

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬЮ

© 2023 г. А. А. Мельникова, П. А. Точилин

Рассматривается линейно-выпуклая управляемая система, задаваемая совокупностью дифференциальных уравнений, с непрерывными матричными коэффициентами. В системе могут быть управляющие параметры, а также неопределённости (помехи), на возможные значения которых наложены жёсткие поточечные ограничения. Для данной системы на конечном отрезке времени с учётом ограничений исследуется задача гарантированного попадания на целевое множество из заданной начальной позиции, несмотря на действие помехи. Основным этапом решения задачи является построение альтернированного интеграла и множества разрешимости. Для построения последнего наибольшую вычислительную сложность представляет вычисление геометрической разности целевого множества и множества, определяемого помехой. Рассматривается двумерный пример указанной задачи, для которого предлагается способ нахождения множества разрешимости без необходимости овыпукления разности опорных функций множеств.

DOI: 10.31857/S0374064123110080, EDN: PEOZOC

Введение. В настоящей работе обсуждается задача гарантированного попадания на целевое множество в момент времени t_1 , несмотря на действие помехи, для линейной управляемой системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

с непрерывными матричными коэффициентами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; управление $u(t) \in P(t)$, помеха $v(t) \in Q(t)$, где $P(t)$, $Q(t)$ – непрерывные многозначные отображения, принимающие значения во множестве выпуклых компактов (непрерывность понимается в смысле метрики Хаусдорфа). Задачи такого типа исследовались в работах [1, 2] и остаются актуальными [3, 4]. Часто используемый метод решения задачи целевого управления состоит в построении вспомогательных множеств разрешимости и далее в синтезе управлений за счёт “прицеливания” на такие множества [5]. Для нахождения множества разрешимости могут быть использованы разные подходы, одним из которых является альтернированный интеграл Понтрягина [6]. В этом случае задача сводится к интегрированию многозначных отображений. Альтернативным подходом является применение методов динамического программирования с помощью функции цены. Множество разрешимости является нулевым множеством уровня функции цены, а эта функция может быть найдена как решение (вообще говоря, обобщённое) уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса [7, с. 42]. Известно, что в случае без неопределённости значение функции цены в любой точке совпадает с расстоянием от точки до множества разрешимости [8, с. 20–34], однако в случае с помехой этот вопрос изучен недостаточно.

В данной работе для заданных на $\mathbb{R}^2$ целевого множества M и множества допустимых значений помехи Q , где M , Q – непустые выпуклые компактные множества, рассмотрен пример решения задачи в случае, когда на положение системы может влиять только помеха. Предложена гипотеза, позволяющая выполнить замену наиболее вычислительно трудной части многозначного интеграла выражением без овыпукления геометрической разности, а также представлено выражение для получающейся в результате функции цены. Вычисления выполнены с привлечением аппарата многозначного анализа [2, 9, 10].

1. Постановка задачи. Сведём систему (1) к линейно-выпуклой управляемой системе

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2)$$

с жёсткими ограничениями (новыми) на помеху и управление

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t). \quad (3)$$

Вектор $x(t) \in \mathbb{R}^2$ задаёт положение системы, $u(t)$, $v(t)$ – управление и помеха соответственно, $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$ – непрерывные многозначные отображения, принимающие значения во множестве выпуклых компактов $\mathbb{R}^2$ (далее обозначено $\text{conv } \mathbb{R}^2$). Непрерывность понимается в смысле метрики Помпейю–Хаусдорфа [10] (расстояния Хаусдорфа) $h(A, B)$ между замкнутыми ограниченными множествами A , B пространства $\mathbb{R}^2$:

$$h(A, B) = \inf_{r>0} \{A \subseteq B + \mathcal{B}_r(0, 0), B \subseteq A + \mathcal{B}_r(0, 0)\},$$

где $\mathcal{B}_r(0, 0)$ – шар радиуса r с центром в начале координат.

Для системы (2) с учётом ограничений (3) рассмотрим задачу гарантированного попадания на целевое множество $M \in \text{conv } \mathbb{R}^2$ в момент времени t_1 , несмотря на действие помехи.

Определение 1. Множество разрешимости в момент времени τ $\mathbf{W}[\tau] = \mathbf{W}(\tau, t_1, M)$ системы (2) с ограничением (3) содержит все точки (τ, x_τ) такие, что решения системы $\dot{x}(t) \in \mathcal{P}(t) + v(t)$, выпущенные из точки (τ, x_τ) , $t_0 \leq \tau < t_1$, достигают множества M в момент времени t_1 , а именно, найдётся допустимая многозначная стратегия $u(t, x) \subset \mathcal{P}(t)$ такая, что для любого возмущения $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ будет выполнено $x(t_1) \in M$.

