

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.957

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА
В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. А. Б. Хасанов, Т. Г. Хасанов

К нахождению решения задачи Коши для нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций применён метод обратной спектральной задачи. Предложены простой алгоритм построения уравнения Кортевега–де Фриза высокого порядка с нагруженными членами и вывод аналога системы дифференциальных уравнений Дубровина. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда, построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формулы первого следа, действительно удовлетворяет нагруженному нелинейному уравнению Кортевега–де Фриза. Кроме того, доказано, что если начальная функция является действительной π -периодической аналитической функцией, то и решение задачи Коши тоже является действительной аналитической функцией по переменной x , а также что если число π/n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, является периодом начальной функции, то число π/n является периодом для решения задачи Коши по переменной x .

DOI: 10.31857/S0374064123120075, EDN: NVRNLU

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для нагруженного нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x, \quad (1)$$

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2)$$

в классе бесконечнозонных π -периодических по x функций

$$q(x + \pi, t) = q(x, t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

В уравнении (1) коэффициенты $a(t), b(t) \in C[0, \infty)$ – ограниченные действительные функции, а $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма построения решения $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, задачи (1)–(3) в рамках метода обратной спектральной задачи для оператора Хилла

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Метод обратной задачи берёт своё начало с работы [1], в которой удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

сведением её к обратной задаче рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad |q(x)|(1 + |x|) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в статье [2], а затем рассматривалась в работах [3, 4] и др. В статье [5] отмечена универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) и обобщено уравнение КдФ с помощью введённого понятия высшего уравнения КдФ.

С помощью МОЗР для оператора Хилла, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакунов, в работах [6, 7] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ

в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3, 4, 8, 9].

Отметим, что в задаче

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad q(x, 0) = 2a \cos(2x), \quad a \neq 0,$$

нам не удалось найти для решения $q(x, t)$ аналог формулы Итса–Матвеева [6].

Известно [10], что если $q(x) = 2a \cos(2x)$, $a \neq 0$, то открыты все лакуны в спектре оператора Хилла $Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y$, $x \in \mathbb{R}$, иначе говоря, $q(x)$ – бесконечнозонный π -периодический потенциал. В связи с этим мы изучаем задачу Коши (1)–(3) в классе периодических бесконечнозонных функций. К данной задаче можно применить метод из статьи [11], при этом её решение получится в виде равномерно сходящегося функционального ряда. Следует отметить, что решения в классе периодических функций для нелинейных эволюционных уравнений в различных постановках изучались в работах [12–17].

В связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления, применяемых в агроэкосистеме (например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги), существенно вырос интерес к нагруженным уравнениям. *Нагруженными дифференциальными уравнениями* в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения построения общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений. Среди работ, посвящённых нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы А.М. Нахушева [18, 19] и А.И. Кожанова [20].

Уравнения вида (1) без нагруженного члена встречаются также в прикладной механике. Например, в [21, 22] система уравнений, описывающая распространение одномерных нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде, сводится к одному уравнению вида

$$u_\tau + \alpha(\tau)uu_\eta + \beta(\tau)u_{\eta\eta} - \mu(\tau)u_{\eta\eta} + \left(\frac{k}{2\tau} + \delta(\tau)\right)u = 0.$$

В частности, при $\mu = 0$, $k = 1$, $\delta = 0$ показано, что при определённых условиях цилиндрические волны могут существовать в виде солитонов.

В настоящей работе предлагаются простой алгоритм построения уравнения КдФ высокого порядка с нагруженными членами и вывод аналога системы дифференциальных уравнений Дубровина. Отметим, что существуют несколько методов построения высших уравнений КдФ. Важно также уточнить, что найденное нами высшее уравнение КдФ также включает в себя и уравнение КдФ с нагруженными членами.

2. Вывод уравнения КдФ высокого порядка с нагруженными членами. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$q_t = P[q], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5)$$

с начальным условием

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Здесь $q = q(x, t)$ – достаточно гладкая π -периодическая по x функция, а $P[q]$ – многочлен от q и его производных по x .

