
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

О СУЩЕСТВОВАНИИ
ГЛОБАЛЬНЫХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ
С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ
СИСТЕМЫ ВЛАСОВА–ПУАССОНА
С ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

© 2023 г. А. Л. Скубачевский

Рассмотрена первая смешанная задача для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем в области с кусочно-гладкой границей. Эта задача описывает кинетику двухкомпонентной высокотемпературной плазмы под действием самосогласованного электрического поля и внешнего магнитного поля. Доказано существование глобальных слабых решений. В случае цилиндрической области получены достаточные условия существования глобальных слабых решений с носителями в строго внутреннем цилиндре, что соответствует удержанию высокотемпературной плазмы в пробочной ловушке.

DOI: 10.31857/S0374064123110043, EDN: PDXVTF

Введение. Уравнения Власова, или кинетические уравнения с самосогласованным полем, были впервые получены в статье [1]. В настоящее время они представляют собой одну из наиболее распространённых моделей кинетической теории газов. Им посвящена обширная литература как в физике (см. [2–6]), так и в математике (см. [7–25]). Обобщённые решения задачи Коши для системы уравнений Власова–Пуассона рассматривались в работах [8, 13, 16] и др. Существование глобального классического решения задачи Коши для уравнений Власова–Пуассона изучалось в статьях [11, 19, 22, 23] и др. Рядом авторов исследовались слабые решения смешанных задач для указанных уравнений (см., например, [7, 9, 12, 24, 25]). Отметим, что для уравнений Власова нет исчерпывающих результатов о повышении гладкости обобщённых решений смешанных задач, как в случае классических уравнений в частных производных второго порядка. Вопрос о существовании классических и сильных решений смешанных задач в общем случае является нерешённой проблемой ([18, 25], см. также важные работы [15, 17], посвящённые этому вопросу).

Актуальность исследования смешанных задач для системы уравнений Власова в ограниченной области относительно функций плотности распределения заряженных частиц противоположных знаков связана с созданием управляемого термоядерного синтеза. Как известно [6], в случае попадания значительного числа частиц на стенки реактора может произойти его разрушение. Для удержания заряженных частиц на некотором расстоянии от стенок реактора используется внешнее магнитное поле. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает, что внешнее магнитное поле должно обеспечивать существование решений системы Власова–Пуассона с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих на некотором расстоянии от границы области. Существование классических решений этой задачи рассматривалось в работах [26–32].

В настоящей работе будет исследован вопрос существования глобальных слабых решений первой смешанной задачи для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем, описывающей кинетику двухкомпонентной плазмы в ограниченной области с кусочно-гладкой границей. В случае цилиндрической области будут также получены достаточные условия существования глобальных слабых решений с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих в строго внутреннем цилиндре. Это соответствует модели удержания плазмы в пробочной ловушке.

Постановке задачи и используемым в работе обозначениям посвящён п. 1, п. 2 – свойствам характеристик уравнений Власова. В п. 3 рассмотрены сильные решения системы уравнений

Власова для фиксированной напряжённости электрического поля, доказано существование сильного решения. Сглаженной системе уравнений Власова–Пуассона посвящён п. 4, доказано существование сильного решения для произвольного параметра сглаживания $\varkappa > 0$. В п. 5 доказано существование слабого решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона, которое является слабым пределом подпоследовательности решений сглаженной системы. Полученные результаты являются обобщением работ [24, 25] на случай двухкомпонентной плазмы с внешним магнитным полем. Использование результатов пп. 2–4 совместно с методом априорной оценки напряжённости электрического поля через нормы начальных функций плотности распределения заряженных частиц, разработанном в статье [32], позволило доказать в п. 6 существование слабого решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона в цилиндре с компактными носителями функций плотности распределения заряженных частиц.