Под *допустимым управлением* понимается такое многозначное отображение $u(t, x)$, что после его подстановки в систему дифференциальных уравнений будет получено многозначное включение, имеющее решения при любом начальном условии.

На промежутке $t \leq \tau \leq t_1$ рассмотрим совокупность длин отрезков разбиения

$$\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}, \quad t = \vartheta_k, \dots, \vartheta_1, \quad \vartheta_0 = t_1, \quad \sigma_i > 0, \quad (4)$$

$$\vartheta_j = t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i. \quad (5)$$

Для k -го шага множество разрешимости может быть найдено по формуле

$$\begin{aligned} W[\vartheta_k] &= W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = \left(W[\vartheta_{k-1}] + \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} -\mathcal{P}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau) d\tau = \\ &= \left(\left(\left(\left(\left(\left(M + \int_{\vartheta_1}^{t_1} -\mathcal{P}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \int_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) + \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} -\mathcal{P}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) + \dots \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} -\mathcal{P}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau) d\tau = \mathcal{I}(t, t_1, M, \Sigma_k), \end{aligned}$$

где знак “ $\dot{-}$ ” означает геометрическую разность множеств (см. определение 3). Предполагается, что множества разрешимости $W(\cdot)$ не пусты на каждом шаге. Предел множеств $W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}])$ при стремлении диаметра разбиения отрезка $[t, t_1]$ к нулю совпадает с множеством $\mathbf{W}[t]$.

Определение 2. Альтернированный интеграл Понтрягина $\mathcal{I}(t, t_1, M)$ есть интеграл $\mathcal{I}(t, t_1, M, \Sigma_k)$ при $\max_{i=1, k} \{\sigma_i\} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Тогда $\mathbf{W}[t] = \mathbf{W}(t, t_1, M) = \mathcal{I}(t, t_1, M)$.

В статье будет рассмотрен пример задачи построения множества разрешимости в пространстве $\mathbb{R}^2$, когда M – единичный шар, $\mathcal{P}(t) = 0$, помеха $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}$ – вертикальный единичный

отрезок, не зависящий от времени. Также получено уравнение, которому удовлетворяет расстояние до множества разрешимости. Для упрощения промежуточных соотношений выберем $t_1 = 0$.

Рассматриваемая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

$$v(t) \in \mathcal{Q} = 0 \times [-1, 1], \quad (7)$$

целевое множество $M = \mathcal{B}_1(0, 0)$.

Дадим далее необходимые определения.

Определение 3. Геометрическая разность множеств A , B пространства $\mathbb{R}^2$ есть множество

$$A \dot{-} B = \{c : c + B \subseteq A\}.$$

Определение 4. Опорная функция $\rho(l|X)$ множества X из пространства $\mathbb{R}^2$ определяется по формуле

$$\rho(l|X) = \sup_{x \in X} \langle l, x \rangle.$$

Опорные функции единичного шара и вертикального единичного отрезка соответственно равны $\rho(l|M) = \|l\|$ и $\rho(l|Q) = |l_2|$. При $t_1 = 0$ множество разрешимости в момент времени $t \leq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} W[t] &= M \dot{-} (-t)Q = \\ &= \mathcal{B}_1(0, -t) \cap \mathcal{B}_1(0, t). \end{aligned} \quad (8)$$

При $t < 0$ оно представляет собой горизонтальную лунку (рис. 1).

Лунка и прямые

$$x_2 = \pm t \pm \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} x_1$$

делят плоскость на области G_0 , $G_1^\pm$, $G_2^\pm$ (рис. 2).

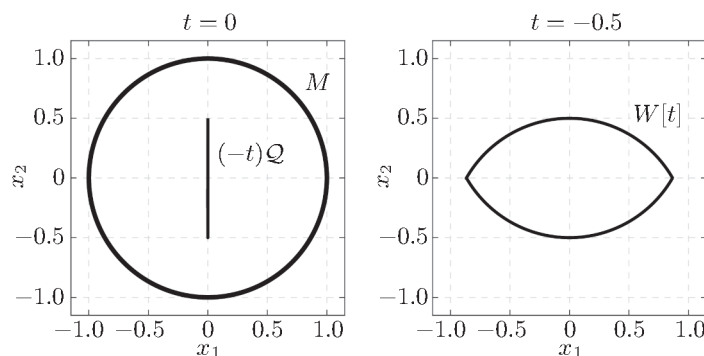


Рис. 1. Целевое множество и помеха. Множество разрешимости в момент времени t .

