

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2023 г. А. А. Косов, Э. И. Семенов

Рассматриваются уравнения и системы эллиптического типа со степенными нелинейностями. Такие уравнения встречаются при моделировании распределённых формаций роботов, в химической кинетике, в биологии, астрофизике и многих других областях. Изучается задача построения многомерных точных решений. Предлагается использовать специального вида анзацы, сводящие задачу к решению систем алгебраических уравнений. Получен ряд многопараметрических семейств новых точных многомерных решений (как радиально симметричных, так и анизотропных), представимых явными формулами. Приводятся примеры, иллюстрирующие найденные точные решения.

DOI: 10.31857/S037406412312004X, EDN: NVACCC

**Введение.** В последнее десятилетие наметился существенный прогресс в направлении развития техники, связанном с использованием организованных управляемых групп роботов, называемых формациями, широко применяемым во многих областях. К числу характерных представителей таких формаций относятся группы автономных мобильных роботов, стаи и рои беспилотных летательных аппаратов и т.п. В недавнем подробном (181 источник в списке литературы) обзоре [1] отмечается, что теоретические научные исследования роевой робототехники нацелены в основном на математическое моделирование поведения роя. Дифференциальные уравнения в частных производных начали использоваться при моделировании движения формаций подвижных объектов с распределёнными характеристиками. В работе [2] приводится одномерное уравнение в частных производных Фоккера–Планка, описывающее диффузию плотности агентов, а для описания изменения плотности роя используется линейное одномерное уравнение реакции–диффузии. В статье [3] для моделирования формации с управлением по принципу отклонения от движения лидера применялось одномерное уравнение параболического типа.

В обзоре [4] отмечается, что в последние годы при моделировании роевой робототехники стали использоваться уравнения в частных производных, однако одна из основных проблем при этом заключается в том, что находить точные решения удаётся только в небольшом числе специальных случаев. Ранее нами [5] была предложена математическая модель процесса распространения двух взаимодействующих распределённых формаций роботов с некоторой базы в окружающее пространство, описываемая системой двух уравнений параболического типа. Были построены параметрические семейства точных решений, которые можно использовать для отыскания законов управления граничными условиями, обеспечивающих распространение формаций на область заданных размеров за заданное время. Если же плотности на границе будут поддерживаться постоянными, то с течением времени плотности формаций, удовлетворяющие параболической системе, могут стабилизироваться на стационарных решениях, которые удовлетворяют эллиптической системе. Поэтому точные решения эллиптической системы, соответствующей стационарному случаю предложенной в [5] модели взаимодействующих формаций с распределёнными параметрами, описываемых параболической системой, представляют несомненный интерес для роевой робототехники. Кроме того, эллиптические системы и отдельные уравнения такого степенного вида встречаются во многих других моделях и прикладных задачах. Построение многомерных точных решений таких эллиптических систем и отдельных уравнений со степенными нелинейностями и рассматривается в данной статье.

**1. Изучаемые уравнения и постановка задачи.** Будем рассматривать задачу построения точных многомерных решений нелинейной системы двух эллиптических уравнений вида

$$\Delta U = \alpha U^p + \gamma U^{a_1} V^{b_1}, \quad \Delta V = \beta V^q + \delta U^{a_2} V^{b_2}, \quad (1)$$

где  $U = U(\mathbf{x})$ ,  $V = V(\mathbf{x})$  – искомые функции,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ ;  $p, q, a_1, a_2, b_1, b_2$  – параметры нелинейности;  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0, \delta \neq 0$  – произвольные коэффициенты. Система (1) является стационарным аналогом нелинейной эволюционной модели реакции–диффузии, в которой члены  $\gamma U^{a_1} V^{b_1}$  и  $\delta U^{a_2} V^{b_2}$  отвечают за взаимодействие (реакцию). В статье будут также представлены результаты по построению точных решений отдельных эллиптических уравнений со степенной нелинейностью следующих видов:

$$\Delta U = \alpha U^\lambda, \quad (2)$$

$$\Delta U = \alpha U^\lambda + \gamma U^{2\lambda-1}, \quad (3)$$

которые получаются из системы (1) при некоторых значениях коэффициентов. В уравнениях (2), (3) предполагается, что  $\lambda \neq 1$ , в противном случае они становятся линейными и в рамках данного исследования интереса не представляют.

Актуальность построения точных многомерных решений нелинейной системы (1) и уравнений (2), (3), помимо ценности и значимости самих точных решений, обусловлена также широким спектром применения указанных уравнений и систем в различных областях физики и механики. Например, (2) является стационарным аналогом параболического уравнения Фуджиты [6] и встречается в теории горения и теории массопереноса с объёмной реакцией  $\lambda$ -го порядка в плоском случае [7, с. 5, 57]. Уравнение (2) с  $\lambda = \lambda^*$ , где

$$\lambda^* = \frac{n+2}{n-2}, \quad (4)$$

встречается в огромном количестве публикаций, так как  $\lambda^*$  является критическим показателем Соболева [8] с точки зрения вложения  $H_0^1(\Omega) \subset L^{\lambda^*}(\Omega)$ , где  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , в которой задано уравнение (2) с  $\alpha = -1$ . Отметим, что в этой статье мы построим точное многомерное радиально-симметричное решение уравнения (2) с  $\lambda = \lambda^*$  для любого  $n > 2$  и анизотропное по пространственным переменным точное решение для показателя  $\lambda = (m+2)/(m-2)$ ,  $m \leq n$ ,  $m \neq 2$ . В случае  $\lambda = 2$  и  $n = 2$  уравнение (2) описывает пространственные околосвуковые течения идеального политропного газа [9, 10]. В статье [10] отмечается, что уравнение (2) с параметром  $\lambda = 2$  представляет определённый интерес и с точки зрения теории нелинейных уравнений как уравнение с ведущим чётным нелинейным оператором. Уравнение (2) в литературе иногда называют уравнением Эмдена–Фаулера (Лейна–Эмдена), при отрицательных  $\lambda$  – сингулярным уравнением Эмдена–Фаулера, точные радиальные решения которого для некоторых значений  $\lambda$  представляют интерес в астрофизике [11, 12]. В случае  $\lambda = -1$  получим уравнение, которое возникает при исследовании одной нелинейной системы двух параболических уравнений четвёртого порядка [13] (см. пример 4). Уравнение (2) с показателем  $\lambda = 5$  исследовалось в работе [14]. При  $\lambda = 2$  старшая степень в правой части уравнения (3) будет третьей, такого рода нелинейности встречаются в популяционной динамике, когда рассматриваются кубические функции роста [15, 16]. В статье [17] рассматривалось уравнение

$$-\Delta U = U^s + \varepsilon U^r, \quad s = \lambda^*, \quad 1 < r < s, \quad n \geq 3,$$

которое получается из уравнения (3) в случае  $\lambda = r = n/(n-2)$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -\varepsilon$ . Отдельное внимание в [17] уделено случаю  $s = 5$  и  $r = 3$ , возникающему при рассмотрении задачи в трёхмерном координатном пространстве ( $n = 3$ ).

Так же как и отдельные уравнения (2), (3), нелинейная эллиптическая система (1) встречается во многих задачах физики и биологии. Теория реакции–диффузии для формирования

биологических паттернов была применена А. Тьюрингом в его основополагающей работе о химических основах морфогенеза [18]. Эта теория получила большое развитие и теперь для задач математического моделирования паттернов используются различные вариации безразмерной двухвидовой модели Тьюринга [19]

$$U_t = \Delta U + f(U, V), \quad V_t = \Delta V + g(U, V). \quad (5)$$

Система (1) является стационарным аналогом модели Тьюринга (5), в случае когда кинетические члены реакции  $f, g$  задаются степенными функциями. Во многих публикациях встречается нелинейная система вида

$$\Delta U = \gamma V^a, \quad \Delta V = \delta U^b, \quad (6)$$

которую называют расширением (обобщением) уравнения Эмдена–Фаулера [20, 21]. Если в (1) положить  $\alpha = \beta = 0$ ,  $a_1 = b_2 = 0$ ,  $a_2 = b_1 = 1/2$ , то получим частный случай системы (6) вида  $\Delta U = \gamma V^{1/2}$ ,  $\Delta V = \delta U^{1/2}$ . Важным источником систем эллиптических уравнений типа (1) являются нелинейные системы параболических уравнений со степенными нелинейностями. Так, при условии  $\lambda \neq -1$ ,  $\mu \neq -1$ , полагая в формулах (1)

$$p = \frac{1}{1+\lambda}, \quad a_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad b_1 = \frac{\mu}{1+\mu}, \quad q = \frac{1}{1+\mu}, \quad a_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad b_2 = \frac{1-\mu}{1+\mu},$$

получаем систему вида

$$\Delta U = U^{(1-\lambda)/(1+\lambda)} (\alpha U^{\lambda/(1+\lambda)} + \gamma V^{\mu/(1+\mu)}), \quad \Delta V = V^{(1-\mu)/(1+\mu)} (\delta U^{\lambda/(1+\lambda)} + \beta V^{\mu/(1+\mu)}), \quad (7)$$

возникающую при исследовании стационарных решений параболической системы двух нелинейных уравнений

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u) + a u^{1-\lambda} v^\mu - c u, \quad v_t = \nabla \cdot (v^\mu \nabla v) + b u^\lambda v^{1-\mu} - d v. \quad (8)$$

Систему (8) можно использовать [5] в качестве математической модели распространения взаимодействующих распределённых формаций автономных роботов с некоторой базы в окружающее пространство (при  $n = 3$ ) или на прилегающую территорию (при  $n = 2$ ). При этом  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $v(\mathbf{x}, t)$  трактуются как плотности формаций. Параболические системы вида (8) описывают также процессы нелинейной диффузии в реагирующих двухкомпонентных сплошных средах [22–26], где  $u = u(\mathbf{x}, t)$ ,  $v = v(\mathbf{x}, t)$  – функции, которые можно трактовать как концентрации взаимодействующих друг с другом компонентов некоторой смеси веществ;  $\nabla$  – градиент;  $a, b, c, d$  – некоторые параметры, знаки которых характеризуют либо расхождение, либо синтез компоненты смеси в ходе реакции. Стационарные решения  $u(\mathbf{x})$ ,  $v(\mathbf{x})$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$0 = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u) + a u^{1-\lambda} v^\mu - c u, \quad 0 = \nabla \cdot (v^\mu \nabla v) + b u^\lambda v^{1-\mu} - d v. \quad (9)$$

Нелинейная эллиптическая система (7) получается из (9) преобразованием  $u^{1+\lambda} = U$ ,  $v^{1+\mu} = V$  при условии  $\lambda \neq -1$ ,  $\mu \neq -1$ . Отметим, что в статье [27] исследовался частный случай системы (8) при  $c = d = 0$ , для которой строились точные многомерные решения с использованием конструкции

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Как будет показано ниже, конструкцию вида (10) можно использовать для построения точных многомерных решений уравнений (2), (3) и нелинейных эллиптических систем (7). Ранее [28–30] функция  $W(\mathbf{x})$  уже использовалась нами при построении точных многомерных решений уравнения нелинейной теплопроводности, систем реакции–диффузии и системы нелинейных уравнений в частных производных первого порядка методом обобщённого разделения переменных. Отметим также, что при равенствах  $\lambda = -1$  и  $\mu = -1$  система уравнений (9) сводится

к системе с экспоненциальными нелинейностями, точные решения которой построены в работе [31].