1. Постановка задачи и обозначения. Будем рассматривать систему уравнений Власова–Пуассона

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x, v, t) dv, \quad x \in Q, \quad 0 < t < T, \quad \beta = \pm 1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^{\beta} \rangle + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left\langle -\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^{\beta} \right\rangle = 0, \quad x \in Q, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < t < T, \quad \beta = \pm 1, \quad (2)$$

относительно неизвестных функций $\varphi(x, t)$ и $f^{\beta}(x, v, t)$ ($\beta = \pm 1$). Здесь $\varphi = \varphi(x, t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; $f^{\beta} = f^{\beta}(x, v, t)$ – функция распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t ; $Q \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^{\infty}$ или цилиндр $G \times (-d, d)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G \in C^{\infty}$; ∇_x и ∇_v – градиенты по x и v соответственно; m_{+1} и m_{-1} – массы иона и электрона соответственно; e – заряд электрона; c – скорость света; B – индукция внешнего магнитного поля; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$; $[\cdot, \cdot]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Введём множество $K \subset \partial Q$ следующим образом: $K = \emptyset$, если $\partial Q \in C^{\infty}$, и $K = (\partial G \times \{-d\}) \cup (\partial G \times \{d\})$, если $Q = G \times (-d, d)$.

Добавим начальные и граничные условия на функции f^{β} следующего вида:

$$f^{\beta}(x, v, t)|_{t=0} = \hat{f}^{\beta}(x, v), \quad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1, \quad (3)$$

$$f^{\beta}(x, v, t) = f^{\beta}(x, R^{-1}(x, v, t)), \quad x \in \partial Q \setminus K, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < t < T, \quad \langle n(x), v \rangle < 0, \quad \beta = \pm 1, \quad (4)$$

а также условия Дирихле для потенциала самосогласованного электрического поля:

$$\varphi(x, t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad 0 \leq t < T, \quad (5)$$

где $\hat{f}^{\beta}(x, v)$, $\beta = \pm 1$, – заданные начальные функции распределения заряженных частиц; $\mathcal{R}(x, v, t) : B_{+} \times (0, T) \rightarrow B_{-} \times (0, T)$ – биективное отображение, действующее по формулам

$$\mathcal{R}(x, v, t) := (x, R(x, v, t)), \quad R(x, v) := (x, v - 2\langle v, n(x) \rangle n(x)), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} B_{+} &= \{(x, v) \in (\partial Q \setminus K) \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle > 0\}, \\ B_{-} &= \{(x, v) \in (\partial Q \setminus K) \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle < 0\}, \\ B_0 &= \{(x, v) \in (\partial Q \setminus K) \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle = 0\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к границе ∂Q в точке x . Отображение $\mathcal{R}$ называется *оператором зеркального отражения*.

Введём следующие обозначения:

$C^k(\bar{D})$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, – пространство функций, непрерывных в $\bar{D}$ и имеющих непрерывные производные в $\bar{D}$ вплоть до k -го порядка с конечной нормой

$$\|u\|_{k,\bar{D}} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_x |D^\alpha u(x)|,$$

где $D = \mathbb{R}^n$ или $D \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая область;

$C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$ – пространство функций, непрерывных и ограниченных в $\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]$, у которых производные первого порядка также непрерывны и ограничены на этом множестве;

$\dot{C}^k(\mathbb{R}^n)(\dot{C}^k(Q))$, $k, n \in \mathbb{N}$, – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n(Q)$ с компактными носителями;

$\hat{C}^k(\bar{Q})$ – пространство вектор-функций $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) : \bar{Q} \rightarrow \bar{Q}$ с координатами $Y_i \in C^k(\bar{Q})$, $k \in \mathbb{N}$;

$C([0, T], C^k(\bar{Q}))$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, – банахово пространство непрерывных функций $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(\cdot, t) \in C^k(\bar{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{k,T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(\cdot, t)\|_k;$$

$L_p(Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, – пространство измеримых функций в области $Y \subset \mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|v\|_{L_p(Y)} = \|v\|_p = \left\{ \int_Y |v(y)|^p dy \right\}^{1/p}, \quad \text{если } p < \infty,$$

$$\|v\|_{L_\infty(Y)} = \|v\| = \operatorname{ess\,sup}_{y \in Y} |v(y)|, \quad \text{если } p = \infty;$$

