

## ===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ АНТИПЕРРОНОВСКОГО ЭФФЕКТА  
СМЕНЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ  
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ  
НА ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ  
ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

© 2023 г. Н. А. Изобов, А. В. Ильин

Доказано существование двумерной линейной системы  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $t \geq t_0$ , с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и всеми положительными характеристическими показателями, а также бесконечно дифференцируемого  $m$ -возмущения  $f(t, y)$ , имеющего порядок  $m > 1$  малости в окрестности начала координат  $y = 0$  и не превосходящего  $m$  порядок роста вне её, таких, что возмущённая система  $\dot{y} = A(t)y + f(t, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \geq t_0$ , имеет решение  $y(t)$  с отрицательным показателем Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0374064123120026, EDN: NUWDWF

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями  $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ . Вместе с ними рассматриваем и нелинейные системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

с  $m$ -возмущениями  $f(t, y)$ , также бесконечно дифференцируемыми порядка  $m > 1$  малости в окрестности начала координат  $y = 0$  и допустимого роста вне её:

$$\|f(t, y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \text{const}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0. \quad (3)$$

Эффект Перрона [1; 2, с. 50–51] в двумерном случае устанавливает существование системы (1) с отрицательными показателями и 2-возмущение (3) таких, что все нетривиальные решения двумерной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и часть из них имеет совпадающие положительные показатели, а в оставшейся непустой части – отрицательный показатель. Этот эффект смены отрицательных показателей системы (1) на положительные для решений системы (2) исследован нами (в том числе и совместно с С.К. Коровиным) в серии работ, завершившейся полным описанием [3, 4] совокупностей как положительных, так и отрицательных (и при их отсутствии) показателей всех нетривиальных решений системы (2).

Большой интерес своими возможными приложениями представляет антиперроновский [5, 6] эффект смены всех положительных показателей системы линейного приближения (1) на отрицательные для решений систем с малыми возмущениями (линейными экспоненциально убывающими, линейными стремящимися к нулю на бесконечности, нелинейными высшего порядка малости). При этом в статье [5] реализована смена показателей

$$\lambda_1(A) > 0 \mapsto \lambda_{n-1}(A + Q) < 0 < \lambda_n(A + Q)$$

экспоненциально убывающими линейными возмущениями  $f(t, y) = Q(t)y$  (остался открытым случай  $\lambda_n(A + Q) < 0$ ), а в [6] – полная смена показателей  $\lambda_1(A) > 0 \mapsto \lambda_n(A + Q) < 0$  возмущениями  $Q(t) \rightarrow 0$  для  $t \rightarrow +\infty$ .

В настоящей работе реализован следующий вариант антиперроновского эффекта: смена положительных показателей двумерного линейного приближения (1) на отрицательный для нетривиального решения нелинейной системы (2) с  $m$ -возмущением (3).

Справедлива следующая

**Теорема.** Для любых параметров  $m > 1$ ,  $\theta > 1$ ,  $\lambda > 0$  существуют:

- 1) двумерная линейная система (1) с ограниченной бесконечно дифференцируемой матрицей коэффициентов  $A(t)$  и характеристическими показателями  $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda > 0$ ,
- 2) также бесконечно дифференцируемое по своим аргументам  $m$ -возмущение

$$f(t, y) : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

такие, что возмущённая нелинейная система (2) имеет решение  $y(t)$  с показателем Ляпунова

$$\lambda[y] = -\lambda \frac{\theta + 1}{m\theta - 1} < 0. \quad (4)$$

**Доказательство. 1°. Построение системы линейного приближения.** По числу  $\alpha = \lambda(\theta + 1)/(\theta - 1)$ , точкам  $t_k = \theta^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ , функциям  $\varepsilon(t) = \exp(-t^2)$ ,  $t \geq 1$ , и Гелбаума–Олмстеда [7, с. 54]

$$e_{\beta\gamma}(\tau, \tau_1, \tau_2) = \beta + (\gamma - \beta) \exp\{-(\tau - \tau_1)^{-2} \exp[-(\tau - \tau_2)^{-2}]\}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2),$$

