s) - \operatorname{sh}(\pi \mu)} \right) \ln \left(\frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) ds = I_{221} + I_{222}, \\ I_{221} &= -\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2s}{1 - s^2} \ln \left(\frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) ds, \\ I_{222} &= -\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{\pi \mu s \operatorname{ch}(\pi \mu s) + \operatorname{sh}(\pi \mu s)}{s \operatorname{sh}(\pi \mu s) - \operatorname{sh}(\pi \mu)} \ln \left(\frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) ds = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi \mu} \frac{e^{-t} dt}{e^{-t} - 1} \left[\ln \left(1 - \frac{t}{i\xi \pi \mu} \right) - \ln \left(1 - \frac{t/(\pi \mu)}{2 + i\xi} \right) \right] + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi \mu} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \ln \left(\frac{i\xi + t/(\pi \mu)}{2 + i\xi - t/(\pi \mu)} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) dt, \end{aligned}$$

$$f_1(t) = e^{t-2\pi\mu}(1 - e^{-t}) + \frac{e^{-t}}{\pi\mu} \left(1 - \frac{t}{1 - e^{-t}}\right) + \frac{e^{t-2\pi\mu}}{\pi\mu} \left(\frac{t}{1 - e^{-t}} - 1 - 2t\right),$$

$$f_2(t) = \left(1 - \frac{t}{\pi\mu}\right)(e^{t-2\pi\mu} - e^{-t}) + 1 - e^{-2\pi\mu}.$$

Так как

$$|f_2(t)| = 1 - e^{-t} + t(e^{-t} - e^{t-2\pi\mu})/(\pi\mu) + e^{t-2\pi\mu} - e^{-2\pi\mu} \geq 1 - e^{-t},$$

$$\left| \left(1 - \frac{t}{1 - e^{-t}}\right)(1 - e^{-t})^{-1} \right| = \frac{|1 - t - e^{-t}|}{(1 - e^{-t})^2} = \frac{e^{-t} - 1 + t}{(1 - e^{-t})^2} \leq \frac{1}{2} + t,$$

$$\left| \left(\frac{t}{1 - e^{-t}} - 1 - 2t\right)(1 - e^{-t})^{-1} \right| = \frac{(1 + 2t)(1 - e^{-t}) - t}{(1 - e^{-t})^2} = \frac{1 + t - (1 + 2t)e^{-t}}{(1 - e^{-t})^2} \leq \frac{3}{2} + t,$$

то при $0 \leq t \leq \pi\mu$ справедлива оценка

$$\left| \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \right| \leq e^{-\pi\mu} + \frac{e^{-t}}{\pi\mu} \left(\frac{1}{2} + t\right) + \frac{e^{-\pi\mu}}{\pi\mu} \left(\frac{3}{2} + t\right).$$

Таким образом, $I_2 = J_{21}(\xi) + J_{22}$, где

$$J_{21}(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi + s}{1 + i\xi - s} \frac{ds}{s} + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2s}{1 - s^2} \ln \left(\frac{i\xi}{i\xi + 1 - s} \frac{i\xi + 1 + s}{i\xi + 2} \right) ds,$$

$$J_{22} = \frac{1}{\pi i} (e^{-2\pi\mu} + \ln(1 - e^{-2\pi\mu})) \ln \frac{i\xi}{2 + i\xi} + \frac{1}{\pi^2 \mu (i - \xi)} \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi\mu} \left[\ln \left(1 - \frac{t}{i\xi \pi\mu}\right) - \ln \left(1 - \frac{t}{(2 + i\xi)\pi\mu}\right) \right] \frac{dt}{e^t - 1} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi\mu} O\left(e^{-\pi\mu} + \frac{e^{-t}}{\pi\mu} \left(\frac{1}{2} + t\right) + \frac{e^{-\pi\mu}}{\pi\mu} \left(\frac{3}{2} + t\right)\right) \ln \left(\frac{i\xi + t/(\pi\mu)}{2 + i\xi - t/(\pi\mu)} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) dt = O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Теперь вычислим третий интеграл. Для этого представим его в виде