Построим многочлен $P[q]$ таким образом, чтобы задача Коши (5), (6) интегрировалась при помощи обратной задачи для оператора Хилла с коэффициентом $q(x, t)$:

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Обозначим через $y_n = y_n(x, t)$, $n \geq 1$, ортонормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \geq 1$, задачи Дирихле ($y(0, t) = 0$, $y(\pi, t) = 0$) для уравнения (7).

Продифференцировав по t тождество $\xi_n(t) = (L(t)y_n, y_n)$, $n \geq 1$, и используя симметричность оператора $L(t)$, будем иметь

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi q_t y_n^2 dx. \quad (8)$$

Подставим выражение (5) в формулу (8) и получим равенство

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi P[q] y_n^2 dx.$$

Ищем далее первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y'_n , т.е. пусть

$$(ay_n^2 + by_n y'_n + cy_n'^2)' = P[q] y_n^2, \quad (9)$$

где функции $a = a(x, t, \xi_n)$, $b = b(x, t, \xi_n)$, $c = c(x, t, \xi_n)$ не зависят от y_n и y'_n . Используя равенство $y_n'' = (q - \xi_n)y_n$ и приравнявая соответствующие коэффициенты, из (9) найдём

$$b = -c', \quad a = \frac{1}{2}c'' - c(q - \xi_n), \quad P[q] = \frac{1}{2}c''' - 2c'(q - \xi_n) - cq_x. \quad (10)$$

Левые части равенств (10) не зависят от ξ_n , поэтому и правые части также не должны зависеть от ξ_n . Функцию $c(x, t, \xi_n)$ будем искать в виде многочлена от ξ_n :

$$c(x, t, \xi_n) = \sum_{k=0}^N c_k(x, t) \xi_n^{N-k}. \quad (11)$$

Подставив выражение (11) в (10), будем иметь

$$\begin{aligned} P[q] = & 2c'_0(x, t)\xi_n^{N+1} + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2}c_k'''(x, t) - 2qc'_k(x, t) - q_x c_k(x, t) + 2c'_{k+1}(x, t) \right] \xi_n^{N-k} + \\ & + \frac{1}{2}c_N'''(x, t) - 2qc'_N(x, t) - q_x c_N(x, t), \end{aligned}$$

откуда с учётом независимости многочлена $P[q]$ от ξ_n получаем

$$c'_0(x, t) = 0, \quad c'_{k+1}(x, t) = -\frac{1}{4}[c_k'''(x, t) - 4qc'_k(x, t) - 2q_x c_k(x, t)], \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$P[q] = \frac{1}{2}c_N'''(x, t) - 2qc'_N(x, t) - q_x c_N(x, t).$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$q_t = \frac{1}{2}c_N''' - 2qc'_N - q_x c_N, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (12)$$

где функция $c_N = c_N(x, t)$ выражается через $q = q(x, t)$ следующим образом: по заданным непрерывным функциям $d_k = d_k(t)$, $k = \overline{0, N}$, строим последовательность функций

$$c_0(x, t) = d_0(t), \quad c_{k+1}(x, t) = -\frac{1}{4}c_k''(x, t) + qc_k(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^x q_x c_k(x, t) dx + d_{k+1}(t), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Так, например,

$$c_1(x, t) = \frac{1}{2}d_0(t)[q + q(0, t)] + d_1(t),$$

$$c_2(x, t) = \frac{1}{8}d_0(t)[-q_{xx} + 3q^2 + 2qq(0, t) + 3q^2(0, t)] + \frac{1}{2}d_1(t)[q + q(0, t)] + d_2(t)$$

и т.д.