Пусть  $p \neq 1$ ,  $q \neq 1$ , тогда для построения точных решений системы (1) и отдельно каждому из уравнений (2), (3) будем использовать метод редукции и степенные анзацы

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^l, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^k \quad (11)$$

с квадратичными функциями

$$W_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A_i \mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}_i, \mathbf{x}) + C_i, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

При этом ненулевые числовые симметрические матрицы  $A_i$  размера  $n \times n$ , постоянные векторы  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^n$  и константы  $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , подлежат определению. Очевидно, что анзацы (11) будут удовлетворять системе (1) не для всех значений параметров  $p$ ,  $q$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $l$ ,  $k$ . Чтобы осуществить редукцию к алгебраическим уравнениям, для нахождения коэффициентов функций (12) должны выполняться следующие равенства:

$$pl + 2 - l = 1 \quad \text{или} \quad pl + 2 - l = 0, \quad (13)$$

$$qk + 2 - k = 1 \quad \text{или} \quad qk + 2 - k = 0, \quad (14)$$

$$a_1 = \frac{l-2}{l}, \quad b_1 = \frac{1}{k}, \quad a_2 = \frac{1}{l}, \quad b_2 = \frac{k-2}{k}. \quad (15)$$

С учётом формул (13)–(15) получим четыре вида различных систем, для которых можно осуществить необходимую редукцию с использованием анзацев (11). Так, для первых равенств соотношений (13), (14) с учётом формул (15) система (1) запишется как

$$\text{I.} \quad \Delta U = \alpha U^p + \gamma U^{2p-1} V^{1-q}, \quad \Delta V = \beta V^q + \delta U^{1-p} V^{2q-1}, \quad (16)$$

при этом степенные анзацы для этой системы имеют вид

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{1/(1-p)}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{1/(1-q)}. \quad (17)$$

Для трёх оставшихся возможных случаев система (1) получит следующие варианты правых частей и соответствующие им анзацы:

$$\text{II.} \quad \Delta U = \alpha U^p + \gamma U^{2p-1} V^{(1-q)/2}, \quad \Delta V = V^q (\beta + \delta U^{1-p}), \quad (18)$$

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{1/(1-p)}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{2/(1-q)};$$

$$\text{III.} \quad \Delta U = U^p (\alpha + \gamma V^{1-q}), \quad \Delta V = \beta V^q + \delta U^{(1-p)/2} V^{2q-1}, \quad (19)$$

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{2/(1-p)}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{1/(1-q)};$$

$$\text{IV.} \quad \Delta U = U^p (\alpha + \gamma V^{(1-q)/2}), \quad \Delta V = V^q (\beta + \delta U^{(1-p)/2}), \quad (20)$$

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{2/(1-p)}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{2/(1-q)}.$$

Напомним, что в формулах (16)–(20) мы полагаем  $p \neq 1$ ,  $q \neq 1$ . Значения  $p = 1$ ,  $q = 1$  также представляют интерес, при этом функции  $F$  и  $G$  будут следующими:  $F(U, V) = \gamma U \ln V$ ,  $G(U, V) = \delta V \ln U$ . В этом случае для построения точных решений системы

$$\Delta U = \alpha U + \gamma U \ln V, \quad \Delta V = \beta V + \delta V \ln U \quad (21)$$

мы должны применять экспоненциальные анзацы

$$U(\mathbf{x}) = \exp(W_1(\mathbf{x})), \quad V(\mathbf{x}) = \exp(W_2(\mathbf{x})),$$

где функции  $W_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2$ , задаются формулой (12). Положим  $p = 1/(1 + \lambda)$ ,  $\lambda \neq \{-1; 0\}$ ,  $q = 1/(1 + \mu)$ ,  $\mu \neq \{-1; 0\}$ , тогда система (16) примет вид (7). Как уже было отмечено, система вида (7) возникает при исследовании стационарных решений параболической системы (8) со степенными нелинейностями. Из-за ограничения объёма статьи построение точных решений проведём только для нелинейной системы вида (7) и отдельно для уравнений (2), (3), которые получаются из (16) при определённых значениях параметров и коэффициентов.

Изложение результатов проведём последовательно: сначала будем искать точные многомерные решения нелинейных эллиптических уравнений (2), (3), затем перейдём к построению точных многомерных решений нелинейной эллиптической системы (7).

**2. Многомерные точные решения эллиптических уравнений со степенной нелинейностью.** Используя конструкцию вида (10), построим точные многомерные решения эллиптических уравнений (2), (3) со степенной нелинейностью для параметра  $\lambda \neq 1$ .

**Утверждение 1.** *Нелинейное эллиптическое уравнение (2) с параметром  $\lambda \neq 1$  имеет частное точное многомерное решение*

$$U(\mathbf{x}) = \left[ \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C \right]^{1/(1-\lambda)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (22)$$

где ненулевая числовая симметрическая матрица  $A$ , постоянный вектор  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$  и константа  $C \in \mathbb{R}$  удовлетворяют алгебраической системе

$$\Theta A + \frac{2\lambda}{1-\lambda} A^2 = 0, \quad \Theta \mathbf{B} + \frac{2\lambda}{1-\lambda} A\mathbf{B} = 0, \quad \Theta C + \frac{\lambda}{1-\lambda} \|\mathbf{B}\|^2 = 0, \quad (23)$$

где  $\Theta = \text{tr } A - \alpha(1 - \lambda)$ ,  $\text{tr } A$  – след матрицы  $A$ ,  $\|\cdot\|$  – евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Подставив функцию

$$U(\mathbf{x}) = [W(\mathbf{x})]^{1/(1-\lambda)} \quad (24)$$

в уравнение (2), после элементарных преобразований придём к равенству

$$W\Delta W + \frac{\lambda}{1-\lambda} \|\nabla W\|^2 - \alpha(1-\lambda)W = 0. \quad (25)$$

Пусть функция  $W(\mathbf{x})$  задаётся формулой (10), в которой матрица  $A$  является симметрической. В силу симметричности матрицы  $A$  из (10) прямым вычислением находим

$$\|\nabla W(\mathbf{x})\|^2 = (A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(AB, \mathbf{x}) + \|\mathbf{B}\|^2, \quad \Delta W(\mathbf{x}) = \text{tr } A. \quad (26)$$

С учётом соотношений (26), приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\mathbf{x}$ , равенство (25) сводится к системе алгебраических уравнений (23). Утверждение доказано.

Рассмотрим разрешимость матричного уравнения (23) в классе вещественных матриц. Отметим, что оно всегда имеет тривиальное решение  $A = 0$ , поэтому далее будем рассматривать только нетривиальные решения этого уравнения в предположении  $\text{tr } A \neq 0$ .

**Утверждение 2.** *Пусть  $E_m$  – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  единиц и  $n - m$  нулей. Тогда при выполнении условия*

$$(1 - \lambda)m + 2\lambda \neq 0 \quad (27)$$

матрица

$$A = \nu S E_m S^m, \quad \nu = \frac{\alpha(1 - \lambda)^2}{(1 - \lambda)m + 2\lambda}, \quad (28)$$

где  $S$  – произвольная ортогональная матрица, является решением матричного уравнения (23).

**Доказательство.** Пусть выполнено условие (27), тогда след матрицы  $A$ , определяемой по формуле (28), имеет вид

$$\operatorname{tr} A = m\nu \equiv \alpha m(1 - \lambda)^2 / ((1 - \lambda)m + 2\lambda).$$

С учётом этого соотношения матричное уравнение (23) запишется как  $\nu A = A^2$ . Легко проверить, что решением этого матричного уравнения является  $A = \nu P$ , где  $P$  – произвольная идемпотентная матрица, т.е. матрица, удовлетворяющая равенству  $P^2 = P$ . Известно [32, с. 196], что любую идемпотентную матрицу  $P$  можно записать как  $P = ME_m M^{-1}$ , где  $M$  – произвольная невырожденная матрица порядка  $n$ ,  $E_m$  – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  единиц и  $n - m$  нулей;  $E_m$  также является идемпотентной:  $E_m^2 = E_m$ . Поскольку нас интересуют только симметрические матрицы  $A$ , то идемпотентные матрицы  $P$  мы должны взять также симметрическими, т.е.  $P = SE_m S^T$ , где  $S$  – произвольная ортогональная матрица. Отсюда получим окончательный вид матрицы  $A$ , определяемой формулой (28). Утверждение доказано.

