

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА
В ТОНКОМ СЛОЕ

© 2023 г. Е. С. Болдырева

Исследуется существование и устойчивость периодических решений модельного уравнения Навье–Стокса в тонком трёхмерном слое в зависимости от существования и устойчивости периодических решений одного специального предельного двумерного уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064123110110, EDN: PDGIXG

Введение. Уравнение Навье–Стокса является классической моделью исследований течения ньютоновской жидкости. Наиболее подробно уравнения Навье–Стокса исследованы в фундаментальных работах [1–3] и др.

Цель данной статьи – исследовать периодические по времени решения модельного уравнения Навье–Стокса несжимаемой жидкости в тонкой трёхмерной области $Q = \Omega \times (0, \varepsilon)$, где $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – прямоугольник, ε – малый параметр. Для этого рассматривается трёхмерное уравнение Навье–Стокса, дополненное периодическими по пространственным переменным граничными условиями и уравнением несжимаемости.

Данная задача рассматривалась многими авторами (см., например, [4–8]). Постановка задачи в тонком слое впервые была предложена в работе [4]. Модельная задача Навье–Стокса в параллелепипеде рассматривается в [5], там же вводится понятие “приведённой” системы уравнений, которая является в некотором смысле предельной: это трёхмерная система функций, зависящая от времени t и двух пространственных переменных, лежащих в области Ω . Два уравнения этой системы являются двумерным уравнением Навье–Стокса в прямоугольнике, а третье – линейное параболическое уравнение.

Отметим, что после замены переменных толщина ε сингулярно входит в систему уравнений. В настоящей работе осуществляются предельные переходы, которые идейно близки к принципу усреднения (см. [9, 10]).

Дополнительным требованием является нулевое среднее по пространственным переменным исследуемых решений. На важность такого класса решений указано в работе [7]. При выполнении этого требования в настоящей статье найдены условия, при которых наличие периодического решения у двумерного уравнения из “приведённой” системы влечёт за собой существование при малых ε периодических по t решений у трёхмерного уравнения. Более того, установлено, что устойчивость по первому приближению периодического решения двумерного уравнения Навье–Стокса в приведённой системе влечёт за собой при малых ε устойчивость этих решений у трёхмерного уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трёхмерное уравнение Навье–Стокса в тонком слое

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla P = F(t, x_1, x_2, x_3), \quad \nabla \cdot U = 0, \quad (1)$$

где $t > 0$ и $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega_\varepsilon$ ($\Omega_\varepsilon = \Omega \times (0, \varepsilon)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – прямоугольник $[0, l_1] \times [0, l_2]$ и $\varepsilon > 0$ – малая величина); функция $U = (U_1, U_2, U_3)$ – трёхмерная вектор-функция от переменных (t, x_1, x_2, x_3) , которая является скоростью течения элемента в момент времени t в точке (x_1, x_2, x_3) ; коэффициент ν – кинематическая вязкость, ниже будем считать, что $\nu = 1$; скалярная величина $P = P(t, x_1, x_2, x_3)$ – давление; $F = F(t, x_1, x_2, x_3)$ – внешняя сила, предполагается T -периодической по переменной t .

Будем рассматривать уравнение (1) как эволюционное уравнение относительно скорости $U = (U_1(t, x_1, x_2, x_3), U_2(t, x_1, x_2, x_3), U_3(t, x_1, x_2, x_3))$ и давления $P = P(t, x_1, x_2, x_3)$. Задача

для уравнения (1) будет изучаться при наличии периодических по пространственным переменным граничных условий

$$\begin{aligned} U(t, 0, x_2, x_3) &= U(t, l_1, x_2, x_3), & U_{x_1}(t, 0, x_2, x_3) &= U_{x_1}(t, l_1, x_2, x_3), \\ U(t, x_1, 0, x_3) &= U(t, x_1, l_2, x_3), & U_{x_2}(t, x_1, 0, x_3) &= U_{x_2}(t, x_1, l_2, x_3), \\ U(t, x_1, x_2, 0) &= U(t, x_1, x_2, \varepsilon), & U_{x_3}(t, x_1, x_2, 0) &= U_{x_3}(t, x_1, x_2, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

где U_{x_1} , U_{x_2} , U_{x_3} – производные от функции U по x_1 , x_2 , x_3 соответственно. Уравнение (1) с краевыми условиями (2) можно интерпретировать как течение на трёхмерном тонком в одном направлении торе.