Нелинейное уравнение (12) называется *высшим уравнением Кортевега–де Фриза*. В случае $N = 1$ оно принимает вид

$$q_t = \frac{1}{4}d_0(t)(q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{2}[2d_1(t) + d_0(t)q(0, t)]q_x.$$

В частности, при $d_0(t) = 0$ и $d_1(t) = -1$ отсюда получаем уравнение

$$q_t = q_x,$$

а при $d_0(t) = 4$, $d_1(t) = -2q(0, t)$ – уравнение КдФ

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x.$$

При $d_0(t) = 4a(t)q(0, t)$, $d_1(t) = -2a(t)q^2(0, t)$ получаем нелинейное уравнение КдФ с нагруженным членом

$$q_t = a(t)q(0, t)(q_{xxx} - 6qq_x),$$

а при $d_0(t) = 4$, $d_1(t) = c(t)q(0, t)$ – уравнение

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0, t)q_x.$$

Точно также можно найти и другие уравнения Кортевега–де Фриза с нагруженными членами:

$$q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x, \quad q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + P_1[q(x_1, t)]q_x.$$

В случае $N = 2$ уравнение (12) принимает вид

$$\begin{aligned} q_t = & -\frac{1}{16}d_0(t)(q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x) + \\ & + \frac{1}{8}(d_0(t)q(0, t) + 2d_1(t))(q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{8}(3d_0(t)q^2(0, t) + 4d_1(t)q(0, t) + 8d_2(t))q_x. \end{aligned} \quad (13)$$

В частности, из (13) при $d_0 = -16$, $d_1 = 8q(0, t)$, $d_2 = 2q^2(0, t)$ получаем нелинейное уравнение

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x.$$

В случае $d_0(t) = -16$ уравнение (13) можно записать как

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x + P_1[q(0, t)](q_{xxx} - 6qq_x) + P_2[q(0, t)]q_x,$$

где

$$P_1[y] = a_0(t)y + a_1(t), \quad P_2[y] = a_0(t)y^2 + a_1(t)y + a_2(t).$$

3. Предварительные сведения. Далее для полноты изложения представим некоторые из основных свойств оператора Хилла.

Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор Хилла

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

где $q(x) \in C^1(\mathbb{R})$ – действительная π -периодическая функция, $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр. Обозначим через $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ решения уравнения (14), удовлетворяющие начальным

условиям $c(0, \lambda) = 1$, $c'(0, \lambda) = 0$ и $s(0, \lambda) = 0$, $s'(0, \lambda) = 1$. Функция $\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda)$ называется *функцией Ляпунова*. Функции

$$\psi_{\pm} = c(x, \lambda) + \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)} s(x, \lambda)$$

называются *решениями Флоке* уравнения (14).

Спектр оператора L представляет собой следующее множество [23, 24]:

$$\sigma(L) \equiv E = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ (-\infty, \lambda_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\},$$

при этом интервалы $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \geq 1$, называются *лакунами*, где λ_0 , λ_{4k-1} , λ_{4k} – собственные значения периодической задачи $(y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi))$, а λ_{4k+1} , λ_{4k+2} – собственные значения антипериодической задачи $(y(0) = -y(\pi), y'(0) = -y'(\pi))$ для уравнения (14).

Через ξ_n , $n \geq 1$, обозначим собственные значения задачи Дирихле $(y(0) = 0, y(\pi) = 0)$ для уравнения (14), при этом имеют место включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \geq 1$.

Определение 1. Числа ξ_n , $n \geq 1$, вместе со знаками $\sigma_n = \text{sign} \{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\} = \pm 1$, $n \geq 1$, называются *спектральными параметрами оператора L* .

Определение 2. Спектральные параметры ξ_n , σ_n , $n \geq 1$, и границы λ_n , $n \geq 0$, спектра называются *спектральными данными оператора L* .

Задача нахождения спектральных данных оператора L называется *прямой спектральной задачей*, а восстановление потенциала $q(x)$ по спектральным данным – *обратной спектральной задачей* для оператора L .

Потенциал $q(x)$ определяется единственным образом (см. [25]) по спектральным данным $\{\lambda_{n-1}, \xi_n, \sigma_n, n \geq 1\}$.