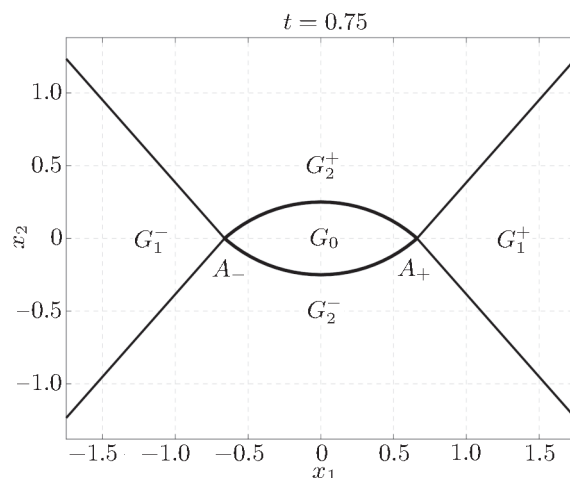


Рис. 2. Множество разрешимости и границы областей.

2. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для функции расстояния до множества разрешимости. Рассмотрим функцию цены

$$\mathcal{V}(t, x) = \max_{x(\cdot)} \{d(x(t_1), M) : x(\cdot) \in \mathcal{X}(\cdot)\},$$

где $\mathcal{X}(\cdot)$ – множество всех траекторий – решений задачи $\dot{x} \in \mathcal{Q}(\tau)$, $x(t_0) = x$. Известно, что в точках дифференцируемости функция цены $\mathcal{V}(t, x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \max_{v \in \mathcal{Q}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, v \right) = 0, \quad (9)$$

где

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, v \right) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2} v_2.$$

Выберем функцию $V(t, x) = d(x, W[t])$, равную расстоянию до множества разрешимости, и подставим её в уравнение (9).

В области G_0

$$V(t, x) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0,$$

функция цены удовлетворяет уравнению (9).

В области G_1^+ $V(t, x) = \|x - A_+(t)\|$, $A_+ = (\sqrt{1-t^2}, 0)$. Обозначив $\vartheta(t) = \sqrt{1-t^2}$, получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{(x_1 - \vartheta)t}{V\vartheta}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{x_1 - \vartheta}{V}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{x_2}{V}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \left| \frac{\partial V}{\partial x_2} \right| &= \frac{t(x_1 - \vartheta)}{\vartheta V} + \frac{|x_2|}{V} = \frac{x_1 t + \vartheta(|x_2| - t)}{\vartheta V} \neq 0. \end{aligned}$$

Видно, что равенство (9) не верно.

В области G_2^+ $V(t, x) = 0 \vee \|x - B_+(t)\| + 1$, $B_+(t) = (0, t)$, $V(t, x) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - t)^2} + 1$ и

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{t - x_2}{\sqrt{x_1^2 + (x_2 - t)^2}}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{x_1}{V}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{x_2 - t}{V}.$$

Подставив частные производные в уравнение (9), будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left| \frac{\partial V}{\partial x_2} \right| = \frac{t - x_2}{\sqrt{x_1^2 + (x_2 - t)^2}} + \frac{|x_2 - t|}{V} = 0.$$

Для области G_1^- при помощи аналогичных рассуждений можно показать, что уравнение (9) не выполнено. В области G_2^- равенство будет верно.

Замечание 1. Проверка выполнения уравнения (9) имеет смысл лишь для точек, в которых функция $V(t, x)$ дифференцируема. Функция $V(t, x)$ не является дифференцируемой на границе между областями G_0 и G_2^+ , включая точки $A_{\pm}$ (аналогично между областями G_0 и G_2^-), а также на границе между областями $G_1^{\pm}$, $G_2^{\pm}$.

3. Переход к модифицированной задаче.

Определение 5. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^2$ – выпуклое замкнутое множество, $\mathcal{Q}$ – такое множество, что $M \dot{-} \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Множество $\text{str co}_M \mathcal{Q} = M \dot{-} (M \dot{-} \mathcal{Q})$ называется *M-сильно выпуклой оболочкой множества $\mathcal{Q}$* .