принимавшей на концах интервала значения  $\beta$  и  $\gamma$  и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка, определим ограниченные бесконечно дифференцируемые коэффициенты необходимой диагональной системы

$$\dot{x} = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]x = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0 = 1. \quad (5)$$

Для этого на промежутке  $[t_{2k}, t_{2k+2})$  с произвольным фиксированным  $k \in \mathbb{N}_0$  положим

$$a_2(t) = \begin{cases} -\alpha, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ e_{-\alpha, \alpha}(t, t'_{2k+1}, t_{2k+1}), & t \in (t'_{2k+1}, t_{2k+1}), \end{cases} \quad t'_k \equiv t_k - \varepsilon(t_k),$$

$$a_2(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in [t_{2k+1}, t'_{2k+2}], \\ e_{\alpha, -\alpha}(t, t'_{2k+2}, t_{2k+2}), & t \in (t'_{2k+2}, t_{2k+2}), \end{cases}$$

$$a_1(t) = -a_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Для вычисления характеристических показателей системы (5) рассмотрим другую диагональную систему

$$\dot{x} = \text{diag}[a'_1(t), a'_2(t)]x = A'(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0, \quad (5')$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$a'_2(t) = \begin{cases} -\alpha, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), \\ \alpha, & t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}), \end{cases} \quad a'_1(t) = -a'_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}).$$

Из очевидных равенств

$$(t_{2k+2} - t_{2k})^{-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} a'_2(\tau) d\tau = (t_{2k+3} - t_{2k+1})^{-1} \int_{t_{2k+1}}^{t_{2k+3}} a'_1(\tau) d\tau = \alpha \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \lambda,$$

справедливых при всех  $k \in \mathbb{N}_0$ , для характеристических показателей системы (5') следуют необходимые представления  $\lambda_1(A') = \lambda_2(A') = \lambda$ .

Матрицы  $A(t)$  и  $A'(t)$  на промежутке  $[t_k, t_{k+1})$  отличаются друг от друга на величину, не превосходящую  $2\alpha$ , причём это происходит на промежутке длины  $\varepsilon(t_{k+1})$ . Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|A(\tau) - A'(\tau)\| e^{M\tau} d\tau < +\infty$$

при любом конечном  $M > 0$ .

Поэтому, согласно [8], системы (5) и (5') являются асимптотически эквивалентными (приводимыми друг к другу линейным преобразованием Ляпунова). Тем самым справедливы и необходимые равенства

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \alpha \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \lambda.$$

**2°. Построение возмущённой системы и её решения с отрицательным показателем.** Сначала изложим алгоритм такого построения на отрезке  $[t_{2k}, t_{2k+2}]$  с произвольно фиксированным  $k > 1$ .

Определим величины

$$\beta_1 = \theta\beta_2 - (\theta - 1)\alpha, \quad \beta_2 = -\alpha \frac{\theta - 1}{m\theta - 1} \quad (6)$$

и будем строить на этом отрезке возмущённую систему с  $m$ -возмущением

$$f(t, y) = (f_1(t, y_2), f_2(t, y_1))^T, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}], \quad y \in \mathbb{R}_+^2 \equiv \{(y_1, y_2)^T : y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\},$$

и её решение  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  с начальными значениями

$$y_1(t_{2k}) = e^{\beta_1 t_{2k}}, \quad y_2(t_{2k}) = c_{2k} e^{\beta_2 t_{2k}}. \quad (7)$$

Здесь и ниже

$$c_{2k}(t) \equiv \exp\left(\int_{t'_{2k}}^t [-\alpha + e_{\alpha, -\alpha}(\tau, t'_{2k}, t_{2k})] d\tau\right), \quad t \in [t'_{2k}, t_{2k}], \quad (8)$$

$$c_{2k+1}(t) \equiv \exp\left(\int_{t'_{2k+1}}^t [\alpha + e_{-\alpha, \alpha}(\tau, t'_{2k+1}, t_{2k+1})] d\tau\right), \quad t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}];$$

будем также использовать обозначение  $c_k(t_k) = c_k$ .