Если в уравнении (14) вместо $q(x)$ использовать $q(x + \tau)$, то границы $\lambda_n(\tau)$, $n \geq 0$, спектра получаемого оператора $L(\tau)y \equiv -y'' + q(x + \tau)y = \lambda y$ не будут зависеть от параметра τ : $\sigma(L(\tau)) = \sigma(L)$, $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \geq 0$, а спектральные параметры – будут: $\xi_n = \xi_n(\tau)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau)$, $n \geq 1$. Эти спектральные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(\tau) &= 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} th_n(\xi), \\ h_n(\xi) &= \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (15)$$

где знак $\sigma_n(\tau) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система дифференциальных уравнений Дубровина и формула первого следа

$$q(\tau) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau)) \quad (16)$$

приводят к методу решения обратной задачи.

Обратные задачи для конечнозонных потенциалов впервые были рассмотрены в работе [26], поиск их решений был сведён к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов. В статье [6] найдена явная формула для конечнозонных потенциалов. В случае конечнозонных потенциалов система дифференциальных уравнений (15) впервые была получена в [11], в случае периодических потенциалов – в [27], а для почти периодических бесконечнозонных потенциалов – в работе [4].

Отметим, что впервые формула типа (16) была получена в [28] в случае, когда в спектре оператора L имеется конечное число лакун. Позже аналогичные формулы следов удалось получить и другим авторам [4, 14, 29, 30].

В процессе изучения обратной спектральной задачи для оператора L найдена связь между гладкостью потенциала $q(x)$ и длиной лакун (см., например, [3, 27, 31, 32]).

Теорема 1 [3]. Если $q(x) \in \tilde{W}_2^n[0, \pi]$ и $\operatorname{Im} q(x) = 0$, то собственные значения периодической и антипериодической задач для оператора L удовлетворяют равенствам

$$\sqrt{\lambda_{2k-1}}, \sqrt{\lambda_{2k}} = k + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n+2} \frac{a_{2j+1}}{(2k)^{2j+1}} \mp \frac{|l_n(2k)|}{(2k)^{n+1}} + \frac{\gamma_k^\pm}{k^{n+2}}, \quad (17)$$

где a_{2j+1} , b_{2j+1} не зависят от k и

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt, \quad l_n(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q^{(n)}(x) e^{-ipx} dx, \quad \sum_{k=0}^\infty |\gamma_k^\pm|^2 < \infty.$$

Здесь $\tilde{W}_2^n[0, \pi]$ – подпространство пространства Соболева $W_2^n[0, \pi]$, состоящее из функций $f(x) \in \tilde{W}_2^n[0, \pi]$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi)$, $k = \overline{0, n-1}$. Заметим, что $W_2^0[0, \pi] = \tilde{W}_2^0[0, \pi] = L_2[0, \pi]$.

Из асимптотических формул (17) вытекает следующая оценка для длин лакун:

$$\gamma_k = \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{1}{2^{n-1}} k^{-n} |l_n(2k)| + \frac{\alpha_k}{k^{n+1}}, \quad \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 < \infty. \quad (18)$$

Теорема 2 [27]. Для экспоненциального убывания длины лакун оператора L с π -периодическим действительным потенциалом $q(x)$ необходима и достаточна аналитичность $q(x)$.

Теорема 3 [33]. Для того чтобы число π/n , $n \geq 2$, было периодом потенциала $q(x)$ оператора L , необходимо и достаточно исчезновение всех лакун, номера которых не кратны n .

Эта теорема была доказана в статье [34] для $n = 2$.

4. Эволюция спектральных данных. Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, – решение задачи (1)–(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(t)$, $n \geq 0$, оператора $L(t)$ не зависят от параметра t , т.е. $\lambda_n(t) = \lambda_n$, $n \geq 0$, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n \geq 1$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) [a(t)q(x_0, t)(2q(0, t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1, t)], \quad n \geq 1, \quad (19)$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \bar{h}_n(\xi), \quad \bar{h}_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{k=1, k \neq n}^\infty \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Здесь знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \geq 1,$$

где ξ_n^0 , σ_n^0 , $n \geq 1$, – спектральные параметры оператора $L(0)$.