$$I_3 - 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2} = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{e^{-\pi\mu(s-1)}(1 - e^{-2\pi\mu})}{s(1 - e^{-2\pi\mu s})} \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2} =$$

$$= 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{e^{-t}(1 - e^{-2\pi\mu})}{(1 + t/(\pi\mu))(1 - e^{-2\pi\mu}e^{-2t})} \right) \frac{dt}{(t - i\pi\mu\xi)(2 + t/(\pi\mu) + i\xi)} =$$

$$= \frac{\xi - i}{\pi(1 + i\xi/2)} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) \frac{dt}{t - i\pi\mu\xi} + I_{30},$$

где

$$I_{30} = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{e^{-t}(1 - e^{-2\pi\mu})}{(1 + t/(\pi\mu))(1 - e^{-2\pi\mu}e^{-2t})} \right) \frac{dt}{(t - i\pi\mu\xi)(2 + t/(\pi\mu) + i\xi)} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\xi - i}{\pi(1 + i\xi/2)} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) \frac{dt}{t - i\pi\mu\xi} = \\
& = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\pi\mu + t} \frac{t}{e^t - 1} + \frac{e^{-t-2\pi\mu}(1 + e^{-t})}{(1 + t/(\pi\mu))(1 - e^{-2t-2\pi\mu})} \right) \frac{dt}{(t - i\pi\mu\xi)(2 + t/(\pi\mu) + i\xi)} - \\
& - \frac{1}{\pi^2\mu} \frac{\xi - i}{1 + i\xi/2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{t - i\pi\mu\xi} \frac{\ln(1 - e^{-t})}{2 + t/(\pi\mu) + i\xi} dt = O\left(\frac{1}{\mu}\right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 3. При $z = \mu + i\mu\xi$, $\operatorname{Re} \xi > 0$, справедливо представление

$$\frac{1}{\chi(z)} = \exp\{2ia\mu + \mu f(\xi) + g(\xi) + \dots\},$$

где

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= -2\xi + \xi \ln \left(1 + \frac{1}{i\xi(2 + i\xi)} \right) + 2i \ln \left(1 + \frac{1}{1 + i\xi} \right), \\
g(\xi) &= \ln \frac{i\xi(2 + i\xi)}{(1 + i\xi)^2} + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi + s}{1 + i\xi - s} \frac{ds}{s} + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2s}{1 - s^2} \ln \left(\frac{i\xi}{i\xi + 1 - s} \frac{i\xi + 1 + s}{i\xi + 2} \right) ds + \\
& + 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$h(\xi) \equiv \operatorname{Re} f(\xi) = -2\xi + \xi \ln(1 + \xi^2) - \frac{\xi}{2} \ln(4 + \xi^2) - \xi \ln \xi + 2 \operatorname{arctg} \xi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\xi}{2},$$

$h(+0) = 0$, $h(+\infty) = -\infty$, $h(\xi)$ монотонно возрастает при $0 \leq \xi \leq \xi_{\max}$ и монотонно убывает при $\xi_{\max} \leq \xi < +\infty$, где $\xi_{\max}$ – корень уравнения $h'(\xi) = 0$:

$$\xi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e^4 - 1}} \sqrt{1 - \frac{3/2}{\sqrt{1 - (3/4)e^{-4}} + 1}}.$$

Следовательно, на луче $0 < \xi < +\infty$ у функции $h(\xi)$ существует в точности один корень ξ_0 , причём в окрестности этого корня $h(\xi) = h'(\xi_0)(\xi - \xi_0) + O((\xi - \xi_0)^2)$. Таким образом, при $(\xi_0 - \delta)\mu \leq m \leq (\xi_0 + \delta)\mu$

$$\frac{1}{\chi(z_m^+)} = \exp\{2i\tilde{a}\mu + 2f'(\xi_0)(m - S) + \dots\},$$

где $\tilde{a} = a - if(\xi_0)/2$ (заметим, что $\operatorname{Re} f(\xi_0) = 0$), S – номер, ближайший к $\mu\xi_0$.