Кроме того, при выполнении условия

$$\int_Q F dx = 0, \quad (3)$$

как показано в [7], если в начальный момент времени

$$\int_Q U dx = 0, \quad (4)$$

то все решения U будут обладать таким же свойством в любой момент времени.

Произведём в задаче (1), (2) следующую замену переменных:

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = \varepsilon y,$$

$$\tilde{u}(t, x_1, x_2, y) = U(t, x_1, x_2, \varepsilon y), \quad p(t, x_1, x_2, y) = P(t, x_1, x_2, \varepsilon y).$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d\tilde{u}_\varepsilon}{dt} - \Delta_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon + (\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla_\varepsilon) \tilde{u}_\varepsilon = F_\varepsilon(t, x_1, x_2, \varepsilon y), \quad (5)$$

где $\nabla_\varepsilon = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \varepsilon^{-1} \partial/\partial y)$ и $\Delta_\varepsilon = (\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \varepsilon^{-2} \partial^2/\partial y^2)$ – сингулярные по ε дифференциальные выражения, граничные условия (2) запишутся как

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, 0, x_2, y) &= \tilde{u}(t, l_1, x_2, y), & \tilde{u}_{x_1}(t, 0, x_2, y) &= \tilde{u}_{x_1}(t, l_1, x_2, y), \\ \tilde{u}(t, x_1, 0, y) &= \tilde{u}(t, x_1, l_2, y), & \tilde{u}_{x_2}(t, x_1, 0, y) &= \tilde{u}_{x_2}(t, x_1, l_2, y), \\ \tilde{u}(t, x_1, x_2, 0) &= \tilde{u}(t, x_1, x_2, 1), & \tilde{u}_{x_3}(t, x_1, x_2, 0) &= \tilde{u}_{x_3}(t, x_1, x_2, 1), \end{aligned} \quad (6)$$

а условия (3) и (4) перейдут в условия $\int_Q \tilde{u}_\varepsilon dx = 0$ и $\int_Q F_\varepsilon dx = 0$ соответственно, где $Q = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, 1)$.

Обозначим через A_ε оператор, порождённый эллиптическим дифференциальным выражением Δ_ε и граничными условиями (6), т.е. $A_\varepsilon \tilde{u} = -\Delta_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon$, а через B_ε – оператор, определяемый равенством $B_\varepsilon \tilde{u} = (\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla_\varepsilon) \tilde{u}_\varepsilon$. Тогда, как показано в [11], для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ оператор A_ε – сильно-позитивный в пространстве $L_2(Q)$, поэтому для него определены $e^{-A_\varepsilon t}$ и дробные степени $A_\varepsilon^{-\alpha}$, где $-1 < -\alpha < 0$.

Используя стандартные замены с дробными степенями $\tilde{u} = A_\varepsilon^{-\alpha} \hat{u}$ (см. [11, 12]), уравнение (5) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + A_\varepsilon \hat{u} = A^\alpha F_\varepsilon - B_\varepsilon \hat{u}. \quad (7)$$

Задача о T -периодических по t решениях уравнения (7) сводится к задаче о нахождении неподвижных точек интегрального оператора (см. [11])

$$\Phi_\varepsilon(\hat{u}) = e^{-A_\varepsilon t} (I - e^{-A_\varepsilon T})^{-1} \int_0^T A_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon(T-s)} (F_\varepsilon - B_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha} \hat{u}(s)) ds + \int_0^t A_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon(t-s)} (F_\varepsilon - B_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha} \hat{u}(s)) ds$$

в пространстве $C_T(L_2(Q))$ – T -периодических по t функций со значениями в пространстве $L_2(Q)$.

Будем предполагать, что неподвижные точки являются гладкими функциями, тогда от интегрального уравнения $\hat{u} = \Phi_\varepsilon(\hat{u})$ можно перейти к дифференциальному уравнению (7) (см. [11]), т.е. если $\hat{u}$ – неподвижная точка оператора Φ_ε , то $A_\varepsilon^\alpha \hat{u}$ – решение уравнения (7).