$W_p^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq p < \infty$, – пространство Соболева функций $v \in L_p(Q)$, имеющих все обобщённые производные $D^\alpha v \in L_p(Q)$, $|\alpha| \leq k$, с нормой

$$\|v\|_{W_p^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |D^\alpha v(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Очевидно, для $v \in C^0(\bar{D})$ $\|v\|_{0,\bar{D}} = \|v\|$. Поэтому в дальнейшем для упрощения обозначений норму функции в $C^0(\bar{D})$ будем заменять на норму в смысле пространства $L_\infty(D)$. Через c_i и k_j будем обозначать положительные константы в неравенствах, не зависящие от правой части. Будем полагать, что $B_R(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < R\}$ и $B_R := B_R(0)$.

2. Уравнения характеристик. Перейдём к уравнениям характеристик для системы уравнений Власова (2) с фиксированным потенциалом электрического поля φ . Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta, \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \quad (8)$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)], \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \quad (9)$$

где $\nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau) = \nabla \varphi(x, \tau)|_{x=X_\varphi^\beta}$.

Далее в работе будем предполагать, что вектор-функции $E(x, t) = -\nabla_x \varphi(x, t)$ и $B(x)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Пусть вектор-функция $E(x, t)$ непрерывна и ограничена на множестве $\bar{Q} \times [0, T]$ и непрерывно дифференцируема по x в $(\bar{Q} \setminus K) \times [0, T]$, а вектор-функция $B(x)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема в $\bar{Q}$. Кроме того, для любой точки $x^0 \in \partial Q \setminus K$

существует шар $B_\varepsilon(x^0)$, $\varepsilon > 0$, такой, что $E(x, t)$ может быть продолжена в $(\bar{Q} \cup \overline{B_\varepsilon(x^0)}) \times [0, T)$ до функции $\tilde{E}(x, t)$, которая непрерывна и ограничена на множестве $(\bar{Q} \cup \overline{B_\varepsilon(x^0)}) \times [0, T)$ и непрерывно дифференцируема по x в $((\bar{Q} \setminus K) \cup \overline{B_\varepsilon(x^0)}) \times [0, T)$.

Замечание 1. Введём векторное поле $\Psi^\beta : \bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^7$ по формуле

$$\Psi^\beta(x, v, t) := \left(v, \frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], 1 \right).$$

Очевидно, что

$$\operatorname{div}_v \left(\frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)] \right) = 0, \quad (x, v, t) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T).$$

Замечание 2. В работах [26–30] получены достаточные условия на начальные функции распределения, напряжённость электрического поля и индукцию внешнего магнитного поля, которые гарантируют, что все характеристики, для которых начальные условия по пространственным переменным лежат на компакте внутри области, не пересекаются с границей для любых $t \in [0, T)$.

Добавим к системе (8), (9) начальные условия вида

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = v, \quad (10)$$

где $(x, v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \cup B_-$, $t \in [0, T)$ (см. (7)).

Обозначим $\Omega := Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ и $A_\pm := B_\pm \times (0, T)$.

В силу условия 1 для любых $p := (x, v, t) \in \Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (8)–(10) на некотором полуинтервале $[t, t_1^\beta(p))$. Обозначим это решение через $S_\varphi^\beta(\tau, p) := (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p))$. Очевидно, существует предел

$$(x_1^\beta, v_1^\beta) := \lim_{\tau \rightarrow t_1^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^3.$$

В силу леммы 1.4 из работы [24] возможны следующие случаи:

- a) $t_1^\beta = t_1^\beta(p) = T$;
- b) $t_1^\beta < T$ и $(x_1^\beta, v_1^\beta) \in B_+ = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle > 0\}$;
- c) $t_1^\beta < T$ и $(x_1^\beta, v_1^\beta) \in B_0 = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle = 0\}$;
- d) $t_1^\beta \in K$.