Обобщим понятие сильно выпуклой оболочки. В предположении существования числа $\sigma_0 > 0$ такого, что $M \dot{-} \sigma_0 \mathcal{Q} \neq \emptyset$, дадим следующее

Определение 6. Пусть $M \in \text{conv } \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Q}$ – произвольное множество. Выпуклый компакт $\hat{\mathcal{Q}}$ называется *предельной M -сильно выпуклой оболочкой множества $\mathcal{Q}$* , если

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} h(\hat{\mathcal{Q}}, \sigma^{-1} \text{str co}_M \sigma \mathcal{Q}) = 0.$$

Предельная M -сильно выпуклая оболочка множества $\mathcal{Q}$ далее обозначается $\lim \text{str co}_M \mathcal{Q}$.

3.1. Множество разрешимости. На интервале $t \leq \tau \leq t_1$ снова рассмотрим совокупность длин отрезков разбиения $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ (см. (4), (5)). Множество разрешимости для k -го шага определяется по формуле

$$\begin{aligned} W[\vartheta_k] &= W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = \\ &= \left(\left(\left(M \dot{-} \int_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) \dot{-} \dots \right) \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau) d\tau = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = (((M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q}) \dot{-} \sigma_2 \mathcal{Q}) \dot{-} \dots) \dot{-} \sigma_k \mathcal{Q}(\tau) d\tau = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k \mathcal{Q}. \quad (10)$$

При вычислении множества разрешимости с $\mathcal{P} = \{0\}$ и постоянной помехой на каждом шаге возникают выражения вида $M \dot{-} \sigma \mathcal{Q}$, где σ – длина временного отрезка. Пользуясь свойствами геометрической разности (см., например, [9, с. 22–23]), можно показать, что $\sigma \mathcal{Q} \subseteq M \dot{-} (M \dot{-} \sigma \mathcal{Q})$. С применением этого свойства получим

$$M \dot{-} (M \dot{-} (M \dot{-} \sigma \mathcal{Q})) = M \dot{-} \sigma \mathcal{Q}.$$

С учётом этого запишем выражение для множества разрешимости (10):

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k \mathcal{Q} = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \text{str co}_{W[\vartheta_{k-1}]} \sigma_k \mathcal{Q}. \quad (11)$$

Множества $\text{str co}_{W[\vartheta_j]} \sigma \mathcal{Q}$, $j = \overline{0, k}$, представляют собой вертикальные лунки.

Множество $\text{str co}_M \sigma_1 \mathcal{Q} = M \dot{-} (M \dot{-} \int_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q} d\tau) = M \dot{-} (M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q})$ – вертикальная лунка, составленная из двух частей круга M ; по оси x_1 ограничено значениями $\pm(1 - \sqrt{1 - \sigma_1^2})$, по x_2 – значениями $\pm\sigma_1$. По построению $M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q}$ полностью выметает множество M , т.е. $(M \dot{-} (M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q})) + (M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q}) = M$.

Для k -го шага множество

$$\text{str co}_{W[\vartheta_{k-1}]} \sigma_k \mathcal{Q} = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \left(W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q} d\tau \right) = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} (W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k \mathcal{Q})$$

является вертикальной лункой, ограниченной по оси x_1 значениями

$$\pm\phi_k = \pm \left(\sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i \right)^2} \right),$$

по оси x_2 – значениями $\pm\sigma_k$ (рис. 3). Множество разрешимости на k -м шаге $W[\vartheta_k]$ – это горизонтальная лунка, ограниченная по оси x_1 значениями $\pm\sqrt{1 - (\sum_{i=1}^k \sigma_i)^2}$, а по оси x_2 – значениями $\pm(1 - \sum_{i=1}^k \sigma_i)$.

Рассмотрим произвольное разбиение Σ_k , $\max_{i=\overline{1, k}} \{\sigma_i\} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Множество разрешимости при $t_1 = 0$ есть

$$W[t] = M \dot{-} \int_t^0 \mathcal{Q} d\tau = M \dot{-} \text{str co}_M(-t) \mathcal{Q},$$

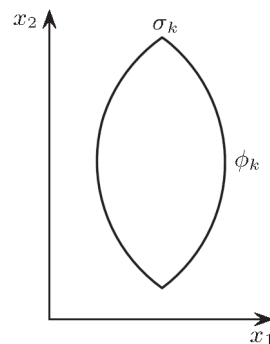


Рис. 3. Множество $\text{str co}_{W[\vartheta_{k-1}]} \sigma_k \mathcal{Q}$.