Изучим теперь систему линейных алгебраических уравнений (10).

Заново разобьём множество корней уравнения (8) на подмножества. Все корни, отличные от a_1^+ , ..., a_S^+ , a_1^- , ..., a_S^- , a_1^* , a_2^* , обозначим через a_1^0 , a_2^0 , ..., занумеровав их в порядке возрастания мнимых частей, а при их равенстве – по убыванию действительных частей.

Так как $S \sim \mu\xi_0$, то коэффициенты $1/(z_m^- + z_k^+)$ малы, если хотя бы один из индексов больше S . Таким образом, главные члены системы (10) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^S \frac{a_k^+}{z_m^- + z_k^+} - p(z_m^-) \chi(z_m^-) a_m^- = X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) e^{-iaz_m^-} - \frac{a_1^*}{z_m^- + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^- + z_2^*}, \quad m = \overline{1, S}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
-p(z_m^+) \chi(z_m^+) a_m^+ + \sum_{k=1}^S \frac{a_k^-}{z_m^+ + z_k^-} &= X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) e^{-iaz_m^+} - \frac{a_1^*}{z_m^+ + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^+ + z_2^*}, \quad m = \overline{1, S}; \\
a_m^0 &= \frac{1}{p(z_m^0) \chi(z_m^0)} \left(-X^+(z_m^0) \tilde{W}(z_m^0) e^{-iaz_m^0} + \frac{a_1^*}{z_m^0 + z_1^*} + \frac{a_2^*}{z_m^0 + z_2^*} \right), \quad m \in \mathbb{N}; \\
p(z_m^*) \chi(z_m^*) a_m^* - \frac{a_1^*}{z_m^* + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^* + z_2^*} &= \sum_{k=1}^S \frac{a_k^+}{z_m^* + z_k^+} + \sum_{k=1}^S \frac{a_k^-}{z_m^* + z_k^-} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^0}{z_m^* + z_k^0} - \\
&\quad - X^+(z_m^*) \tilde{W}(z_m^*) e^{-iaz_m^*}, \quad m = 1, 2.
\end{aligned}$$

Запишем главные члены первых двух групп уравнений системы (11) в матричной форме $AX = F$, где

$$\begin{aligned}
X &= (a_1^+, \dots, a_S^+, a_1^-, \dots, a_S^-)^T, \quad F = (f_1^+, \dots, f_S^+, f_1^-, \dots, f_S^-)^T, \\
f_m^+ &= X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) e^{-iaz_m^-} - \frac{a_1^*}{z_m^- + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^- + z_2^*}, \quad m = \overline{1, S}, \\
f_m^- &= X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) e^{-iaz_m^+} - \frac{a_1^*}{z_m^+ + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^+ + z_2^*}, \quad m = \overline{1, S}, \\
A &= \begin{pmatrix} \Omega & e^{2i\tilde{a}\mu} D \\ e^{-2i\tilde{a}\mu} D & \Omega \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$\Omega = \Omega^T \in \mathbb{C}^{S \times S}$ – матрица, не зависящая от μ , $D \in \mathbb{C}^{S \times S}$ – диагональная матрица, не зависящая от μ . Обращая матрицу A , получаем

$$\begin{aligned}
\Xi &= \Omega^{-1} D, \quad G = (I - \Xi^2)^{-1} \Omega^{-1} = (g_{km})_{k,m=1}^S, \quad H = -\Xi(I - \Xi^2)^{-1} \Omega^{-1} = -\Xi G = (h_{km})_{k,m=1}^S, \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} G & e^{2i\tilde{a}\mu} H \\ e^{-2i\tilde{a}\mu} H & G \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем $X = A^{-1}F$,