В случае a) мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $[t, T)$. В случае b) рассмотрим задачу (8), (9) с начальными условиями (10), в которых в соответствии с формулой (6), описывающей зеркальное отражение, положим

$$(x, v) = (x_1^\beta, R(x_1^\beta, v_1^\beta)) \in B_- = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle < 0\}.$$

Поскольку вектор $R(x_1^\beta, v_1^\beta)$ направлен внутрь области Ω , в силу условия 1 на некотором полуинтервале $[t_1^\beta, t_2^\beta)$ существует единственное непродолжаемое решение системы (8), (9) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_1^\beta} = x_1^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_1^\beta} = R(x_1^\beta, v_1^\beta).$$

Обозначим это решение через $S_\varphi^\beta(\tau, p_1^\beta)$, где $p_1^\beta = (x_1^\beta, R(x_1^\beta, v_1^\beta), t_1^\beta)$. Очевидно, $S_\varphi^\beta(\tau, p) \subset C \times \mathbb{R}^3$, $t \in (t_1^\beta, t_2^\beta)$.

Для t_2^β также возможны случаи a)–d). В случае $t_2^\beta = T$ мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $[t_1^\beta, T)$. Функция $S_\varphi^\beta(\tau, p)$, рассматриваемая на полуинтервале $[t, T)$,

имеет разрывы первого рода в точках t_1^β и t_2^β и удовлетворяет системе уравнений (8), (9) на интервалах (t, t_1^β) и (t_1^β, t_2^β) .

В случае $t_2^\beta < T$ и $(x_2^\beta, v_2^\beta) := \lim_{\tau \rightarrow t_2^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in B_+$ опять рассмотрим систему (8), (9) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_2^\beta} = x_2^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_2^\beta} = R(x_2^\beta, v_2^\beta). \quad (11)$$

Существует единственное непродолжаемое решение $S_\varphi^\beta(\tau, p_2^\beta)$ задачи (8), (9), (11), где $p_2^\beta = (x_2^\beta, R(x_2^\beta, v_2^\beta), t_2^\beta)$, на некотором полуинтервале $[t_2^\beta, t_3^\beta)$ и т.д.

Если $t > 0$, то аналогичные построения можно провести для $0 < \tau < t$. Рассмотрим систему (8), (9) при $0 < \tau < t$ с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = R^{-1}(x, v). \quad (12)$$

В силу условия 1 для любых $p = (x, v, t) \in \Omega \cup A_-$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (8), (9), (12) на некотором полуинтервале $(t_{-1}^\beta, t]$. Обозначим это решение $S_\varphi^\beta(\tau, p_0)$, где $p_0 := (x, R^{-1}(x, v))$. Очевидно, существует предел

$$(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) := \lim_{\tau \rightarrow t_{-1}^\beta + 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p_0), V_\varphi^\beta(\tau, p_0)) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^3.$$

Аналогично предыдущему, возможны следующие случаи:

- a) $t_{-1}^\beta = t_{-1}^\beta(p_0) = 0$;
- b) $t_{-1}^\beta > 0$ и $(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) \in B_-$;
- c) $t_{-1}^\beta > 0$ и $(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) \in B_0$;
- d) $t_{-1}^\beta \in K$.

В случае $t_{-1}^\beta = 0$ мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $(0, t]$. В случае b) рассматриваем задачу (8), (9) с начальными условиями (10), в которых положим $(x, v) = (x_{-1}^\beta, R^{-1}(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta)) \in B_+$. В силу условия 1 на некотором полуинтервале $(t_{-2}^\beta, t_{-1}^\beta]$ существует единственное непродолжаемое решение этой задачи и т.д.

Точки $t_1^\beta, t_2^\beta, \dots, t_{-1}^\beta, t_{-2}^\beta, \dots$ мы назовём *моментами отражения*.

Обозначим через S множество точек $p = (x, v, t) \in \Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$, для которых существует $t < t_k^\beta < T$, $k \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\text{либо } (x_k^\beta, v_k^\beta) = \lim_{\tau \rightarrow t_k^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \quad \text{либо } (x_k^\beta, v_k^\beta) \in K,$$

или $0 < t_{-j}^\beta < t$, $j \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\text{либо } (x_{-j}^\beta, v_{-j}^\beta) = \lim_{\tau \rightarrow t_{-j}^\beta + 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \quad \text{либо } (x_{-j}^\beta, v_{-j}^\beta) \in K,$$

или число моментов отражения бесконечно.