Доказательство. Пусть $q(x, t)$ – π -периодическая по x функция, удовлетворяющая уравнению (1). Обозначим через $y_n = y_n(x, t)$, $n \geq 1$, ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0, t) = 0$, $y(\pi, t) = 0$) для уравнения (4), соответствующие собственным

значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \geq 1$. Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n(t)$, $n \geq 1$, и используя симметричность оператора $L(t)$, будем иметь

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi q_t(x, t) y_n^2(x, t) dx. \quad (20)$$

Используя уравнение (1), из равенства (20) получаем

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi \{a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)qq_x\} y_n^2 dx = I_1. \quad (21)$$

Ищем первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y'_n , т.е. пусть

$$(ay_n^2 + by_n y'_n + cy_n'^2)' = [a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x] y_n^2, \quad (22)$$

где функции $a = a(x, t, \xi_n)$, $b = b(x, t, \xi_n)$ и $c = c(x, t, \xi_n)$ не зависят от y_n и y'_n . Используя равенство $y_n'' = (q(x, t) - \xi_n(t))y_n$ и приравнявая коэффициенты, из (22) найдём

$$b = -c', \quad a = \frac{1}{2}c'' - c(q - \xi_n),$$

$$\frac{1}{2}c''' - 2c'(q - \xi_n) - cq_x = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x. \quad (23)$$

Нетрудно заметить, что

$$c(x, t, \xi_n) = 2a(t)q(x_0, t)q(x, t) + \alpha(t),$$

где $\alpha(t) = 4a(t)q(x_0, t)\xi_n(t) - b(t)q(x_1, t)$ удовлетворяет равенству (23).

Таким образом, при

$$a(x, t, \xi_n) = a(t)q(x_0, t)q_{xx} - [2a(t)q(x_0, t)q + 4a(t)q(x_0, t)\xi_n - b(t)q(x_1, t)](q - \xi_n),$$

$$b(x, t, \xi_n) = -2a(t)q(x_0, t)q_x, \quad c(x, t, \xi_n) = a(t)q(x_0, t)q(x, t) + 4a(t)q(x_0, t)\xi_n - b(t)q(x_1, t)$$

выполняется соотношение (22). Значит,

$$\begin{aligned} I_1 &= (ay_n^2 + by_n y'_n + cy_n'^2)|_0^\pi = c(x, t, \xi_n) y_n'^2(x, t)|_0^\pi = \\ &= [a(t)q(x_0, t)(2q(0, t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1, t)] [y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка формулы (24) в (21) даёт

$$\dot{\xi}_n(t) = [y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t)] [a(t)q(x_0, t)(2q(0, t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1, t)]. \quad (25)$$

Так как собственные значения $\xi_n(t)$ задачи Дирихле для уравнения (4) простые, то получим

$$y_n(x, t) = \frac{1}{\alpha_n(t)} s(x, \xi_n(t), t),$$

где

$$\alpha_n^2(t) = \int_0^\pi s^2(x, \xi_n(t), t) dx = s'(\pi, \xi_n(t), t) \frac{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)}{\partial \lambda},$$

откуда будем иметь равенство

$$y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t) = \left(\frac{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \left(s'(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} \right).$$

Подставив в него выражение

$$s'(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} = \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4},$$

получим

$$y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t) = \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4} \left(\frac{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)}{\partial \lambda} \right)^{-1}.$$

Здесь

$$\sigma_n(t) = \text{sign} \left(s'(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} \right).$$

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \lambda)(\lambda_{2k} - \lambda)}{k^4}, \quad s(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{k^2}$$

следует, что

$$y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(t).$$

Если подставим это равенство в (25), то получим систему (19).