последнее равенство получено с применением формулы (11). Это вертикальная лунка, ограниченная по оси x_1 значениями $1 \pm \sqrt{1-t^2}$, по оси x_2 – значениями $\pm t$.

Покажем, что интеграл по тому же временному отрезку множества $\hat{Q} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_M Q$ при подстановке вместо Q даёт для рассматриваемой задачи то же множество разрешимости.

Лемма 1. Множество $\hat{Q} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_M Q$ для задачи (6) с ограничением (7) имеет форму ромба с диагоналями, параллельными осям координат.

Доказательство. По определению предельной сильно выпуклой оболочки

$$\hat{Q} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{\cap} \tau Q} Q = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \frac{1}{\sigma} [(M \dot{\cap} \tau Q) \dot{\cap} ((M \dot{\cap} \tau Q) \dot{\cap} \sigma Q)],$$

где τ – длина временного отрезка. Предполагаем, что τ такое, что $\lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{\cap} \tau Q} Q \neq \emptyset$. Множество $(M \dot{\cap} \tau Q) \dot{\cap} ((M \dot{\cap} \tau Q) \dot{\cap} \sigma Q)$ – вертикальная лунка, полученная сдвигом единичного круга вдоль оси x_1 , ограниченная по оси x_1 значениями $\pm(\sqrt{1-\tau^2} - \sqrt{1-(\tau+\sigma)^2})$, по x_2 – значениями $\pm\sigma$. Для предельного множества по оси x_1

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} (\sqrt{1-\tau^2} - \sqrt{1-(\tau+\sigma)^2}) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

По оси x_2

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \frac{1}{\sigma} \sigma = 1.$$

Эти точки соединены прямой. Получаем, что $\hat{Q}$ – ромб, задаваемый прямыми

$$x_2 = \pm \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} x_1 \pm 1,$$

с опорной функцией

$$\rho(l|\hat{Q}) = \max \left\{ \left| \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} l_1 \right|, |l_2| \right\}. \quad (12)$$

Лемма доказана.

Найдём значение интеграла по временному отрезку от множества $\hat{Q}$.

Лемма 2. Интеграл

$$\int_t^0 \max \left\{ |l_1| \frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}, |l_2| \right\} d\tau \quad (13)$$

совпадает с вертикальной лункой, опорная функция в направлении (l_1, l_2) $l_1^2 + l_2^2 = 1$, которой равна

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1-t^2} l_1, & l_1 \geq 0, \\ 1 + \sqrt{1-t^2} l_1, & l_1 < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимо рассмотреть выражение под интегралом в зависимости от знаков величин l_1, l_2 . Прямым подсчётом получаем при $l_1 \geq 0$ и $l_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_t^0 \max \left\{ l_1 \frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}, l_2 \right\} d\tau &= \int_t^{l_2+t} l_2 d\tau + \int_{l_2+t}^0 l_1 \frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}} d\tau = \\ &= l_2^2 + l_1 (-\sqrt{1-(\tau-t)^2})|_{l_2+t}^0 = l_2^2 + l_1^2 - \sqrt{1-t^2} l_1 = 1 - \sqrt{1-t^2} l_1. \end{aligned}$$

Аналогичный результат имеет место и для $l_1 \geq 0, l_2 < 0$.

При $l_1 < 0$, $l_2 > 0$

$$\int_t^0 \max \left\{ -l_1 \frac{\tau - t}{\sqrt{1 - (\tau - t)^2}}, l_2 \right\} d\tau = \int_0^{l_2} l_2 d\tau + \int_{l_2}^t -l_1 \frac{\tau - t}{\sqrt{1 - (\tau - t)^2}} d\tau = 1 + \sqrt{1 - t^2} l_1.$$

Для $l_1 < 0$ и $l_2 < 0$ интеграл (13) также равен $1 + \sqrt{1 - t^2} l_1$.

Значение интеграла от опорной функции ромба (12) совпадает со значением опорной функции к вертикальной лунке, полученной пересечением множеств (единичных кругов) – сдвигов единичного круга вдоль оси x_1 на $\sqrt{1 - t^2}$ и $-\sqrt{1 - t^2}$.

Таким образом, значение интеграла (13) совпадает с $\text{str com}(-t)\mathcal{Q}$. Лемма доказана.

С учётом доказанной леммы можно перейти к задаче с заменой множества $\mathcal{Q}$ на $\hat{\mathcal{Q}} = \lim \text{str com } \mathcal{Q}$.