Положим $\Lambda = (\Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})) \setminus S$. Очевидно, множество Λ состоит из всех точек $p = (x, v, t) \in \Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ в начальных условиях (10), при которых построенные кусочно-непрерывные решения $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, p)$ существуют на всём интервале $(0, T)$, имеют конечное число моментов отражения и множество моментов отражения t_k^β ($0 < t_k^\beta < T$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$) таких, что $(x_k^\beta, v_k^\beta) \in B_0$ или $t_k^\beta \in K$ пусто.

Через $\mu_n(\cdot)$ обозначим n -мерную меру Лебега. Пусть $\mathcal{B}(A_\pm)$ – σ -алгебра борелевских множеств на множестве $A_\pm := B_\pm \times (0, T)$ с мерой $\nu_\pm$, определённой по формуле

$$\nu_\pm(B) := \int_{A_\pm} \chi_B(x, v, t) |\langle n(x), v \rangle| d\sigma(x) dv dt, \quad B \in \mathcal{B}(A_\pm),$$

где $\chi_B(x, v, t)$ – характеристическая функция множества B .

Решения $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t)$, $0 \leq t < T$, при $(x, v, t) \in \Lambda$ назовём *порождающими характеристиками*. Заметим, что при $t \leq \tau < T$ порождающие характеристики $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t)$ непрерывны по τ справа, а при $0 < \tau \leq t$ они непрерывны по τ слева.

Положим $S_1 = S \cap \Omega$, $\Lambda_1 = \Lambda \cap \Omega$, $S_2 = S \cap A_-$, $\Lambda_2 = \Lambda \cap A_-$, $S_3 = S \cap (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$, $\Lambda_3 = \Lambda \cap (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$.

Из леммы 1.34 в [24] вытекает

Теорема 1. $\mu_7(S_1) = 0$, а множество Λ_1 открыто в $\mathbb{R}^7$, $\nu_-(S_2) = 0$, $\mu_6(S_3) = 0$.

Обозначим $\Gamma_t = \{(x, v, \tau) \in \Lambda_1 : \tau = t\}$. Из замечания 1 следует

Лемма 1. Для $0 \leq s, t < T$ отображение $\hat{S}_\varphi^\beta(s, \dots, t) : \Gamma_t \rightarrow \Gamma_s$ биективно и сохраняет меру Лебега $\mu_6(\cdot)$.

Подробное доказательство см. в предложении 3 из работы [24, с. 52].

3. Сильные решения уравнений Власова. Пусть $\hat{f}^\beta \in \dot{C}^0(Q \times \mathbb{R}^3)$ – непрерывные функции с компактным носителем в $Q \times \mathbb{R}^3$, $\hat{f}^\beta \geq 0$. Обозначим через $w_\pm : A_\pm \rightarrow \mathbb{R}$ измеримые по Борелю функции. Введём оператор $\mathcal{K}$ по формуле

$$\mathcal{K}w_+(x, v, t) := w_+(\mathcal{R}^{-1}(x, v, t)) \quad \text{для п.в. } (x, v, t) \in A_-.$$

Пусть $f^\beta \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\beta = \pm 1$. Зададим функции $f_\pm^\beta$, $\beta = \pm 1$, по формулам

$$f_+^\beta(x, v, t) := \lim_{\tau \rightarrow t-0} f^\beta(S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau), \quad (x, v, t) \in A_+, \quad (13)$$

$$f_-^\beta(x, v, t) := \lim_{\tau \rightarrow t+0} f^\beta(S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau), \quad (x, v, t) \in A_-. \quad (14)$$

Существование почти всюду этих пределов вытекает из результатов п. 2 и того, что $C^0(\bar{\Omega})$ всюду плотно в $L_p(\Omega)$.