Теперь докажем независимость от t собственных значений $\lambda_n(t)$, $n \geq 0$, периодической и антипериодической задач для уравнения (4). Обозначим через $\nu_n(x, t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t)$, $n \geq 0$, периодической и антипериодической задач для уравнения (4). Действуя приведённым выше образом, получим равенство

$$\dot{\lambda}_n(t) = [a(t)q(x_0, t)(2q(0, t) + 4\lambda_n(t)) - b(t)q(x_1, t)][v_n'^2(\pi, t) - v_n'^2(0, t)],$$

из которого следует, что $\dot{\lambda}_n(t) = 0$, $n \geq 0$, так как $\nu_n(0, t) = \pm \nu_n(\pi, t)$, $\nu_n'(0, t) = \pm \nu_n'(\pi, t)$. Это и означает независимость границы спектра оператора $L(t)$ от параметра t .

Следствие 1. Обозначим через λ_n , $n \geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$, спектральные данные оператора

$$L(\tau)y \equiv -y'' + q_0(x + \tau)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, – решение задачи (1)–(3). Тогда спектральные данные $\lambda_n(\tau, t)$, $n \geq 0$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \geq 1$, оператора

$$L(\tau, t)y \equiv -y'' + q(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n,$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) [a(t)q(x_0, t)(2q(\tau, t) + 4\xi_n(\tau, t)) - b(t)q(x_1, t)]. \quad (26)$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau, t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \geq 1. \quad (27)$$

Замечание 1. С помощью формулы первого следа

$$q(\tau, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)) \quad (28)$$

систему дифференциальных уравнений (26) можно записать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \left[a(t) \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(x_0, t)) \right) \left(2\lambda_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)) + 4\xi_n(\tau, t) \right) - b(t) \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(x_1, t)) \right) \right], \quad n \geq 1. \quad (29)$$

В результате замены переменных по формуле

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in \mathbb{N},$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (29) и начальные условия (27) можно записать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K :

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)), \quad x(\tau, 0) = x^0(\tau) \in K,$$

где

$$K = \left\{ x(\tau, t) = (x_1(\tau, t), x_2(\tau, t), \dots, x_n(\tau, t), \dots) \mid \|x(\tau, t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) x_n(\tau, t) < \infty \right\},$$

$$H(x) = (H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x), \dots),$$

$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(\dots, \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \dots) \times \\ \times f_n(\dots, \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \dots) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(x(\tau, t)) f_n(x(\tau, t)),$$

$$g_n(\xi(\tau, t)) = a(t) \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} \lambda_{2k} - 2\xi_k(x_0, t)) \right) \left(4\xi_n(\tau, t) + 2\lambda_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} - \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)) \right) - \\ - b(t) \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} - \lambda_{2k} - 2\xi_k(x, t)) \right),$$

$$f_n(\xi(\tau, t)) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_0) \prod_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}},$$

$$\xi = \xi(\tau, t) = (\xi_1(\tau, t), \xi_2(\tau, t), \dots, \xi_n(\tau, t), \dots),$$

$$\sigma = \sigma(\tau, t) = (\sigma_1(\tau, t), \sigma_2(\tau, t), \dots, \sigma_n(\tau, t), \dots),$$

$$x = x(\tau, t) = (x_1(\tau, t), x_2(\tau, t), \dots, x_n(\tau, t), \dots).$$

Лемма. Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^4(\mathbb{R})$, то вектор-функция $H(x(\tau, t))$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K , т.е. существует константа $L > 0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau, t), y(\tau, t) \in K$ выполняется следующее неравенство:

$$\|H(x(\tau, t)) - H(y(\tau, t))\| \leq L \|x(\tau, t) - y(\tau, t)\|,$$

где

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \gamma_n < \infty.$$

Таким образом, условие Липшица выполняется. Поэтому решение задачи Коши (26), (27) для всех $t > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ существует и единственно.