Теорема 1. Множество разрешимости $W[t]$ (8) задачи (6) с ограничением (7) совпадает со множеством разрешимости, полученным из $M \dot{-} \int_t^0 \rho(l|\hat{\mathcal{Q}})$, где опорная функция $\rho(l|\hat{\mathcal{Q}})$ может быть найдена из (12).

3.2. Уравнение для функции цены.

Теорема 2. Функция $V(t, x) = d(x, W[t])$ удовлетворяет уравнению (9), в котором помета берётся из $\lim \text{str com } \mathcal{Q}$.

Доказательство. Проверим это для каждой из областей G_0 , G_1^+ , G_2^+ . В области G_0 уравнение выполняется в силу равенства частных производных нулю. В области G_1^+ для опорной функции множества $\hat{\mathcal{Q}}$ справедливо выражение

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{\mathcal{Q}}\right) = \max \left\{ \left| \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1 - \vartheta}{V(t, x)} \right|, \left| \frac{x_2}{V(t, x)} \right| \right\}.$$

При $x_2 \geq 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{\mathcal{Q}}\right) = \max \left\{ \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1 - \vartheta}{V(t, x)}, \frac{x_2}{V(t, x)} \right\} = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1 - \vartheta}{V(t, x)}.$$

Для $x_2 < 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{\mathcal{Q}}\right) = \max \left\{ \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1 - \vartheta}{V(t, x)}, \frac{-x_2}{V(t, x)} \right\} = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1 - \vartheta}{V(t, x)}.$$

Значит,

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{\mathcal{Q}}\right) = \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \right| = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1 - \vartheta}{V},$$

и, подставив в уравнение, получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{\mathcal{Q}}\right) = \frac{(x_1 - \vartheta)t}{\vartheta V} + \frac{x_1 - \vartheta}{V} \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} = 0.$$

В области G_2^+ для опорной функции множества $\hat{\mathcal{Q}}$ справедливо выражение

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{\mathcal{Q}}\right) = \max \left\{ \left| \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1}{V(t, x)} \right|, \left| \frac{x_2 - t}{V(t, x)} \right| \right\}.$$

Для $x_1 \geq 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{\mathcal{Q}}\right) = \max \left\{ \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1}{V(t, x)}, \frac{x_2 - t}{V(t, x)} \right\} = \frac{x_2 - t}{V(t, x)}.$$

Для $x_1 < 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{\mathcal{Q}}\right) = \max \left\{ \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{x_1}{V(t, x)}, \frac{x_2 - t}{V(t, x)} \right\} = \frac{x_2 - t}{V(t, x)}.$$

Таким образом,

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{Q} \right) = \left| \frac{\partial V}{\partial x_2} \right| = \frac{|x_2 - t|}{\partial V} = \frac{x_2 - t}{\partial V}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial V}{\partial x} \middle| \hat{Q} \right) = \frac{t - x_2}{\partial V} + \frac{x_2 - t}{\partial V} = 0.$$

Для областей G_1^- и G_2^- рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Замечание 2. Функция $V(t, x)$ не является дифференцируемой на границе между областями G_0 и G_2^+ , G_0 и G_2^- , включая точки $A_{\pm}$, а также на границе между областями $G_1^{\pm}$, $G_2^{\pm}$ (см. замечание 1).

Заключение. В работе для конкретного примера получено представление множества $\hat{Q}$ для помехи, дающее множество разрешимости, совпадающее с $W[t]$, построенное при условии принадлежности помехи множеству Q . В модифицированной задаче не требуется овыпукления геометрической разности опорных функций множеств, возникающей в альтернированном интеграле. Получено уравнение, которому удовлетворяет функция расстояния до множества разрешимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 910–912.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
3. Ухоботов В.И. Об одной задаче управления при наличии помехи и возможной поломке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 265–278.
4. Каплунова Е.П., Точилин П.А. Задача целевого управления квадрокоптером при движении в горизонтальной плоскости с огибанием препятствий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 4. С. 21–36.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
6. Куржанский А.Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 234–248.
7. Fleming W.H., Soner H.M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York, 1993.
8. Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston, 1997.
9. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2007.
10. Половинкин Е.С. Мнозначный анализ и дифференциальные включения. М., 2014.

ООО “Яндекс.Технологии”, г. Москва,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне,
Китай

Поступила в редакцию 26.04.2023 г.
После доработки 26.04.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.