Для последних функций справедливы оценки

$$e^{-2\alpha\varepsilon(t_{2k})} \leq c_{2k}(t) \leq 1, \quad t \in [t'_{2k}, t_{2k}].$$

Положив

$$1 \leq c_{2k+1}(t) \leq e^{2\alpha\varepsilon(t_{2k+1})}, \quad t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}],$$

$$f_1(t, y_2) \equiv 0, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}], \quad (9)$$

для первой компоненты  $y_1(t)$  строящегося решения получим представление

$$y_1(t) = e^{\beta_1 t_{2k} + \alpha(t - t_{2k})} \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ c_{2k+1}^{-1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{cases} \quad (10)$$

При определении необходимого бесконечно дифференцируемого  $m$ -возмущения  $f_2(t, y_1)$  и построении второй компоненты  $y_2(t)$  этого решения на отрезке  $[t_{2k}, t_{2k+1}]$  следует иметь в

виду, что сама функция  $y_1^m$ ,  $y_1 \geq 0$ , для  $m > 1$ , отличных от натуральных значений, не является бесконечно дифференцируемой в точке  $y_1 = 0$ . Поэтому воспользуемся следующими двумя бесконечно дифференцируемыми (с нулевыми значениями односторонних производных любого порядка на концах соответствующих промежутков) функциями:

$$E(\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \begin{cases} e_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2), & \tau \in [\tau_1, \tau_2], \\ 1, & \tau \in (\tau_2, \tau_3], \\ e_{10}(\tau, \tau_3, \tau_4), & \tau \in [\tau_3, \tau_4], \end{cases} \quad (11)$$

$$F_k(y_i) = \begin{cases} y_i^m e_{01}(y_i, 0, \varepsilon(t_k)), & y_i \in [0, \varepsilon(t_k)], \\ y_i^m, & y_i > \varepsilon(t_k), \end{cases} \quad i \in \{1, 2\}. \quad (12)$$

Следует отметить, что необходимое уменьшение величин положительных компонент  $y_i(t)$  строящегося решения  $y(t)$  (и тем самым в итоге необходимую реализацию отрицательности показателя решения  $y(t)$ , построенного на всей полуоси  $[t_0, +\infty)$ ) будем осуществлять ненулевыми и только отрицательными значениями компонент  $m$ -возмущения.

В соответствии с этим компонента  $f_2(t, y_1)$   $m$ -возмущения  $f(t, y)$  на отрезке  $[t_{2k}, t_{2k+1}]$  имеет представление

$$f_2(t, y_1) = \begin{cases} 0, & t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}], \\ -d_{2k+1} F_{2k+1}(y_1) E(t, \eta_{2k+1}, \eta'_{2k+1}, t'_{2k+1}, t_{2k+1}), & t \in (\eta_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{cases} \quad (13)$$

в котором  $\eta_{2k+1} \equiv t_{2k+1} - 1$ ,  $\eta'_{2k+1} = \eta_{2k+1} + \varepsilon(t_{2k+1})$ ,  $y_1 \geq 0$ , а постоянная  $d_{2k+1} > 0$  подлежит последующему определению.

Бесконечная дифференцируемость функции  $f_2(t, y_1)$  обеспечивается аналогичным свойством функций Гелбаума–Олмстеда и нулевыми значениями их односторонних производных любого порядка в концевых точках промежутков определения, а также значениями самих этих функций в указанных точках.

По определению постоянной  $\beta_1 < 0$  для первой компоненты  $y_1(t)$  наряду с представлениями (8) и (10) справедливы равенства

$$y_1(t) = e^{\beta_2 t_{2k+1}} + \alpha(t - t_{2k+1}) \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ c_{2k+1}^{-1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{cases} \quad (14)$$

Для этой компоненты на отрезке  $[t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}]$ , во всех внутренних точках которого возмущение  $f_2(t, y_1)$  при  $y_1 > 0$  отрицательно, в соответствии с его определением (11)–(13) установим неравенство

$$y_1(t) > \varepsilon(t_{2k+1}), \quad t \in [t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}]. \quad (15)$$