Первым результатом данной работы является доказательство существования при малых ε периодических по t решений r_ε . Затем с помощью линеаризации по В.И. Юдовичу [3] исследуется устойчивость решений r_ε . Линеаризованное уравнение (см. [3]) имеет вид

$$\bar{u}'_\varepsilon - \Delta_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon + (r_\varepsilon(t) \cdot \nabla_\varepsilon) \bar{u}_\varepsilon + (\bar{u}_\varepsilon \cdot \nabla_\varepsilon) r_\varepsilon(t) = 0.$$

Исследуем устойчивость периодических по t решений уравнения (7) с помощью спектральной задачи

$$u_\varepsilon' + A_\varepsilon u_\varepsilon + B_\varepsilon(t) u_\varepsilon + \sigma_\varepsilon u_\varepsilon(t) = 0, \quad (8)$$

где $u_\varepsilon(t)$ – T -периодическая по t функция, $B_\varepsilon(t) u_\varepsilon = (r_\varepsilon(t) \cdot \nabla_\varepsilon) u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla_\varepsilon) r_\varepsilon(t)$, а σ_ε – спектральный параметр. Для этого используем результат В.И. Юдовича об устойчивости, который в наших обозначениях сформулируем как

Теорема 1. *Для того чтобы периодическое решение r_ε уравнения (5) при малом ε было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы уравнение (8) не имело нетривиальных периодических решений при $\operatorname{Re} \sigma_\varepsilon \leq -\sigma_0 < 0$.*

2. Приведённое уравнение Навье–Стокса. Предельный переход в операторе Φ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ описывается при помощи “приведённой” системы (см. [4, 6]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) v + (v \cdot \nabla_2) v &= \begin{pmatrix} F_{01} \\ F_{02} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_3 + \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u_3 &= F_{03}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $u = (v_1(t, x_1, x_2), v_2(t, x_1, x_2), u_3(t, x_1, x_2))$, $v = (v_1(t, x_1, x_2), v_2(t, x_1, x_2))$, $u_3 = u_3(t, x_1, x_2)$. В (9) учтено, что функция $F_0(t, x_1, x_2) = F(t, x_1, x_2, 0)$ и является трёхмерной:

$$F_0(t, x_1, x_2) = (F_{01}(t, x_1, x_2), F_{02}(t, x_1, x_2), F_{03}(t, x_1, x_2)).$$

Рассмотрим систему уравнений (9) со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u(t, 0, x_2) &= u(t, l_1, x_2), \quad u_{x_1}(t, 0, x_2) = u_{x_1}(t, l_1, x_2), \\ u(t, x_1, 0) &= u(t, x_1, l_2), \quad u_{x_2}(t, x_1, 0) = u_{x_2}(t, x_1, l_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, будем предполагать, что выполнены равенства $\nabla_2 \cdot v = 0$. Заметим, что если $\int_\Omega F_0 dx = 0$, то для периодических по t решений u выполнено тождество

$$\int_\Omega u(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 \equiv 0.$$

Обозначим через A_0 оператор, порождённый эллиптическим дифференциальным выражением $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ и граничными условиями (10).

Для “приведённой” системы (9) задача об исследовании устойчивости (см. теорему 1) решений данной системы сводится к отсутствию периодических решений при $\sigma \geq \sigma_0$ с $\operatorname{Re} \sigma > 0$ следующей спектральной задачи:

$$\frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} + \widehat{A_0} \widehat{w} + \widehat{A_0^\alpha} \widehat{B_0} \widehat{A_0^{-\alpha}} \widehat{w} + \sigma \widehat{w} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + \widehat{A_0} w_3 + \widehat{A_0^\alpha} \widehat{B_{03}} \widehat{A_0^{-\alpha}} w_3 + \sigma w_3 = 0. \quad (12)$$

Системе (11), (12) соответствует действующий в пространстве $C_T(L_2(\Omega))$ оператор Φ_{0_2} , задаваемый формулой

$$\begin{aligned} \Phi_{0_2}(w) = & e^{-A_0 t} (I - e^{-A_0 T})^{-1} \int_0^T A_0^\alpha e^{-A_0(T-s)} (B_0(s) - \sigma) A_0^{-\alpha} w(s) ds + \\ & + \int_0^t A_0^\alpha e^{-A_0(t-s)} (B_0(s) - \sigma) A_0^{-\alpha} w(s) ds. \end{aligned}$$

Пусть M – проекция, полученная интегрированием по переменной y :

$$(Mu)(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 u(x_1, x_2, y) dy,$$

таким образом, Mu фактически не зависит от третьей переменной. Очевидно, $M : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$. В силу лемм 1, 2 из статьи [6] при $\varepsilon \rightarrow 0$ оператор $\Phi_\varepsilon(u) \rightarrow \Phi_0(Mu)$, где $\Phi_0(Mu)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \Phi_0(M\hat{u}) = & e^{-A_0 t} (I - e^{-A_0 T})^{-1} \int_0^T A_0^\alpha e^{-A_0(T-s)} (F_0 - B_0 A_0^{-\alpha} M\hat{u}) ds + \\ & + \int_0^t A_0^\alpha e^{-A_0(t-s)} (F_0 - B_0 A_0^{-\alpha} M\hat{u}) ds. \end{aligned}$$

При таком доопределении оператора $\Phi_\varepsilon(u)$ при $\varepsilon = 0$ получившийся оператор $\Phi_\varepsilon(u)$ будет вполне непрерывным по совокупности переменных (ε, u) .