Следствие 2. Лемма даёт метод решения задачи (1)–(3). Обозначим через λ_n , $n \geq 0$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \geq 1$, спектральные данные оператора $L(\tau, t)$. Сначала найдём спектральные данные λ_n , $n \geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$, для оператора $L(\tau)$. После этого в уравнении (29) и в начальных условиях (27) последовательно положим $\tau = x_0$ и $\tau = x_1$. Решив полученные задачи Коши, найдём $\xi_n(x_0, t)$ и $\xi_n(x_1, t)$. Затем из формулы (28) определим функции $q(x_0, t)$ и $q(x_1, t)$. Далее, подставив эти данные в систему уравнений (26) и решив задачу Коши (26), (27) при произвольном значении τ , получим $\xi_n(\tau, t)$, $n \geq 1$. Из формулы следов (28) найдём $q(\tau, t)$.

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (1)–(3) имеет решение. От этого предположения нетрудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $q(\tau, t)$ действительно удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 2. Покажем, что найденная функция $q(\tau, t)$ действительно удовлетворяет уравнению (1). Для этого используем систему уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi), \quad n \geq 1, \quad (30)$$

и вторую формулу следов

$$q^2(\tau, t) - \frac{1}{2} q_{\tau\tau}(\tau, t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau, t)). \quad (31)$$

Из систем (26) и (30) имеем

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = [-a(t)q(x_0, t)(2q(\tau, t) + 4\xi_n(\tau, t)) + b(t)q(x_1, t)] \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial \tau}. \quad (32)$$

Продифференцировав формулу первого следа (28) по t , с учётом (32) найдём

$$q_t = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \xi_k}{\partial t} = 2a(t)q(x_0, t) \left(2q(\tau, t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} \right) - 2b(t)q(x_1, t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}. \quad (33)$$

Далее продифференцировав по τ формулы следов (28) и (31), будем иметь

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = -q_{\tau}, \quad 4 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = \frac{1}{2} q_{\tau\tau} - 2qq_{\tau}.$$

Используя эти равенства, из (33) выводим

$$q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{\tau\tau} - 6qq_{\tau}) + b(t)q(x_1, t)q_{\tau}.$$

Замечание 3. Равномерная сходимость рядов в указанных выше формулах следует из (18) и оценки (см. [4, 27])

$$c_1 n \leq |\bar{h}_n(\xi)| \leq c_2 n, \quad n \geq 1,$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ не зависят от n .

Теорема 5. Пусть функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию

$$q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^4(\mathbb{R}).$$

Тогда существует решение $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, задачи (1)–(3), однозначно определяемое по формуле (28) и принадлежащее классу

$$C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0).$$

Следствие 3. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной π -периодической аналитической функцией, то решение $q(x, t)$ задачи (1)–(3) тоже является действительной аналитической функцией по x .

Это утверждение следует из теоремы Трубовица [27]. Так как длины лакун, соответствующие потенциалу $q_0(x)$, убывают экспоненциально, а потенциалу $q(x, t)$ соответствуют те же лакуны, то $q(x, t)$ является действительной аналитической функцией по x .

Следствие 4. Если число π/n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, является периодом начальной функции $q_0(x)$, то лакуны, номера которых не делятся на n , исчезают. Потенциалу $q(x, t)$ соответствуют те же лакуны, значит, по теореме Хохштадта, число π/n является периодом и для функции $q(x, t)$ по переменной x . Здесь лакуна $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ имеет номер k .

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x,$$

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x) \equiv 2\wp(x - \bar{x}_0) + \frac{c}{6},$$

где $\wp(z)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, т.е. однозонный потенциал, задаваемый спектром $E = [\lambda_0, \lambda_1] \cup [\lambda_2; \infty)$ и спектральными параметрами $\xi_0(0) \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $\sigma_0(0) = \pm 1$, а $c = +2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)$.