Векторные уравнения (23) представляют собой системы  $n$  линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент  $b_1, \dots, b_n$  искомого вектора  $\mathbf{B}$ . Для любой фиксированной матрицы (28) с  $\operatorname{rank} A = m < n$  всегда существует нетривиальное решение линейной однородной системы, причём компоненты  $b_1, \dots, b_m$  вектора  $\mathbf{B}$  могут быть выбраны произвольно из  $m$ -мерного линейного многообразия. В случае когда  $\operatorname{rank} A = m \equiv n$ , т.е. при  $E_m \equiv E$ , линейная однородная система уравнений имеет решение – произвольный вектор  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ . После того как последовательно найдены решения матричного и векторного уравнений, постоянные  $C$  определяются из скалярных уравнений (23) единственным образом.

**Замечание.** Если  $m = 1$ , то условие (27) равносильно условию  $\lambda \neq -1$ . Следовательно, если в уравнении (2)  $\lambda \neq -1$ , то в формуле точного решения (22) мы должны использовать матрицу  $A$  с условием  $\operatorname{rank} A > 1$ . Если  $m = 2$ , то условие (27) выполнено для всех  $\lambda$ . Если  $m > 2$ , то условие (27) равносильно условию  $\lambda \neq m/(m-2)$ . Следовательно, если в уравнении (2)  $\lambda = m/(m-2)$ ,  $m > 2$ , то в формуле точного решения (22) мы должны использовать матрицу  $A$ , ранг которой не равен  $m$ . Если  $\lambda = n/(n-2)$ ,  $n > 2$ , то в формуле точного решения (22) мы должны использовать матрицу  $A$ , ранг которой меньше  $n$  и не равен  $m$ .

**Следствие 1.** Нелинейное эллиптическое уравнение (2) с параметром  $\lambda \neq 1$ ,  $\lambda \neq n/(n-2)$ ,  $n > 2$ , имеет частное точное радиально-симметричное решение

$$U(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(1-\lambda)n+4\lambda} \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + \frac{(1-\lambda)n+2\lambda}{2\alpha(1-\lambda)^2} \|\mathbf{b}\|^2 \right]^{1/(1-\lambda)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  – произвольный постоянный вектор.

Покажем, что при некоторых значениях параметра  $\lambda$  уравнение (2) помимо решения (22) обладает и другими точными решениями. Перед тем как сформулировать соответствующий результат, введём для удобства матрицу  $E_{n-m} = E - E_m$ , где  $E$  – единичная матрица.

**Утверждение 3.** Нелинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta U = \alpha U^{(m+2)/(m-2)}, \quad (29)$$

где  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq 2$ ,  $m \leq n$ , имеет частное точное многомерное решение

$$U(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\nu}{2} (SE_m S^m \mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{B}\|^2 - \frac{2\alpha}{\nu m(m-2)} \right]^{1-m/2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (30)$$

Здесь  $E_m$  – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены  $m \in \{1, 3, 4, \dots, n\}$  единиц и  $n - m$  нулей;  $S$  – произвольная ортогональная матрица;  $\mathbf{B}$  – постоянный вектор, удовлетворяющий системе линейных алгебраических уравнений  $SE_{n-m} S^T \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ;  $\nu \neq 0$  – произвольный параметр.

**Доказательство.** Подстановкой  $U(\mathbf{x}) = [\Omega(\mathbf{x})]^{1-m/2}$ ,  $m \neq 2$ , уравнение (29) после элементарных преобразований сводится к равенству

$$\Omega \Delta \Omega - \frac{m}{2} \|\nabla \Omega\|^2 + \frac{2\alpha}{m-2} = 0. \quad (31)$$

Так как

$$\Omega(\mathbf{x}) = \frac{\nu}{2} (SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{B}\|^2 - \frac{2\alpha}{\nu m(m-2)},$$

то прямым вычислением находим

$$\|\nabla \Omega\|^2 = \nu^2 (SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\nu (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) + \|\mathbf{B}\|^2, \quad \Delta \Omega = m\nu.$$

С учётом этих соотношений равенство (31) упростится и примет вид

$$(\mathbf{B}, \mathbf{x}) - (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = 0.$$

Для этого соотношения справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}, \mathbf{x}) - (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) &= (E\mathbf{B}, \mathbf{x}) - (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = (SE S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) - (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = \\ &= (S(E - E_m)S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = (SE_{n-m} S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

Осталось показать, что система линейных уравнений  $SE_{n-m} S^T \mathbf{B} = \mathbf{0}$  является разрешимой. Если  $m = n$ , то матрица коэффициентов этой системы является нулевой, следовательно, её решением является произвольный вектор  $\mathbf{B}$ . Если  $m < n$ , то  $\text{rank } SE_{n-m} S^T = n - m < n$  и для указанной системы алгебраических уравнений всегда существует нетривиальное решение, причём компоненты  $b_1, \dots, b_{n-m}$  вектора  $\mathbf{B}$  могут быть выбраны произвольно из  $(n - m)$ -мерного линейного многообразия. Утверждение доказано.

**Следствие 2.** Пусть  $m = n$ , тогда из утверждения 3 следует, что нелинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta U = \alpha U^{(n+2)/(n-2)} \quad (32)$$

имеет частное точное радиально-симметричное решение

$$U(\mathbf{x}) = \left[ \frac{q}{2} \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2q} \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{2\alpha}{qn(n-2)} \right]^{1-n/2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n > 2, \quad (33)$$

где  $\mathbf{b}$  – произвольный постоянный вектор,  $q \neq 0$  – произвольная постоянная.

Как было отмечено в п. 1, уравнение (32) встречается в огромном количестве публикаций, так как показатель степени  $\lambda^*$  является критическим с точки зрения вложения Соболева. Ещё одна интересная особенность показателя (4) состоит в том, что при построении радиальных решений уравнения (2) соответствующее ему редуцированное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) допускает разделение переменных только при значении  $\lambda = \lambda^*$ . Будем отыскивать радиально-симметричные решения уравнения (2) в виде

$$U(\mathbf{x}) = U(\xi), \quad \xi = \|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}. \quad (34)$$

После подстановки функции (34) в (2) и несложных преобразований придём к одной из форм уравнения Эмдена–Фаулера

$$\frac{d^2 U(\xi)}{d\xi^2} + \frac{n-1}{\xi} \frac{dU(\xi)}{d\xi} = \alpha U(\xi)^\lambda. \quad (35)$$

Отметим, что уравнение Эмдена–Фаулера в виде (35) приведено в справочнике [33, с. 497] и статье [12], где оно записано для случая  $n = 3$  и  $\alpha = \pm 1$ . В [33, с. 497, 498] указаны два

частных точных решения уравнения (35) для  $\lambda = 2$  и  $\lambda = 5$ . Кроме того, при  $n = 3$  заменой  $U(\xi) = \xi^{-1}V(\xi)$  ОДУ (35) запишется как

$$\frac{d^2V(\xi)}{d\xi^2} = \alpha\xi^{1-\lambda}V(\xi)^\lambda. \quad (36)$$

Уравнение Эмдена–Фаулера вида (36) встречается в монографии [34, с. 171] и справочнике [35, с. 236]. ОДУ (35) является обобщённо-однородным и подстановкой  $U(\xi) = \xi^k U(\eta)$ , где  $\eta = \ln \xi$ ,  $k = -2/(\lambda - 1)$ , приводится к автономному виду

$$\frac{d^2U(\eta)}{d\eta^2} + \frac{\lambda(n-2) - (n+2)}{\lambda-1} \frac{dU(\eta)}{d\eta} = \frac{2(\lambda(n-2) - n)}{(\lambda-1)^2} U(\eta) + \alpha U(\eta)^\lambda,$$

а заменой  $dU(\eta)/d\eta = Y(U)$  сводится к ОДУ первого порядка

$$Y(U) \frac{dY(U)}{dU} + \frac{\lambda(n-2) - (n+2)}{\lambda-1} Y(U) = \frac{2(\lambda(n-2) - n)}{(\lambda-1)^2} U + \alpha U^\lambda.$$

Видно, что это ОДУ является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными в случае  $\lambda(n-2) - (n+2) = 0$ , т.е. когда параметр  $\lambda$  задаётся соотношением (4). Положив  $\lambda = \lambda^*$ , придём к следующей квадратуре:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{aU^2 + bU^k + C_1}} = \eta + C_2, \quad a = \frac{1}{4}(n-2)^2, \quad b = \frac{\alpha(n-2)}{n}, \quad k = \frac{2n}{n-1}, \quad (37)$$

где  $C_1, C_2$  – константы интегрирования. При  $C_1 = 0$  интеграл в формуле (37) легко вычисляется:

$$\int \frac{dU}{|U|\sqrt{a + bU^{k-2}}} = \begin{cases} \frac{2}{(k-2)\sqrt{a}} \operatorname{Arth}\left(\frac{\sqrt{a + bU^{k-2}}}{\sqrt{a}}\right), & \text{если } U < 0, \\ -\frac{2}{(k-2)\sqrt{a}} \operatorname{Arth}\left(\frac{\sqrt{a + bU^{k-2}}}{\sqrt{a}}\right), & \text{если } U > 0. \end{cases}$$

В итоге мы получим частное точное решение уравнения (32), которое является частным случаем решения (33) при нулевом векторе  $\mathbf{b}$ .

Теперь перейдём к построению точных многомерных решений нелинейного эллиптического уравнения (3), для которого справедливо

**Утверждение 4.** *Нелинейное эллиптическое уравнение (3) с параметрами  $\lambda \neq 1$ ,  $\alpha\gamma \neq 0$  имеет частное точное многомерное решение (22), где ненулевая числовая симметрическая матрица  $A$ , постоянный вектор  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяют первым двум уравнениям алгебраической системы (23), а константа  $C \in \mathbb{R}$  находится из скалярного уравнения*

$$\Theta C + \frac{\lambda}{1-\lambda} \|\mathbf{B}\|^2 - \gamma(1-\lambda) = 0,$$

где  $\Theta = \operatorname{tr} A - \alpha(1-\lambda)$ ,  $\operatorname{tr} A$  – след матрицы  $A$ .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 1. Как видно, результаты утверждений 1, 4 совпадают в случае  $\gamma = 0$ .