Так как  $\beta_2 > -\alpha$ , то неравенство (15) на отрезке  $[t_{2k+1} - 1, t'_{2k+1}]$  получается из представления (14) следующим образом:

$$\ln y_1(t) > -\alpha(1 + t_{2k+1}) > -2\alpha t_{2k+1} > -t_{2k+1}^2 \equiv \ln \varepsilon(t_{2k+1}),$$

что обеспечивается выбором

$$k > k_0 : \quad t_k > t_{k_0} = \theta^{k_0} > 4(1 + \alpha).$$

Таким образом, неравенство (15) полностью доказано. Оно позволяет представить возмущение  $f_2[t, y_1(t)]$  в виде

$$f_2[t, y_1(t)] = -d_{2k+1} E(t, \dots) y_1^m(t), \quad t \in [t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}]. \quad (16)$$

Вторая компонента  $y_2(t)$  с начальным значением  $y_2(t_{2k}) = c_{2k} \exp(\beta_2 t_{2k})$  является на отрезке  $[t_{2k}, t_{2k+1}]$  решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot{y}_2 = a_2(t) + f_2(t, y_1(t)), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}].$$

Это решение в силу равенств (11)–(14) и (16) имеет представление

$$\begin{aligned} y_2(t) &= z_1(t) + z_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}], \\ z_1(t) &= y_2(t_{2k}) e^{-\alpha(t-t_{2k})} \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}), \\ c_{2k+1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{cases} \\ z_2(t) &= 0, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} z_2(t) &= -d_{2k+1} e^{m\beta_2 t_{2k+1}} \int_{\eta_{2k+1}}^t c_{2k+1}^{1-m}(\tau) E(\tau, \dots) e^{\alpha(\tau-t) + m\alpha(\tau-t_{2k+1})} d\tau \equiv \\ &\equiv -d_{2k+1} e^{m\beta_2 t_{2k+1}} J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t), \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом, согласно оценкам (9) для функций  $c_k(t)$ , отличных от единицы лишь на интервалах  $(t'_k, t_k)$ , справедливы неравенства

$$\begin{aligned} J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t) &\leq e^{2m\alpha}, \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}], \\ e^{-2m\alpha} &\leq J_{2k+1}(\eta'_{2k+1}, t'_{2k+1}) < J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t_{2k+1}). \end{aligned} \quad (19)$$

По определению (6) величины  $\beta_2$  справедливо равенство

$$\beta_2 - (\theta - 1)\alpha = m\theta\beta_2.$$

Поэтому функция  $z_1(t)$ , найденная по формуле (17), принимает значение

$$z_1(t_{2k+1}) = c_{2k} \exp(m\beta_2 t_{2k+1}). \quad (20)$$

Постоянную  $d_{2k+1}$  определим из условия

$$y_2(t_{2k+1}) = z_1(t_{2k+1}) + z_2(t_{2k+1}) = \exp(\beta_1 t_{2k+1}).$$

Сравнивая значения (18) и (20), для постоянной  $d_{2k+1}$  получаем представление

$$d_{2k+1} = \frac{c_{2k} - \exp(\beta_2 t_{2k+1})}{J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t_{2k+1})},$$

в котором величина  $\beta = \beta_1 - m\beta_2$  является в соответствии с определением (6) отрицательной:

$$\beta = (\theta - m)\beta_2 - (\theta - 1)\alpha = -\alpha(1 + m) \frac{\theta - 1}{m\theta - 1} < 0.$$

Поэтому для  $k \geq k_0$ :  $\theta^{k_0} > m\theta/(\theta - 1)^2$  постоянная  $d_{2k+1}$  будет положительной и ограниченной сверху величиной  $e^{2m\alpha}$ .