$$\begin{aligned}
a_k^+ &= \sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) - a_1^* \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_1^*} - a_2^* \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_2^*} + \\
&\quad + e^{2i\tilde{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) - e^{2i\tilde{a}\mu} a_1^* \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_1^*} - e^{2i\tilde{a}\mu} a_2^* \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_2^*}, \\
a_k^- &= e^{-2i\tilde{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) - e^{-2i\tilde{a}\mu} a_1^* \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_1^*} - e^{-2i\tilde{a}\mu} a_2^* \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_2^*} + \\
&\quad + \sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) - a_1^* \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_1^*} - a_2^* \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_2^*}, \quad k = \overline{1, S}.
\end{aligned}$$

Таким образом, последние два уравнения системы (11) принимают вид

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

где

$$q_{11} = p(z_1^*) \chi(z_1^*) - \frac{1}{2z_1^*} + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_1^*} + e^{2i\tilde{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_1^*} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_1^*} + \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_1^*} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z_1^* + z_k^0)^2} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)}, \\
q_{12} &= -\frac{1}{z_1^* + z_2^*} + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_2^*} + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_2^*} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_2^*} + \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_2^*} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_1^* + z_k^0} \frac{1}{z_2^* + z_k^0} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)}, \\
q_{21} &= -\frac{1}{z_2^* + z_1^*} + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_1^*} + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_1^*} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_1^*} + \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_1^*} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_2^* + z_k^0} \frac{1}{z_1^* + z_k^0} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)}, \\
q_{22} &= p(z_2^*)\chi(z_2^*) - \frac{1}{2z_2^*} + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_2^*} + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_2^*} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_2^*} + \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_2^*} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z_2^* + z_k^0)^2} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)}, \\
r_1 &= \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) + \sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) \right) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_1^* + z_k^0} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)} e^{-iaz_k^0} X^+(z_k^0) \tilde{W}(z_k^0) + e^{-iaz_1^*} X^+(z_1^*) \tilde{W}(z_1^*), \\
r_2 &= \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) + \sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) \right) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_2^* + z_k^0} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)} e^{-iaz_k^0} X^+(z_k^0) \tilde{W}(z_k^0) - e^{-iaz_2^*} X^+(z_2^*) \tilde{W}(z_2^*),
\end{aligned}$$

откуда и находим коэффициенты a_1^* , a_2^* .

Подстановка найденных коэффициентов в условие (6) даёт асимптотическое соотношение для определения собственных значений, которое не записываем ввиду его громоздкости.

Случай нечётной собственной функции рассматривается аналогично; тогда функция $T(y)$ – это нечётная функция, удовлетворяющая условиям $T''(y) = v(y)$, $T'(\pm a) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oseledets I.* The integral operator with logarithmic kernel has only one positive eigenvalue // *Linear Algebra and its Appl.* 2008. V. 428. № 7. P. 1560–1564.
2. *Ukai S.* Asymptotic distribution of eigenvalues of the kernel in the Kirkwood–Riseman integral equation // *J. of Math. Phys.* 1971. V. 12. № 1. P. 83–92.
3. *Пальцев Б.В.* Уравнения свёртки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1980. Т. 44. № 2. С. 322–394.
4. *Пальцев Б.В.* Асимптотика спектра интегральных операторов свёртки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.
5. *Сахнович Л.А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке // *Успехи мат. наук.* 1980. Т. 35. № 4. С. 69–129.
6. *Полосин А.А.* О спектре и собственных функциях оператора свёртки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 9. С. 1180–1194.
7. *Полосин А.А.* Об асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с логарифмическим ядром, заданного на конечном отрезке // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 9. С. 1251–1265.
8. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 13.08.2023 г.
После доработки 13.08.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.