**Следствие 3.** *Нелинейное эллиптическое уравнение (3) с параметрами  $\lambda \neq 1$ ,  $\lambda \neq n/(n-2)$ ,  $n > 2$ ,  $\alpha\gamma \neq 0$  имеет частное точное радиально-симметричное решение*

$$U(\mathbf{x}) = \left[ \frac{1}{2} \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)n + 2\lambda} \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + \frac{(1-\lambda)n + 2\lambda}{2\alpha(1-\lambda)^2} \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{\gamma((1-\lambda)n + 2\lambda)}{2\alpha\lambda} \right]^{1/(1-\lambda)},$$

где  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  – произвольный постоянный вектор.

В заключение этого пункта покажем, что степенной анзац вида (24) является не единственным, с помощью которого можно строить точные многомерные решения уравнения (2). Пусть  $U = f(W)$  и аргумент  $W$  задаётся формулой (10), причём числовая симметрическая матрица  $A$ , постоянный вектор  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$  и константа  $C \in \mathbb{R}$  удовлетворяют алгебраической системе

$$\sigma A - 2A^2 = 0, \quad \sigma \mathbf{B} - 2A\mathbf{B} = 0, \quad \sigma C - |\mathbf{B}|^2 = 0, \quad (38)$$

где  $\sigma \neq 0$  – произвольная постоянная. Тогда после подстановки функции  $U = f(W)$  в уравнение (2) придём к равенству

$$\sigma W \frac{d^2 f(W)}{dW^2} + \tau \frac{df(W)}{dW} = \alpha [f(W)]^\lambda. \quad (39)$$

Здесь  $\tau \equiv \text{tr } A = \text{const}$ . Соотношение (39) можно рассматривать как ОДУ для определения функции  $f(W)$ , которое является обобщённо-однородным. ОДУ (39) подстановкой  $f(W) = W^{1/(1-\lambda)} g(\xi)$ ,  $\xi = \ln W$ ,  $\lambda \neq 1$ , приводится к автономному уравнению для функции  $g(\xi)$ :

$$\sigma g''(\xi) + \left( \frac{\sigma(1+\lambda)}{1-\lambda} + \tau \right) g'(\xi) = \alpha g^\lambda(\xi) - \frac{1}{1-\lambda} \left( \frac{\sigma\lambda}{1-\lambda} + \tau \right) g(\xi). \quad (40)$$

Легко видеть, что ненулевая константа  $g_0$ , которая удовлетворяет равенству

$$\alpha g_0^\lambda - \frac{1}{1-\lambda} \left( \frac{\sigma\lambda}{1-\lambda} + \tau \right) g_0 = 0,$$

является частным решением ОДУ (40). Определяя из этого равенства значение константы  $g_0$ , получаем по формуле  $f(W) = g_0 W^{1/(1-\lambda)}$ ,  $\lambda \neq 1$ , частное точное решение ОДУ (39) вида

$$f(W) = \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{\sigma\lambda + (1-\lambda)\tau} W \right]^{1/(1-\lambda)}. \quad (41)$$

Отметим, что решению (41) отвечает степенной анзац вида (24). Перейдём к поиску нетривиальных решений ОДУ (40), которое заменой  $g'(\xi) = Z(g)$  сводится к уравнению Абеля второго рода

$$\sigma Z(g)Z'(g) + \varepsilon Z(g) = \alpha g^\lambda - \frac{1}{1-\lambda} \left( \frac{\sigma\lambda}{1-\lambda} + \tau \right) g, \quad (42)$$

где  $\varepsilon = \sigma(1+\lambda)/(1-\lambda) + \tau$ . Решения уравнения (42) в параметрическом виде для  $\varepsilon \neq 0$  и некоторых показателей  $\lambda$  приведены в справочнике [35, с. 70, 83]. Видно, что ОДУ (42) при  $\varepsilon = 0$  является уравнением с разделяющимися переменными. Равенство  $\varepsilon = 0$  возможно в двух случаях: 1)  $\lambda = -1$  и  $\tau = 0$ ; 2)  $\sigma = \tau(\lambda - 1)/(\lambda + 1)$ , при этом  $\lambda \neq -1$  и  $\tau \neq 0$ . В случае 1) всё сводится к следующей квадратуре:

$$\Phi_1(g) \equiv \int \left( \frac{2\alpha}{\sigma} \ln g + \frac{1}{4} g^2 + C_1 \right)^{-1/2} dg = \xi + C_2.$$

Очевидно, что ни при каких значениях параметров  $\alpha \neq 0$ ,  $\sigma \neq 0$  и постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  из уравнения  $\Phi_1(g) = \xi + C_2$  функцию  $g(\xi)$  выразить не удастся и, следовательно, этот случай интереса не представляет. Пусть имеет место случай 2), тогда уравнение (42) легко интегрируется и мы придём к квадратуре

$$\Phi_2(g) \equiv \int \frac{dg}{\sqrt{Ag^{\lambda+1} + Bg^2 + C_1}} = \xi + C_2, \quad A = \frac{2\alpha}{\tau(\lambda - 1)}, \quad B = \frac{1}{(\lambda - 1)^2}, \quad (43)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  – константы интегрирования. Очевидно, что интеграл в равенстве (43) вычисляется только при некоторых значениях параметра  $\lambda \neq 1$ . При этом важно не только вычислить

интеграл (43), но и из уравнения  $\Phi_2(g) = \xi + C_2$  выразить функцию  $g(\xi)$  в явном виде, а для этого могут потребоваться дополнительные условия на постоянные  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $C_1$ . Пусть  $C_1 = 0$ , тогда из соотношения (43) находим

$$g_{1,2}(\xi) = \left[ \frac{\tau}{2\alpha(\lambda-1)} \left( \Phi\left(\frac{\xi}{2} + C_2\right) - 1 \right) \right]^{1/(\lambda-1)},$$

где  $\Phi(\cdot) = \{\text{th}^2(\cdot), \text{cth}^2(\cdot)\}$ . С учётом формулы  $f(W) = g(\xi)W^{1/(1-\lambda)}$  имеем

$$f_{1,2}(W) = \left[ \frac{\tau}{2\alpha(\lambda-1)W} \left( \Phi\left(\frac{1}{2} \ln W + C_2\right) - 1 \right) \right]^{1/(\lambda-1)}.$$

Так как  $U = f(W)$ , то в этом частном случае уравнение (2) с параметрами  $\lambda \neq \pm 1$  обладает частными точными многомерными решениями

$$U_1(\mathbf{x}) = \left[ -\frac{\chi}{(C_3 W(\mathbf{x}) + 1)^2} \right]^{1/(\lambda-1)}, \quad U_2(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\chi}{(C_3 W(\mathbf{x}) - 1)^2} \right]^{1/(\lambda-1)}, \quad (44)$$

где  $\chi = 2(\lambda+1)\sigma C_3/(\alpha(\lambda-1)^2)$ ,  $C_3 = \exp(C_2)$ ,  $C_2$  – произвольная постоянная, функция  $W(\mathbf{x})$  задаётся формулой (10), а ненулевая числовая симметрическая матрица  $A$ , постоянный вектор  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$  и константа  $C \in \mathbb{R}$  определяются из алгебраической системы (38) с постоянной  $\sigma \neq 0$ . Заметим, что матричное уравнение системы (38) подобно матричному уравнению (23). Используя утверждение 2, получаем, что решение матричного уравнения системы (38) задаётся формулой

$$A^* = \frac{\sigma}{2} S E_m S^T,$$

где  $\tau = m\sigma/2$  – след матрицы  $A^*$ . С другой стороны, в рассматриваемом случае должно выполняться равенство  $\tau = (\lambda+1)\sigma/(\lambda-1)$ . Сравнив два равенства для параметра  $\tau$ , получим, что показатель степени  $\lambda$  в этом случае задаётся соотношением  $\lambda = (m+2)/(m-2)$ ,  $m \neq 2$ . Нетрудно показать, что переобозначением постоянных и несложными преобразованиями решения (44) можно свести к решению (30) из утверждения 3. Точные решения уравнения (2) вида (44) имеют место для любого  $\lambda \neq \pm 1$ . При этом для некоторых конкретных значений  $\lambda$  из формулы (43) можно найти точные решения с другой функциональной зависимостью. Пусть, например,  $\lambda = 2$ , тогда трёхчлен в формуле (43) будет кубическим и дискриминант кубического уравнения  $2\alpha g^3/\tau + g^2 + C_1 = 0$  имеет вид  $\mathcal{D} = -4C_1(27\alpha^2 C_1 + \tau^2)/\tau$ . В случае  $\mathcal{D} = 0$  интеграл в формуле (43) легко вычисляется в элементарных функциях. Случай  $C_1 = 0$  был рассмотрен выше. Полагая  $C_1 = -\tau^2/(27\alpha^2)$ , находим

$$g_3(\xi) = \frac{\tau}{6\alpha} \left[ 3 \text{tg}^2\left(\frac{1}{2}\xi + C_2\right) + 1 \right].$$

При этом непосредственной проверкой можно убедиться в том, что решением уравнения (40) будет также функция  $g_3(\xi)$ , в которой тангенс нужно заменить на котангенс. Здесь и далее решение с котангенсом приводить не будем. Для функции  $g_3(\xi)$  получим следующее частное точное решение ОДУ (39):

$$f_3(W) = \frac{\tau}{6\alpha W} \left[ 3 \text{tg}^2\left(\frac{1}{2} \ln W + C_2\right) + 1 \right].$$

Так как  $\lambda = 2$ , то из равенства  $\sigma = \tau(\lambda-1)/(\lambda+1)$  получим  $\tau = 3\sigma$ . Помимо приведённого решения в элементарных функциях, можно также записать решение уравнения (39) с использованием эллиптического синуса Якоби. Легко проверить, что функция

$$f_4(W) = \frac{6\sigma}{\alpha W} \left[ b^2 k^2 \text{sn}^2(b \ln W + C_2, k) - \frac{4b^2(k^2 + 1) + 1}{12} \right]$$