Рассмотрим следующую задачу для уравнений Власова:

$$Vf^\beta := \frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v f^\beta \right\rangle = 0, \quad (15)$$

где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$, $t \in (0, T)$, $\beta = \pm 1$,

$$f^\beta(x, v, 0) = \hat{f}^\beta(x, v), \quad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1, \quad (16)$$

$$f_-^\beta(x, v, t) = \mathcal{K}f_+^\beta(x, v, t), \quad (x, v, t) \in A_-, \quad \beta = \pm 1. \quad (17)$$

Будем предполагать, что вектор-функции $E(x, t)$ и $B(x)$ удовлетворяют условию 1.

Определение 1. Измеримые функции $f^\beta(x, v, t)$, $\beta = \pm 1$, будем называть *сильным решением задачи* (15)–(17), если f^β п.в. в Ω являются константами вдоль порождающих характеристик, удовлетворяют начальному условию (16) для п.в. $x \in \bar{Q}$ и $v \in \mathbb{R}^3$ и краевому условию (17) для п.в. $(x, v, t) \in A_-$.

Лемма 2. Существует сильное решение задачи (15)–(17), определяемое формулой

$$f^\beta(x, v, t) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, x, v, t)), \quad (x, v, t) \in \Lambda_1, \quad (18)$$

которое является единственным с точностью до множества меры нуль.

Доказательство. 1. Докажем, что при подстановке порождающих характеристик в формулу (18) мы получим константу, не зависящую от t .

Из группового свойства порождающих характеристик следует, что

$$\hat{S}_\varphi^\beta(s, y, w, \tau) = \hat{S}_\varphi^\beta(s, \hat{S}_\varphi^\beta(t, y, w, \tau), t). \quad (19)$$

Подставив в функцию $f^\beta(x, v, t)$ вместо (x, v) порождающую характеристику $\hat{S}_\varphi^\beta(t, y, w, \tau)$, используя формулу (18) и равенство (19) при $s = 0$, получим

$$f^\beta(x, v, t) = f^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(t, y, w, \tau), t) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, \hat{S}_\varphi^\beta(t, y, w, \tau), t)) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, y, w, \tau)). \quad (20)$$

Очевидно, правая часть (20) не зависит от t , т.е. является константой.

2. Проверим выполнение условий (16). В силу непрерывности справа в точке 0 порождающих характеристик имеем

$$f^\beta(x, v, 0) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, x, v, 0)) = \hat{f}^\beta(x, v).$$

3. Убедимся в справедливости условия (17). По построению порождающих характеристик для $(x, v, t) \in A_-$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|t - \tau| < \varepsilon$ выполняются соотношения

$$S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t) = \hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \quad \tau > t, \quad (21)$$

$$S_\varphi^\beta(\tau, \mathcal{R}^{-1}(x, v, t)) = \hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \quad \tau < t. \quad (22)$$

Используя последовательно (14), (21), (18), (22) и (13), получим

$$\begin{aligned} f_-^\beta(x, v, t) &= \lim_{\tau \rightarrow t+0} f^\beta(S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau) = \lim_{\tau \rightarrow t+0} f^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t+0} \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, \hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t)), \tau) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, x, v, t+0)) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, x, v, t-0)) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t-0} \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, \hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t)), \tau) = \lim_{\tau \rightarrow t-0} f^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t-0} f^\beta(S_\varphi^\beta(\tau, \mathcal{R}^{-1}(x, v, t)), \tau) = f_+^\beta(\mathcal{R}^{-1}(x, v, t)) = \mathcal{K}f_+^\beta(x, v, t), \quad \beta = \pm 1, \quad (x, v, t) \in A_-. \end{aligned}$$

Единственность очевидна. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $\hat{f}^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$. Тогда сильное решение задачи (15)–(17) непрерывно дифференцируемо в Λ_1 .