С учётом оценок (9) и соотношений (17)–(19) для второй компоненты  $y_2(t)$  справедливы неравенства

$$|y_2(t)| = e^{2\alpha + \beta_2 t_{2k} - \alpha(t-t_{2k})} \leq e^{2\alpha + \beta_2 t}, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}),$$

поскольку  $\beta_2 t > -\alpha$  в силу (6);

$$|y_2(t)| \leq z_1(t) + |z_2(t)| \leq e^{2\alpha + \beta_2 t_{2k} - \alpha(t-t_{2k})} + d_{2k+1} e^{m\beta_2 t_{2k+1}} J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{4m\alpha(+\beta_2 t_{2k}-\alpha(t_{2k+1}-t_{2k}))} + e^{4m\alpha+m\beta_2 t_{2k+1}} = \\ &= 2e^{4m\alpha+m\beta_2 t_{2k+1}} \leq e^{4m\alpha+\beta_2 t}, \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{aligned}$$

так как  $\beta_2 < 0$ , и поэтому

$$m\beta_2 t_{2k+1} < \beta_2 t_{2k+1} \leq \beta_2 t.$$

Для первой же компоненты  $y_1(t)$  в силу оценок (9), представления (10) и определения  $\beta_1$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 < y_1(t) &\leq \exp[\alpha + \beta_1 t_{2k} + \alpha(t - t_{2k})] = \exp[\alpha + \beta_2 t_{2k+1} - \alpha(t_{2k+1} - t)] \leq \\ &\leq \exp(\alpha + \beta_2 t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}]. \end{aligned}$$

Полученные на завершающем этапе построения на отрезке  $[t_{2k}, t_{2k+1}]$  возмущённой системы и её решения равенства

$$y_1(t_{2k+1}) = c_{2k+1}^{-1} \exp(\beta_2 t_{2k+1}), \quad y_2(t_{2k+1}) = \exp(\beta_1 t_{2k+1})$$

являются начальными значениями компонент решения  $y(t)$  для их построения на следующем отрезке  $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$ . Они идентичны предыдущим начальным значениям (7) с заменой  $y_1$  на  $y_2$  и наоборот. Поэтому необходимые построения на отрезке  $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$  повторяют с указанной заменой построения на предыдущем отрезке  $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ .

В итоге на всем отрезке  $[t_{2k}, t_{2k+2}]$  построены двумерная нелинейная система с необходимым  $m$ -возмущением и её нетривиальное решение  $y(t)$  с компонентами  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , принимающими значения

$$\begin{aligned} y_1(t_{2k}) &= e^{\beta_1 t_{2k}}, \quad y_1(t_{2k+1}) = c_{2k+1}^{-1} e^{\beta_2 t_{2k+1}}, \\ y_2(t_{2k}) &= c_{2k} e^{\beta_2 t_{2k}}, \quad y_2(t_{2k+1}) = e^{\beta_1 t_{2k+1}}, \quad k \geq k_0, \end{aligned} \quad (21)$$

и удовлетворяющими оценкам

$$|y_i(t)| \leq 2 \exp(4m\alpha + \beta_2 t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}], \quad (22)$$

с числом  $k_0 \in \mathbb{N}$ , наибольшим из определённых выше.

Методом математической индукции распространим приведённое на отрезке  $[t_{2k}, t_{2k+2}]$  построение нелинейной системы с  $m$ -возмущением и её решения  $y(t)$  на всю полуось  $t \geq T_0 = \theta^{2k_0}$ . При этом для всех  $k \geq k_0$  сохраняются значения (21) и оценки (22) для компонент решения  $y(t)$ . Тем самым очевидны представления  $\lambda[y] = \beta_2$  и (4) для показателя этого решения.

На отрезке  $[t_0, T_0 + 2]$ ,  $t_0 = 1$ , положим  $f(t, y) \equiv 0$ ,  $y \geq 0$ , и построенное решение  $y(t)$  продолжим по непрерывности на этот отрезок решением системы линейного приближения. Положим также  $f(t, y) \equiv 0$  для всех  $y \notin \mathbb{R}_+^2$  и  $t \geq t_0$ . Теорема доказана.

В заключение отметим очевидную бесконечную продолжимость вправо всех решений построенной возмущённой системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728.
2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
3. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.
4. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589.

5. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457.
6. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1443–1453.
7. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.
8. *Изобов Н.А., Мазаник С.А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 168–173.

Институт математики НАН Беларуси,  
г. Минск,  
Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25.06.2023 г.  
После доработки 25.06.2023 г.  
Принята к публикации 11.10.2023 г.