является точным решением уравнения (39), где  $\operatorname{sn}(\cdot, k)$  – эллиптический синус Якоби, а вещественный модуль  $k \neq 0$  и произвольная вещественная постоянная  $b \neq 0$  удовлетворяют равенству

$$16b^4(k^4 - k^2 + 1) - 1 = 0. \quad (45)$$

Теперь мы должны предъявить нетривиальное решение алгебраической системы (38) с дополнительным условием  $\sigma = \tau/3$ , с учётом которого из равенства  $\tau = m\sigma/2$  имеем  $m = 6$ . Таким образом, в этом случае мы можем записать явные точные решения уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = \alpha U^2, \quad U = U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 6, \quad (46)$$

причём при  $n = 6$  получим радиально-симметричные точные решения, а в случае  $n > 6$  – анизотропные решения уравнения (46). Пусть  $n = 7$  и матрица  $A^*$  имеет вид

$$A^* = \sigma \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 221/450 & -14/225 & 1/45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14/225 & 29/450 & 7/45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/45 & 7/45 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (10) запишем функцию  $W(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7$ :

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \frac{\sigma}{900} \left[ 225(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \right. \\ \left. + 221x_5^2 + 29x_6^2 + 200x_7^2 - 56x_5x_6 + 20x_5x_7 + 140x_6x_7 \right]. \quad (47)$$

Здесь, для краткости, компоненты вектора  $\mathbf{B}$  и константу  $C$  положили равными нулю. Окончательно получим, что нелинейное эллиптическое уравнение (46) в случае  $n = 7$  имеет следующие точные анизотропные решения:

$$U_3(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{2\alpha} \frac{3 \operatorname{tg}^2(0.5 \ln W(\mathbf{x}) + C_2) + 1}{W(\mathbf{x})},$$

$$U_4(\mathbf{x}) = \frac{6\sigma}{\alpha W(\mathbf{x})} \left[ b^2 k^2 \operatorname{sn}^2(b \ln W(\mathbf{x}) + C_2, k) - \frac{4b^2(k^2 + 1) + 1}{12} \right],$$

где  $\sigma \neq 0$ ,  $C_2$ ,  $C_3 \neq 0$  – произвольные постоянные, а ненулевые константы  $b$  и  $k$  удовлетворяют равенству (45).

Помимо этих решений можно также записать точное решение уравнения (46) с использованием функции (41):

$$U_5(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{\sigma W(\mathbf{x})}.$$

В формулах точных решений  $U_1(\mathbf{x}) - U_4(\mathbf{x})$  функция  $W(\mathbf{x})$  определяется соотношением (47). Пусть  $m = n = 6$ , тогда имеем

$$W_0(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2).$$

С функцией  $W_0(\mathbf{x})$  решения  $U_3(\mathbf{x}) - U_5(\mathbf{x})$  уравнения (46) являются радиально-симметричными в 6-мерном координатном пространстве.

Таким образом, мы показали, что для построения точных решений уравнения (2) можно использовать не только степенной анзац  $U = [W]^{1/(1-\lambda)}$ , но и анзац вида  $U = f(W)$ , где функция  $f(W)$  удовлетворяет ОДУ (39). Отметим также, что анзац вида  $U = f(W)$  можно применять и для уравнения (3). В этом случае если коэффициенты функции (10) удовлетворяют алгебраической системе (38), то для определения функции  $f(W)$  мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\sigma W \frac{d^2 f(W)}{dW^2} + \tau \frac{df(W)}{dW} = \alpha [f(W)]^\lambda + \gamma [f(W)]^{2\lambda-1}. \quad (48)$$

Заметим, что ОДУ (48) уже не является обобщённо-однородным ни при каких  $\lambda \neq 1$ . Более того, для нелинейной системы (16) помимо степенных анзацев (17) можно также использовать анзацы  $U = f(W)$ ,  $V = g(W)$ , где аргумент  $W$  задаётся формулой (10), причём коэффициенты функции  $W$  удовлетворяют алгебраической системе (38), а неизвестные  $f$ ,  $g$  удовлетворяют системе ОДУ

$$\begin{aligned} \sigma W \frac{d^2 f(W)}{dW^2} + \tau \frac{df(W)}{dW} &= \alpha [f(W)]^p + \gamma [f(W)]^{2p-1} [g(W)]^{1-q}, \\ \sigma W \frac{d^2 g(W)}{dW^2} + \tau \frac{dg(W)}{dW} &= \beta [g(W)]^q + \delta [f(W)]^{1-p} [g(W)]^{2q-1}, \end{aligned} \quad (49)$$

но это предмет отдельного исследования. В конце статьи мы только приведём пример точного решения системы (16), которое будет построено с использованием анзацев  $U = f(W)$ ,  $V = g(W)$  и соответственно системы ОДУ (49).

**3. Многомерные точные решения нелинейных эллиптических систем.** Далее, используя конструкцию вида (10), построим точные многомерные решения нелинейной эллиптической системы (7).

**Утверждение 5.** *Нелинейная эллиптическая система вида (7) с параметрами  $\lambda \neq -1$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq -1$ ,  $\mu \neq 0$  обладает точным многомерным решением*

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{(1+\lambda)/\lambda}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{(1+\mu)/\mu}, \quad (50)$$

где функции  $W_i(\mathbf{x})$  задаются формулой (12), причём числовые симметрические матрицы  $A_i$ , постоянные векторы  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^n$  и константы  $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_1 \Theta_1 + \frac{2}{\lambda} A_1^2 - \frac{\gamma \lambda}{1+\lambda} A_2 &= 0, & A_2 \Theta_2 + \frac{2}{\mu} A_2^2 - \frac{\delta \mu}{1+\mu} A_1 &= 0, \\ \mathbf{B}_1 \Theta_1 + \frac{2}{\lambda} A_1 \mathbf{B}_1 - \frac{\gamma \lambda}{1+\lambda} \mathbf{B}_2 &= 0, & \mathbf{B}_2 \Theta_2 + \frac{2}{\mu} A_2 \mathbf{B}_2 - \frac{\delta \mu}{1+\mu} \mathbf{B}_1 &= 0, \\ C_1 \Theta_1 + \frac{1}{\lambda} |\mathbf{B}_1|^2 - \frac{\gamma \lambda}{1+\lambda} C_2 &= 0, & C_2 \Theta_2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}_2|^2 - \frac{\delta \mu}{1+\mu} C_1 &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

где введены обозначения

$$\Theta_1 = \operatorname{tr} A_1 - \frac{\alpha \lambda}{1+\lambda}, \quad \Theta_2 = \operatorname{tr} A_2 - \frac{\beta \mu}{1+\mu}. \quad (52)$$

Доказательство утверждения 5 повторяет схему доказательства утверждения 1, поэтому приводить его не будем.

**Утверждение 6.** *Система матричных уравнений (51) обладает частным решением*

$$A_1 = \nu S E_m S^T, \quad A_2 = \frac{\nu}{\gamma} \left( \frac{(1+\lambda)(m\lambda+2)}{\lambda^2} \nu - \alpha \right) S E_m S^T, \quad (53)$$

где  $S$  – произвольная ортогональная матрица,  $E_m$  – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  единиц и  $n - m$  нулей, а параметр  $\nu \neq 0$  является вещественным корнем кубического уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\lambda)^2}{\gamma^2 \lambda^2} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right)^2 \left(m + \frac{2}{\mu}\right) \nu^3 - \frac{2\alpha(1+\lambda)}{\gamma^2 \lambda} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right) \left(m + \frac{2}{\mu}\right) \nu^2 + \\ & + \left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left(m + \frac{2}{\mu}\right) - \frac{\beta(1+\lambda)\mu}{\gamma\lambda(1+\mu)} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right)\right) \nu + \frac{\delta\mu}{1+\mu} \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} - 1\right) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

и удовлетворяет условию

$$\frac{(1+\lambda)(m\lambda+2)}{\lambda^2} \nu - \alpha \neq 0. \quad (55)$$

**Доказательство.** Будем отыскивать числовую симметричную матрицу  $A_1$  в виде  $A_1 = \nu S E_m S^T$ , где  $S$  – произвольная ортогональная матрица,  $E_m$  – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  единиц и  $n - m$  нулей,  $\nu \neq 0$  – вещественный параметр, подлежащий определению. После подстановки матрицы  $A_1$  в первое матричное уравнение системы (51) и элементарных преобразований получим выражение для матрицы  $A_2$  следующего вида:

$$A_2 = \frac{(1+\lambda)\nu}{\gamma\lambda} \left(\frac{2\nu}{\lambda} + \Theta_1\right) S E_m S^T. \quad (56)$$

При этом имеем

$$\text{tr } A_1 = m\nu, \quad \text{tr } A_2 = \frac{m(1+\lambda)\nu}{\gamma\lambda} \left(\frac{2\nu}{\lambda} + \Theta_1\right).$$

С учётом соотношений (52) находим

$$\Theta_1 = m\nu - \frac{\alpha\lambda}{1+\lambda}, \quad \Theta_2 = \frac{(1+\lambda)m}{\gamma\lambda} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right) \nu^2 - \frac{m\alpha}{\gamma} \nu - \frac{\beta\mu}{1+\mu}.$$

Подставляя выражение для  $\Theta_1$  в формулу (56), получаем окончательный вид матрицы  $A_2$ , определяемый формулой (53). Теперь подставим матрицы (53) во второе матричное уравнение системы (51) и после несложных преобразований придём к равенству

$$\begin{aligned} & \nu \left[ \frac{(1+\lambda)^2}{\gamma^2 \lambda^2} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right)^2 \left(m + \frac{2}{\mu}\right) \nu^3 - \frac{2\alpha(1+\lambda)}{\gamma^2 \lambda} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right) \left(m + \frac{2}{\mu}\right) \nu^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left(m + \frac{2}{\mu}\right) - \frac{\beta(1+\lambda)\mu}{\gamma\lambda(1+\mu)} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right)\right) \nu + \frac{\delta\mu}{1+\mu} \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} - 1\right) \right] S E_m S^T = 0. \end{aligned}$$

По предположению  $\nu \neq 0$ , поэтому чтобы это равенство обращалось в тождество мы должны потребовать равенство нулю выражения, стоящего в квадратных скобках, которое можно рассматривать как кубическое уравнение (54) относительно искомого параметра  $\nu$ . Поскольку кубическое уравнение (54) имеет по крайней мере один вещественный корень, то матрицы  $A_1$ ,  $A_2$ , определяемые формулами (53), с вещественным параметром  $\nu$  будут также вещественными. Кроме того, найденный из уравнения (54) вещественный параметр  $\nu$  должен удовлетворять условию (55), выполнение которого гарантирует нетривиальность матрицы  $A_2$ . Утверждение доказано.