Лемма 3. Пусть $\hat{f}^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$, $\psi \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ и $I := [0, T)$, а $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, – сильное решение задачи (15)–(17). Тогда отображение

$$\left(t \mapsto \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \right) \in C^1(I)$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv = \\ &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left(\langle v, \nabla_x \psi(x, v) \rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle \right) f^\beta(x, v, t) dx dv. \quad (23) \end{aligned}$$

Доказательство. В силу лемм 1, 2 имеем

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, x, v, t)) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} g(x, v, t) dx dv, \quad (24)$$

где $g(x, v, t) := \psi(\hat{S}_\varphi^\beta(t, x, v, 0)) \hat{f}^\beta(x, v)$. Аналогично доказательству леммы 3.3 в [25] можно показать, что функция $\int_{Q \times \mathbb{R}^3} g(x, v, t) dx dv$ непрерывно дифференцируема по t на полуинтервале $[0, T)$ и

$$\frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} g(x, v, t) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \frac{dg(x, v, t)}{dt} dx dv. \quad (25)$$

Из (24), (25), уравнений характеристик (8), (9), леммы 1 и равенства (18) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \frac{d}{dt} \psi(\hat{S}_\varphi^\beta(t, x, v, 0)) \hat{f}^\beta(x, v) dx dv = \\ &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left\{ \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \psi(\hat{S}_\varphi^\beta(t, x, v, 0))}{\partial \hat{X}_{\varphi, i}^\beta} \frac{d \hat{X}_{\varphi, i}^\beta}{dt} + \frac{\partial \psi(\hat{S}_\varphi^\beta(t, x, v, 0))}{\partial \hat{V}_{\varphi, i}^\beta} \frac{d \hat{V}_{\varphi, i}^\beta}{dt} \right) \right\} \hat{f}^\beta(x, v) dx dv = \\ &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left\{ \langle \hat{V}_\varphi^\beta(t, x, v, 0), \nabla_{\hat{X}_\varphi^\beta} \psi(\hat{S}_\varphi^\beta(t, x, v, 0)) \rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_{\hat{X}_\varphi^\beta} \varphi(\hat{X}_\varphi^\beta(t, x, v, 0), t) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\beta e}{m_\beta c} [\hat{V}_\varphi^\beta(t, x, v, 0), B(\hat{X}_\varphi^\beta(t, x, v, 0))], \nabla_{\hat{V}_\varphi^\beta} \psi(\hat{S}_\varphi^\beta(t, x, v, 0)) \right\rangle \right\} \hat{f}^\beta(x, v) dx dv = \\ &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left\{ \langle v, \nabla_x \psi(x, v) \rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle \right\} \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, x, v, t)) dx dv = \\ &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left\{ \langle v, \nabla_x \psi(x, v) \rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle \right\} f^\beta(x, v, t) dx dv. \end{aligned}$$

Таким образом, интегральное тождество (23) доказано. Лемма доказана.

Обозначим $A_T := Q \times \mathbb{R}^3 \times \{T\}$ и $A_0 := Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\}$.

Лемма 4. Пусть $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, – сильное решение задачи (15)–(17), и пусть $\psi \in \dot{C}^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Тогда (см. (15))

$$\begin{aligned} \langle f^\beta, V\psi \rangle &= \int_{A_+} \psi f_+^\beta d\nu_+ + \int_{A_T} \psi(x, v, T) f^\beta(x, v, T) dx dv - \\ & - \int_{A_-} \psi f_-^\beta d\nu_- - \int_{A_0} \psi(x, v, 0) f^\beta(x, v, 0) dx dv. \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.5 из работы [24, с. 68].

4. Сильные решения сглаженной системы Власова–Пуассона. Обозначим через $G = G(x, y)$ функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в Q . Так как Q – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, функция Грина существует. Единственность функции Грина следует из теоремы 2.4 в [33]. Подробное изложение результатов, посвящённых функции Грина, также можно найти в статье [33].

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{\partial f_{\varkappa}^{\beta}}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f_{\varkappa}^{\beta} \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_{\beta}} E_{\varkappa} + \frac{\beta e}{m_{\beta} c} [v, B(x)], \nabla_v f_{\varkappa}^{\beta} \right\rangle = 0, \quad x \in Q, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T), \quad \beta = \pm 1, \quad (26)$$

где $f_{\varkappa}^{\beta}$ – неизвестные функции, $\varkappa > 0$.