Нетрудно видеть, что решение этой задачи определяется по формуле

$$q(x, t) = 2\wp\left(x + \int_0^t b(\tau)q(x_1, \tau) d\tau + c \int_0^t a(\tau)q(x_0, \tau) d\tau - \bar{x}_0\right) + \frac{c}{6}.$$

Таким образом, при наличии нагруженного коэффициента или члена в уравнении КдФ скорость распространения периодической бегущей волны в зависимости от коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ увеличивается или уменьшается, а амплитуда не меняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1098.
2. Фаддеев Л.Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шрёдингера // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1964. Т. 73. С. 314–336.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
5. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure and Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467–490.
6. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. теор. и мат. физики. 1975. Т. 23. № 1. С. 51–68.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. эксп. и теор. физики. 1974. Т. 67. № 12. С. 2131–2143.
8. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев, 1987.
9. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980.
10. Ince E.L. A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1922. V. 21. P. 117–120.
11. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. Вып. 3. С. 41–51.
12. Grinevich P.G., Taimanov I.A. Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2008. V. 224. P. 125–138.

13. *Khasanov A.B. Yakshimuratov A.B.* The almos-periodicity of infinite-gap potentials of the Dirac operator // *Dokl. Math.* 1996. V. 54. № 2. P. 767–769.
14. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Обратная задача на полуоси для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом // *Дифференц. уравнения.* 2015. Т. 51. № 1. С. 23–33.
15. *Смирнов А.О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза // *Мат. сб.* 1994. Т. 185. № 8. С. 103–114.
16. *Lax P.* Almost periodic solutions of the KdF equation // *SCAM Rev.* 1976. V. 18. № 3. P. 351–575.
17. *Домрин А.В.* Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2010. Т. 74. № 3. С. 23–44.
18. *Нахушеев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // *Дифференц. уравнения.* 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.
19. *Нахушеев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
20. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2004. Т. 44. С. 694–716.
21. *Луговцов А.А.* Распространение нелинейных волн в газожидкостной среде. Точные и приближённые аналитические решения волновых уравнений // *Прикл. механика и техн. физика.* 2010. Т. 51. № 1. С. 54–61.
22. *Луговцов А.А.* Распространение нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде. Вывод волновых уравнений в приближении Кортевега–де Фриза // *Журн. теор. и мат. физики.* 2009. Т. 50. № 2. С. 188–197.
23. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., 1960.
24. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М., 1961.
25. *Станкевич И.В.* Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // *Докл. АН СССР.* 1970. Т. 192. № 1. С. 34–37.
26. *Ахизер Н.И.* Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 141. № 2. С. 262–266.
27. *Trubowtz E.* The inverse problem for periodic potentials // *Comm. Pure. Appl. Math.* 1977. V. 30. P. 321–337.
28. *Hochstadt H.* On the determination of Hill's equation from its spectrum // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1965. V. 19. P. 353–362.
29. *McKean H.P., Moerbeke P.* The spectrum of Hill's equation // *Invent. Math.* 1975. V. 30. № 3. P. 217–274.
30. *Flachka H.* On the inverse problem for Hill's operator // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1975. V. 59. № 4. P. 293–309.
31. *Hochstadt H.* Estimates on the stability interval's for the Hill's equation // *Proc. AMS.* 1963. V. 14. P. 930–932.
32. *Левитан Б.М., Гусейнов Г.Ш.* Вычисление главного члена асимптотики длины лакуны периодической задачи Штурма–Лиувилля // *Сердика Българско математическо списание.* 1977. Т. 3. С. 273–280.
33. *Hochstadt H.* A generalization of Borg's inverse theorem for Hill's equations // *J. Math. Anal. and Appl.* 1984. V. 102. P. 599–605.
34. *Borg G.* Eine umkehrung der Sturm–Liouvillschen eigenwertaufgabe. Bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte // *Acta Math.* 1946. V. 78. P. 1–96.

Самаркандский государственный университет,
Узбекистан,
Ургенчский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 29.12.2020 г.
После доработки 23.10.2023 г.
Принята к публикации 13.11.2023 г.