**Следствие 4.** Нелинейная эллиптическая система вида (7) с параметрами  $\lambda \neq -1$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq -1$ ,  $\mu \neq 0$  имеет частное точное радиально-симметричное решение

$$U(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\nu}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \right]^{(1+\lambda)/\lambda}, \quad V(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\nu}{2\gamma} \left( \frac{(1+\lambda)(n\lambda+2)}{\lambda^2} \nu - \alpha \right) \|\mathbf{x}\|^2 \right]^{(1+\mu)/\mu}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где постоянная  $\nu$  удовлетворяет условию  $\nu(1 + \lambda)(n\lambda + 2) - \alpha\lambda^2 \neq 0$  и является вещественным корнем кубического уравнения (54), в котором параметр  $m$  нужно положить равным  $n$ .

Отметим, что матрицы  $A_1$ ,  $A_2$ , определяемые формулами (53), являются не единственными решениями системы матричных уравнений (51). Ниже в примере 7 мы приведём матрицы  $A_1$ ,  $A_2$ , которые удовлетворяют системе (51) и получены при определённых соотношениях на параметры системы, но не задаются формулами (53).

**4. Примеры.** Приведём примеры, иллюстрирующие полученные выше результаты.

**Пример 1.** Пусть  $n = 3$  и ортогональная матрица  $S$  имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $E_m$  возьмём трёх возможных рангов  $\text{rank } E_m = m = 1$ ,  $\text{rank } E_m = m = 2$  и  $\text{rank } E_m = m = 3$ :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (28) матрицы

$$A_1 = \frac{\alpha(1 - \lambda)^2}{1 + \lambda} \begin{pmatrix} \frac{27}{64} & \frac{3\sqrt{3}}{64} & \frac{9\sqrt{3}}{32} \\ \frac{3\sqrt{3}}{64} & \frac{1}{64} & \frac{3}{32} \\ \frac{9\sqrt{3}}{32} & \frac{3}{32} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq -1, \quad \lambda \neq 1,$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\alpha(1 - \lambda)^2 \begin{pmatrix} \frac{39}{64} & \frac{15\sqrt{3}}{64} & \frac{5\sqrt{3}}{32} \\ \frac{15\sqrt{3}}{64} & \frac{37}{64} & -\frac{9}{32} \\ \frac{5\sqrt{3}}{32} & -\frac{9}{32} & \frac{13}{16} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1,$$

$$A_3 = \frac{\alpha(1 - \lambda)^2}{3 - \lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1, \quad \lambda \neq 3,$$

являются решением матричного уравнения (23). Здесь и далее в этом примере нижние индексы у матриц  $A$ , векторов  $\mathbf{B}$ , констант  $C$  и решений  $U(x, y, z)$  означают ранг соответствующей матрицы  $E_m$ . Для матриц  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , векторное и скалярное уравнения (23) имеют, соответственно, следующие решения:

$$\mathbf{B}_1 = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{1}{6}b, b\right), \quad C_1 = \frac{8(1 + \lambda)b^2}{9\alpha(1 - \lambda)^2}, \quad b \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{B}_2 = \text{col}\left(b_1, \frac{5\sqrt{3}}{9}b_1 - \frac{2}{3}b_2, b_2\right), \quad C_2 = \frac{52b_1^2 - 20\sqrt{3}b_1b_2 + 39b_2^2}{27\alpha(1 - \lambda)^2}, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{B}_3 = \text{col}(b_1, b_2, b_3), \quad C_3 = \frac{(3-\lambda)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{\alpha(1-\lambda)^2}, \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

Для найденных матриц  $A$ , векторов  $\mathbf{B}$  и постоянных  $C$  получим, что нелинейное эллиптическое уравнение (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет параметрические семейства точных многомерных решений

$$\begin{aligned} U_1(x, y, z) &= \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{1152(1+\lambda)} \left( 9\sqrt{3}x + 3y + 18z + \frac{32b(1+\lambda)}{\alpha(1-\lambda)^2} \right)^2 \right]^{1/(1-\lambda)}, \\ U_2(x, y, z) &= \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{256} (39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) + \right. \\ &\quad \left. + b_1x + \left( \frac{5\sqrt{3}}{9}b_1 - \frac{2}{3}b_2 \right)y + b_2z + \frac{52b_1^2 - 20\sqrt{3}b_1b_2 + 39b_2^2}{27\alpha(1-\lambda)^2} \right]^{1/(1-\lambda)}, \\ U_3(x, y, z) &= \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(3-\lambda)} (x^2 + y^2 + z^2) + b_1x + b_2y + b_3z + \frac{(3-\lambda)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{2\alpha(1-\lambda)^2} \right]^{1/(1-\lambda)}. \end{aligned}$$

Решение  $U_1(x, y, z)$  является формально одномерным, так как зависит от линейной комбинации пространственных координат и имеет место для всех  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ . анизотропное решение представлено функцией  $U_2(x, y, z)$  и имеет место для всех  $\lambda$ , кроме  $\lambda = 1$ . Решение  $U_3(x, y, z)$  является радиально-симметричным и имеет место для любых параметров  $\lambda \neq 1$  и  $\lambda \neq 3$ . Переобозначением констант  $b_i$  по формулам  $b_i = \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{(3-\lambda)}c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , решение  $U_3(x, y, z)$  можно записать как

$$U_3(x, y, z) = \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(3-\lambda)} \right]^{1/(1-\lambda)} [(x+c_1)^2 + (y+c_2)^2 + (z+c_3)^2]^{1/(1-\lambda)},$$

где  $c_i$  – произвольные постоянные.

**Пример 2.** В этом примере построим частные точные анизотропные решения нелинейного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2} = \alpha U^5, \quad U = U(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Положив  $\lambda = 5$ ,  $n = 4$ ,  $m = 3$ , из утверждения 1 получим

$$U_1(\mathbf{x}) = \left[ -\frac{\alpha}{16} (39x_1^2 + 37x_2^2 + 52x_3^2 + 64x_4^2 + 30\sqrt{3}x_1x_2 + 20\sqrt{3}x_1x_3 - 36x_2x_3) \right]^{-1/4}.$$

Пусть  $n = 4$ ,  $m = 3$ , тогда из утверждения 2 находим

$$U_2(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\nu}{18} (5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 9x_4^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3) - \frac{2\alpha}{3\nu} \right]^{-1/2},$$

где  $\nu \neq 0$  – произвольная постоянная. Для краткости записи в решениях  $U_1(\mathbf{x})$ ,  $U_2(\mathbf{x})$  компоненты вектора  $\mathbf{B}$  и константу  $C$  положили равными нулю.

**Пример 3.** В этом примере построим точные многомерные решения нелинейного эллиптического уравнения

$$\Delta U = \alpha U^3, \quad U = U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 4. \quad (57)$$

При  $\lambda = 3$ ,  $n = 4$ ,  $m = 2$  из утверждения 1 находим анизотропное решение

$$U_1(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\alpha}{225} (121x_1^2 + 4x_2^2 + 100x_3^2 + 225x_4^2 + 44x_1x_2 + 220x_1x_3 + 40x_2x_3) \right]^{-1/2}.$$

Пусть  $\lambda = 3$ ,  $n = 4$ ,  $m = 4$ , тогда из утверждения 3 получим радиально-симметричное решение

$$U_2(\mathbf{x}) = \frac{4\nu}{2\nu^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \alpha},$$

где  $\nu \neq 0$  – произвольная постоянная. Аналогичное решение можно получить из следствия 2. Полагая  $C_1 = \tau/(64\alpha)$ , из формулы (43) при  $\lambda = 3$  получаем

$$g(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\frac{\tau}{\alpha}} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \xi + C_2 \right).$$

Пусть  $n = 5$ ,  $m = 4$ . Тогда имеем  $\tau = 2\sigma$  и с учётом равенств  $U = f(W)$ ,  $f(W) = g(\xi)W^{1/(1-\lambda)}$ ,  $\xi = \ln W$  получим анизотропное решение уравнения (57) следующего вида:

$$U_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{W(\mathbf{x})}} \sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \ln W(\mathbf{x}) + C_2 \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5,$$

$$W(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{16} (3x_1^2 + x_2^2 + 4(x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + 2\sqrt{3}x_1x_2),$$

где  $\sigma \neq 0$ ,  $C_2$  – произвольные постоянные. Для краткости записи в решениях  $U_1(\mathbf{x})$ ,  $U_2(\mathbf{x})$  и функции  $W(\mathbf{x})$  компоненты вектора  $\mathbf{B}$  и константу  $C$  положили равными нулю.

**Пример 4.** Пусть  $\lambda = -1$ , тогда нелинейное эллиптическое уравнение (2) примет вид

$$\Delta U = \alpha U^{-1}. \quad (58)$$

В работе [13] уравнение (58) с  $\alpha = 1$  возникает при построении точных решений следующей системы параболических уравнений четвёртого порядка:

$$u_t = \Delta(u\Delta u) + k_1 v, \quad v_t = \Delta(v\Delta v) + k_2 u.$$

Воспользовавшись результатами примера 1, легко записать анизотропное точное решение уравнения (58) в трёхмерном координатном пространстве:

$$U(x, y, z) = \left[ \frac{\alpha}{64} (39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) + \right. \\ \left. + b_1x + \left( \frac{5\sqrt{3}}{9}b_1 - \frac{2}{3}b_2 \right)y + b_2z + \frac{1}{\alpha 108} (52b_1^2 - 20\sqrt{3}b_1b_2 + 39b_2^2) \right]^{1/2},$$

где  $b_1$ ,  $b_2$  – произвольные постоянные. Отметим, что в [13] получено только радиально-симметричное решение уравнения (58), которое для любого  $n > 1$  приведено в следствии 1.