Заметим, что неподвижные точки оператора $\Phi_0(M\hat{u})$ являются функциями двух пространственных переменных и поэтому совпадают с неподвижными точками $\Phi_{0_2}(u)$ в пространстве $C_T(L_2(\Omega))$.

3. Теоремы о существовании и устойчивости. Главным результатом данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть “приведённое” трёхмерное уравнение Навье–Стокса (9) имеет T -периодическое по t решение u^0 такое, что спектральная задача, построенная по линеаризованному на первых двух компонентах решения u^0 двумерного уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial q^0}{\partial t} - \Delta_2 q^0 + (q^0 \nabla_2) v_i^0(t) + (v_i^0(t) \nabla_2) q^0 = 0, \quad i = 1, 2,$$

в классе T -периодических по t решений, удовлетворяющих условиям (3), (4), не вырождена. Тогда при малых ε трёхмерное уравнение Навье–Стокса (5) имеет периодические по t решения r_ε и справедливо соотношение

$$\sup_t \left(\int_Q |r_\varepsilon(t, x_1, x_2, y) - u^0(t, x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 dy \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

В доказательстве теоремы главную роль играет следующая вспомогательная лемма, имеющая и самостоятельный интерес.

Лемма. Пусть спектральная задача (12), построенная по линеаризованному на первых двух компонентах решения u^0 двумерного уравнения Навье–Стокса, в классе T -периодических по t решений не вырождена при всех σ с $\operatorname{Re} \sigma \geq 0$. Тогда при том же σ спектральная задача (11), (12), построенная по приведённой линеаризованной на решении u^0 системе, тоже не вырождена.

Теорема 3. Пусть спектральная задача (12), построенная по двумерному линеаризованному на первых двух компонентах решения u^0 уравнения Навье–Стокса, в классе T -периодических по t решений не вырождена при $\operatorname{Re} \sigma \leq -\sigma_0 \neq 0$, т.е. $v_i^0(t)$, $i = 1, 2$, является асимптотически устойчивым решением двумерного уравнения Навье–Стокса (10). Тогда при достаточно малом ε спектральная задача, построенная по трёхмерному линеаризованному на решении r_ε уравнению (8), тоже не вырождена при $\operatorname{Re} \sigma_\varepsilon \leq -\sigma_0 < 0$, т.е. решение r_ε будет асимптотически устойчивым решением уравнения (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leray J. Etude de diverses equations integrales nonlineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. V. 12. P. 1–82.
2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
3. Юдович В.И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов, 1984.
4. Raugel G., Sell G. Navier–Stokes equations on thin 3FD domains. I: Global attractors and global regularity of solutions // J. Amer. Math. Soc. 1993. V. 6. P. 503–568.
5. Raugel G., Sell G. Equations de Navier–Stokes dans des domaines minces endimension trois: regularite globale // C. R. Acad. Sci. Paris. 1989. V. 309. P. 299–303.
6. Johnson R., Kamenskii M., Nistri P. On the existence of periodic solutions of the Navier–Stokes equations in thin domain using the topological degree // J. of Dynamics and Differ. Equat. 2000. V. 12. № 4. P. 681–712.
7. Foias C., Manley O., Rosa R., Temam R. Navier–Stokes Equations and Turbulence. Cambridge, 2009.
8. Звягин В.Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа. Воронеж, 2014.
9. Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для системы уравнений с оператором Навье–Стокса в главной части // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 1. С. 94–127.
10. Гурова И.Н. Одно утверждение типа принципа родственности и вторая теорема Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения параболических уравнений // Качественные и приближённые методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1982. С. 47–58.
11. Красносельский М.А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
12. Соболевский П.Е. О нестационарных уравнениях гидродинамики вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 1. С. 45–48.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.09.2023 г.

После доработки 02.09.2023 г.

Принята к публикации 20.09.2023 г.