**Пример 5.** В этом примере, используя результаты утверждения 4 и примера 1, построим частные точные многомерные решения нелинейного эллиптического уравнения (3). Так, в трёхмерном случае уравнение (3) имеет анизотропное частное точное решение

$$U(x, y, z) = \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{256} (39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) + \right. \\ \left. + b_1x + \left( \frac{5\sqrt{3}}{9}b_1 - \frac{2}{3}b_2 \right)y + b_2z + \frac{52b_1^2 - 20\sqrt{3}b_1b_2 + 39b_2^2}{27\alpha(1-\lambda)^2} - \frac{\beta}{\alpha\lambda} \right]^{1/(1-\lambda)}$$

и радиально-симметричное частное точное решение вида

$$U(x, y, z) = \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(3-\lambda)} \right]^{1/(1-\lambda)} \left[ (x+c_1)^2 + (y+c_2)^2 + (z+c_3)^2 - \frac{\beta(3-\lambda)^2}{\alpha^2\lambda(1-\lambda)^2} \right]^{1/(1-\lambda)},$$

где  $\lambda \neq 1$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta$ ,  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – произвольные параметры. Поскольку радиально-симметричное решение получается для матрицы  $A$  полного ранга, то легко записать решение нелинейного эллиптического уравнения (3) в случае произвольной размерности:

$$U(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(n+(2-n)\lambda)} |\mathbf{x}|^2 - \frac{\beta(n+(2-n)\lambda)}{2\alpha\lambda} \right]^{1/(1-\lambda)}.$$

**Пример 6.** Пользуясь результатами утверждения 6 и примера 1, построим точное анизотропное решение нелинейной эллиптической системы (7) в трёхмерном координатном пространстве. Как уже было отмечено выше, для построения анизотропных точных решений мы должны использовать матрицы  $E_m$  ранга  $m = 2$ . Кроме того, мы должны предъявить вещественное решение кубического уравнения (54). Для упрощения задачи параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  системы (7) возьмём единичными, тогда уравнение (54) имеет три вещественных корня:

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \frac{\lambda(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)}{2(1+\lambda)^2(1+\mu)}, \quad \nu_3 = \frac{\lambda(\lambda - \mu)}{2(1+\lambda)^2(1+\mu)}.$$

Корень  $\nu_1$  интереса не представляет, так как приводит к тривиальному решению матричной системы (51). В случае  $\lambda = \mu$  получим  $\nu_3 = 0$ . Поэтому при равенстве параметров  $\lambda$  и  $\mu$  из кубического уравнения (54) получим единственный нетривиальный корень  $\nu = \lambda^2/(1+\lambda)^2$ . В этом примере будем использовать корень  $\nu_2$ , ортогональную матрицу  $S$  и матрицу  $E_2$ , приведённые в примере 1. Также должно выполняться условие на параметры  $\lambda + 2\lambda\mu + \mu \neq 0$ , которое гарантирует нетривиальность матрицы  $A_2$ . Кроме того, с учётом неравенства (55) параметры системы (7) должны удовлетворять дополнительному ограничению

$$2(\lambda + 2\lambda\mu + \mu) - \alpha\lambda(1 + \mu) \neq 0.$$

Таким образом, получим, что нелинейная эллиптическая система (7) с параметрами  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$  имеет анизотропное параметрическое семейство точных решений вида

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = & \left[ \frac{\lambda(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz)}{256(1+\lambda)^2(1+\mu)} + \right. \\ & \left. + bx + \frac{5\sqrt{3}}{9}by + \frac{52}{27} \frac{(1+\lambda)^2(1+\mu)}{\lambda(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)} b^2 \right]^{(1+\lambda)/\lambda}, \\ V(x, y, z) = & \left[ \frac{\mu(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz)}{256(1+\lambda)^2(1+\mu)} + \right. \\ & \left. + \frac{(1+\lambda)\mu}{\lambda(1+\mu)} bx + \frac{5\sqrt{3}}{9} \frac{(1+\lambda)\mu}{\lambda(1+\mu)} by + \frac{52}{27} \frac{(1+\lambda)^3\mu}{\lambda^2(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)} b^2 \right]^{(1+\mu)/\mu}, \end{aligned}$$

где  $b$  – произвольный параметр.

**Пример 7.** В случае когда параметры матричной системы (51) удовлетворяют некоторым соотношениям можно получить решение этой системы, отличное от матриц, приведённых в утверждении 6. Пусть выполнены равенства

$$\alpha = \frac{28(1+\lambda)^2}{5\lambda^2}, \quad \beta = \frac{28(1+\mu)^2}{5\mu^2}, \quad \gamma = \frac{8(1+\lambda)}{5\lambda^2}, \quad \delta = \frac{48(1+\mu)}{5\mu^2}, \quad (59)$$

тогда в трёхмерном случае матричная система (51) имеет следующее решение:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8/5 \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц нелинейная эллиптическая система уравнений (7) с параметрами, заданными формулами (59), имеет частное точное анизотропное решение

$$U(x, y, z) = \left(x^2 + 2y^2 - \frac{1}{5}z^2\right)^{(1+\lambda)/\lambda}, \quad V(x, y, z) = \left(-x^2 + 3y^2 + \frac{4}{5}z^2\right)^{(1+\mu)/\mu}.$$

В частном случае при  $\lambda = \mu = 1$  получим, что нелинейная эллиптическая система вида

$$\Delta U = \frac{112}{5}U^{1/2} + \frac{16}{5}V^{1/2}, \quad \Delta V = \frac{112}{5}V^{1/2} + \frac{96}{5}U^{1/2}$$

обладает точным решением

$$U(x, y, z) = \left(x^2 + 2y^2 - \frac{1}{5}z^2\right)^2, \quad V(x, y, z) = \left(-x^2 + 3y^2 + \frac{4}{5}z^2\right)^2.$$

Пусть теперь выполнены соотношения

$$\alpha = \frac{(5\lambda - 2)(1 + \lambda)}{\lambda^2}, \quad \beta = \frac{7(\mu + 2)(1 + \mu)}{\mu^2}, \quad \gamma = \frac{4(1 + \lambda)}{\lambda^2}, \quad \delta = -\frac{12(1 + \mu)}{\mu^2}, \quad (60)$$

тогда матричная система (51) в трёхмерном случае имеет решение

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Нелинейная эллиптическая система уравнений (7) с параметрами, заданными по формулам (60), имеет частное точное анизотропное решение

$$U(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2\right)^{(1+\lambda)/\lambda}, \quad V(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2\right)^{(1+\mu)/\mu}.$$

Если  $\lambda = 2/5$ ,  $\mu = -2$ , то в силу (60) имеем  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\gamma = 35$ ,  $\delta = 3$ , в этом случае система уравнений (7) упростится и примет вид

$$\Delta U = 35U^{3/7}V^2, \quad \Delta V = 3U^{2/7}V^{-3}.$$

Эта нелинейная эллиптическая система уравнений имеет частное точное анизотропное решение

$$U(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2\right)^{7/2}, \quad V(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2\right)^{1/2}.$$

**Пример 8.** Рассматривается нелинейная эллиптическая система уравнений

$$\Delta U = \alpha U^{2/3} + \gamma U^{1/3}V^{1/5}, \quad \Delta V = \beta U^{4/5} + \delta U^{1/3}V^{3/5}, \quad (62)$$

которая получается из (7) при  $\lambda = 1/2$ ,  $\mu = 1/4$ . Для указанных значений параметров  $\lambda$ ,  $\mu$  из равенств (60) имеем

$$\alpha = 3, \quad \beta = 315, \quad \gamma = 24, \quad \delta = -240. \quad (63)$$

В этом случае с использованием матриц (61) можно построить точное анизотропное решение системы (62), которое имеет вид

$$U_1(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2\right)^3, \quad V_1(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2\right)^5.$$

С другой стороны, по утверждению 6 матричная система (51) имеет частное решение (53), где параметр  $\nu$  является вещественным корнем уравнения (54). Пусть  $\lambda = 1/2$ ,  $\mu = 1/4$ ,  $m = 2$  и  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  задаются формулами (63), тогда кубическое уравнение (54) имеет три вещественных корня:

$$\nu_1 = \frac{3}{2}, \quad \nu_2 = -\frac{7}{12} + \frac{1}{20}\sqrt{2785}, \quad \nu_3 = -\frac{7}{12} - \frac{1}{20}\sqrt{2785}.$$

Для построения точных решений системы (62) возьмём матрицы  $S$  и  $E_2$ , приведённые в примере 1, также, для краткости, векторы  $\mathbf{B}_i$ , постоянные  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , положим равными нулю. Заметим, что для корня  $\nu_1$  матрицы  $A_1$  и  $A_2$  совпадают. В этом случае получим точное решение системы (62) вида

$$U_2(x, y, z) = \left( \frac{3}{256}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^3,$$

$$V_2(x, y, z) = \left( \frac{3}{256}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^5.$$

Для корней  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  имеем, соответственно, следующие точные решения системы (62):

$$U_3(x, y, z) = \left( \frac{-35 + 3\sqrt{2785}}{7680}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^3,$$

$$V_3(x, y, z) = \left( \frac{111 - \sqrt{2785}}{2560}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^5,$$

$$U_4(x, y, z) = \left( -\frac{35 + 3\sqrt{2785}}{7680}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^3,$$

$$V_4(x, y, z) = \left( \frac{111 + \sqrt{2785}}{2560}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^5.$$

Воспользовавшись результатами примера 6, получим при  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$  следующее анизотропное параметрическое семейство точных решений системы (62):

$$U(x, y, z) = \left( \frac{13}{480}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{48}xy + \frac{\sqrt{3}}{72}xz + \frac{37}{1440}y^2 - \frac{1}{40}yz + \frac{13}{360}z^2 \right)^3,$$

$$V(x, y, z) = \left( \frac{13}{800}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{80}xy + \frac{\sqrt{3}}{120}xz + \frac{37}{2400}y^2 - \frac{3}{200}yz + \frac{13}{600}z^2 \right)^5.$$

**Пример 9.** В этом примере мы построим точное решение системы (16) с использованием анзацев  $U = f(W)$ ,  $V = g(W)$ . Пусть  $p = q = 2$ , тогда система (16) запишется как

$$\Delta U = \alpha U^2 + \gamma U^3 V^{-1}, \quad \Delta V = \beta V^2 + \delta U^{-1} V^3. \quad (64)$$

После подстановки функций  $U = f(W)$ ,  $V = g(W)$  и несложных преобразований с учётом формулы (10) и равенств

$$|\nabla W|^2 = \sigma W, \quad \Delta W = \text{tr } A \equiv \tau$$

придём к системе ОДУ (49), для которой при условии  $\tau = 3\sigma$  можно получить частное точное решение. Как уже было отмечено выше, равенство  $\tau = 3\sigma$  приводит к необходимости рассмотрения задачи в пространстве шести и более переменных. Пусть искомые функции  $U(\mathbf{x})$ ,

$V(\mathbf{x})$  и оператор Лапласа  $\Delta$  заданы в 7-мерном координатном пространстве, тогда система (64) обладает частными точными анизотропными решениями в элементарных функциях

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{x}) &= PF_1(\mathbf{x}), \quad V_1(\mathbf{x}) = \frac{2\gamma P^2}{\sigma - 2\alpha P} F_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^7, \\ U_2(\mathbf{x}) &= QF_2(\mathbf{x}), \quad V_2(\mathbf{x}) = -\frac{2\gamma Q^2}{6\sigma C_3 + \alpha Q} F_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^7, \\ F_1(\mathbf{x}) &= \frac{3 \operatorname{tg}^2(0.5 \ln W(\mathbf{x}) + C_2) + 1}{W(\mathbf{x})}, \quad F_2(\mathbf{x}) = (C_3 W(\mathbf{x}) + 1)^{-2}, \end{aligned}$$

где  $\sigma \neq 0$ ,  $C_2, C_3 \neq 0$  – произвольные постоянные; ненулевые константы  $P \neq \sigma/(2\alpha)$ ,  $Q \neq -6\sigma C_3/\alpha$  являются вещественными решениями следующих кубических уравнений:

$$\begin{aligned} 8\gamma(\alpha\beta - \gamma\delta)P^3 + 4\sigma(\alpha^2 - \beta\gamma)P^2 - 4\alpha\sigma^2P + \sigma^3 &= 0, \\ \gamma(\alpha\beta - \gamma\delta)Q^3 - 6\sigma C_3(\alpha^2 - \beta\gamma)Q^2 - 72\alpha\sigma^2 C_3^2 Q - 216C_3^2\sigma^3 &= 0, \end{aligned}$$

а функция  $W(\mathbf{x})$  задаётся формулой (47).

**Заключение.** В статье получены формулы новых точных многомерных решений нелинейной эллиптической системы (7) и нелинейных эллиптических уравнений (2), (3) с использованием конструкции (10), которая в работах других авторов не применялась. При этом использовались не только степенные анзацы (22), (50), но и анзацы с другой функциональной зависимостью. В частности, построено точное многомерное решение уравнения (2) с показателем  $\lambda = 2$ , которое выражается формулой, содержащей эллиптический синус Якоби. Полезная особенность конструкции (10) с точки зрения построения точных многомерных решений состоит в том, что помимо линейных слагаемых она содержит квадратичную форму  $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$   $n$  переменных. Из полученных результатов следует, что пространственная структура решений определяется рангом матрицы  $A$ . Если  $\operatorname{rank} A = 1$ , то имеем “псевдомногомерные” точные решения, т.е. решения с линейной комбинацией пространственных переменных. Если  $1 < \operatorname{rank} A < n$ , то получим анизотропные точные решения. Наконец, если  $\operatorname{rank} A = n$ , то имеем радиально-симметричные точные решения. Определённые ограничения на существование решений вида (22) с заданной пространственной структурой при некоторых значениях параметров  $\lambda$  накладывает условие (27). Так, при  $\lambda = -1$  уравнение (2) не имеет точных решений вида (22) ранга 1, т.е. решений с линейной комбинацией переменных. Нелинейное эллиптическое уравнение (2) размерности  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ , с показателем  $\lambda = n/(n-2)$  не имеет радиально-симметричных решений вида (22) соответствующей размерности. Нелинейное эллиптическое уравнение (2) размерности  $n = 2$  не имеет точных анизотропных решений вида (22). Отметим, что в справочниках [7, 36, 37] приведено радиально-симметричное решение уравнения (2) в двумерном координатном пространстве. Нелинейное эллиптическое уравнение (3) с показателем  $\lambda = 5$  в трёхмерном координатном пространстве не имеет точных анизотропных решений вида (30). В статье остались не рассмотренными нелинейные системы (18)–(21) (по причине ограничения объёма), для них мы только указали анзацы точных решений; этим системам будут посвящены отдельные исследования. Задача построения точных решений с использованием функциональных анзацев  $U = f(W)$ ,  $V = g(W)$  сводится к нелинейным ОДУ второго порядка (39), (48) и системе ОДУ (49), детальное исследование которых также осталось за рамками данной статьи. Все полученные новые результаты подкреплены соответствующими примерами, а найденные явные выражения точных многомерных решений в элементарных и специальных функциях могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов построения приближённых решений краевых задач для нелинейных систем вида (7), (16) и нелинейного эллиптического уравнения (2) большой размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00819).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shahzad M.M., Saeed. Z., Akhtar A., Munawar H., Yousaf M.H., Baloach N.K., Hussain F.A. Review of swarm robotics in a nutshell // Drones. 2023. V. 7. № 4. Art. 269.
2. Muniganti P., Pujol A.O. A survey on mathematical models of swarm robotics // Conf. Paper. Workshop of Physical Agents. 2010. P. 29–30.
3. Wei J., Fridman E., Johansson K.H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements // Automatica. 2019. V. 106. P. 47–53.
4. Elamvazhuthi K., Berman S. Mean-field models in swarm robotics: a survey // Bioinspir Biomim. 2019. V. 15. № 1. Art. 015001.
5. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // J. of Physics: Conf. Ser. 2021. V. 1847. № 1. Art. 012007.
6. Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$  // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I. 1966. V. 13. P. 109–124.
7. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Ч. 2. М., 2017.
8. Brezis H., Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // Comm. on Pure and Applied Mathematics. 1983. V. 34. P. 437–477.
9. Похожаев С.И. О задаче Дирихле для уравнения  $\Delta u = u^2$  // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 4. С. 769–772.
10. Похожаев С.И. Об одной задаче Л.В. Овсянникова // Прикл. механика и техн. физика. 1989. № 2. С. 5–10.
11. Horedt, G.P. Topology of the Lane–Emden equation // Astronomy and Astrophysics. 1987. V. 117. № 1–2. P. 117–130.
12. Bohmer C.G., Harko T. Nonlinear stability analysis of the Emden–Fowler equation // J. of Nonlin. Math. Phys. 2010. V. 17. P. 503–516.
13. Косов А.А., Семенов Э.И. О существовании периодических решений одной нелинейной системы параболических уравнений четвертого порядка // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её приложения. Темат. обзоры. 2021. Т. 196. С. 98–104.
14. Sharaf K. Existence of solutions for elliptic nonlinear problems on the unit ball of  $\mathbb{R}^3$  // Electronic J. of Differ. Equat. 2016. V. 229. P. 1–9.
15. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М., 1987.
16. Березовская Ф.С., Карев Г.П. Бифуркации бегущих волн в популяционных моделях с таксисом // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169. № 9. С. 1011–1024.
17. Brezis H. Some variational problems with lack of compactness // Proc. of Symposia in Pure Math. 1986. V. 45. P. 167–201.
18. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1952. V. 237. P. 37–72.
19. Maini P.K., Benson D.L., Sherratt J.A. Pattern formation in reaction-diffusion models with spatially inhomogeneous diffusion coefficients // J. of Math. Appl. in Medicine & Biology. 1992. V. 9. P. 197–213.
20. Lair A.V., Wood A.W. Existence of entire large positive solutions of semilinear elliptic systems // J. of Differ. Equat. 2000. V. 164. P. 380–394.
21. Bozhkov Y., Freire I.L. Symmetry analysis of the bidimensional Lane–Emden systems // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388. P. 1279–1284.
22. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London; N.Y., 2002.
23. Канцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М., 2009.
24. Шмидт А.В. Точные решения систем уравнений типа реакция–диффузия // Вычислит. технологии. 1998. Т. 3. № 4. С. 87–94.
25. Cherniha R., King J.R. Non-linear reaction–diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansatzes and exact solutions // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 308. P. 11–35.
26. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Differential Equations. Boca Raton, 2012.
27. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 108–122.
28. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных многомерных решениях системы уравнений реакции–диффузии со степенными нелинейностями // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 796–812.
29. Kosov A.A., Semenov E.I., Tirskikh V.V. On exact multidimensional solutions of a nonlinear system of first order partial differential equation // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2019. Т. 28. С. 53–68.

30. Косов А.А., Семенов Э.И. Новые точные решения уравнения диффузии со степенной нелинейностью // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63. № 6. С. 1282–1299.
31. Косов А.А., Семенов Э.И. Анизотропные решения нелинейной кинетической модели эллиптического типа // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2020. Т. 13. № 4. С. 48–57.
32. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
33. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
34. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954.
35. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.
36. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики: справочник. М., 2002.
37. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Ч. 1. М., 2017.

Институт динамики систем и теории управления  
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 19.07.2023 г.  
После доработки 28.09.2023 г.  
Принята к публикации 11.10.2023 г.