Введём ядро усреднения $\omega_{\varkappa}(x)$ следующим образом. Пусть

$$\omega(t) := \begin{cases} ce^{-1/(1-t^2)}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases} \quad (27)$$

где постоянная $c > 0$ определяется из условия

$$\int_{\mathbb{R}^3} \omega(|x|) dx = 1. \quad (28)$$

Очевидно, $\omega \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$, $\text{supp } \omega = [-1, 1]$. Положим $\omega_{\varkappa}(x) := \varkappa^{-3} \omega(|x|/\varkappa)$. Тогда $\omega_{\varkappa} \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ и $\text{supp } \omega_{\varkappa} = B_{\varkappa}(0)$, при этом в силу (27), (28)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \omega_{\varkappa}(x) dx = 1. \quad (29)$$

Функцию $E_{\varkappa}$ будем определять из соотношений

$$G_{\varkappa}(x, y) = \int_Q G(x, \xi) \omega_{\varkappa}(y - \xi) d\xi, \quad (30)$$

$$E_{\varkappa}(x, t) = -\nabla_x \varphi_{\varkappa}(x, t), \quad \varphi_{\varkappa}(x) = \int_Q G_{\varkappa}(x, y) \rho_{\varkappa}(y, t) dy, \quad (31)$$

$$\rho_{\varkappa}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} (f_{\varkappa}^{+1}(x, v, t) - f_{\varkappa}^{-1}(x, v, t)) dv. \quad (32)$$

Вместе с уравнениями (26) рассмотрим начальные условия

$$f_{\varkappa}^{\beta}(x, v, 0) = \mathring{f}^{\beta}(x, v), \quad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1, \quad (33)$$

где $\mathring{f}^{\beta}(x, v) \in \dot{C}^0(Q \times \mathbb{R}^3)$, а также краевые условия

$$f_{\varkappa,-}^{\beta}(x, v, t) = \mathcal{K} f_{\varkappa,+}^{\beta}, \quad x \in A_-, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T), \quad \beta = \pm 1, \quad (34)$$

где

$$f_{\varkappa,+}^{\beta} := \lim_{\tau \rightarrow t-0} f_{\varkappa}^{\beta}(S_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t), \tau), \quad (x, v, t) \in A_+,$$

$$f_{\varkappa,-}^{\beta} := \lim_{\tau \rightarrow t+0} f_{\varkappa}^{\beta}(S_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t), \tau), \quad (x, v, t) \in A_-,$$

а $S_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t) := (X_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t), V_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t))$ – решение следующей системы уравнений характеристик:

$$\frac{dX_{\varkappa}^{\beta}}{d\tau} = V_{\varkappa}^{\beta}, \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \quad (35)$$

$$\frac{dV_{\kappa}^{\beta}}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \nabla_x \varphi_{\kappa}(X_{\kappa}^{\beta}, \tau) + \frac{\beta e}{m_{\beta} c} [V_{\kappa}^{\beta}, B(X_{\kappa}^{\beta})], \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \quad (36)$$

с начальными условиями $X_{\kappa}^{\beta}(t, x, v, t) = x$, $V_{\kappa}^{\beta}(t, x, v, t) = v$, соответствующих сглаженной системе Власова–Пуассона (26), (30)–(32).

Для множества $X \subset \mathbb{R}^n$ и отображения $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через $\tilde{f}$ продолжение f нулём на $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Тогда в уравнении (26) при определении $E_{\kappa}(x, t)$ плотность заряда $\rho_{\kappa}(x, t)$ мы заменим на сглаженную плотность $\sigma_{\kappa} = (\omega_{\kappa} * \tilde{\rho}_{\kappa})(x, t)$, и в силу (30) получим выражение

$$\varphi_{\kappa}(x, t) = \int_Q G(x, y) (\omega_{\kappa} * \tilde{\rho}_{\kappa})(y, t) dy,$$

где $(\omega_{\kappa} * \tilde{\rho}_{\kappa})(y, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega_{\kappa}(y - \xi) \tilde{\rho}_{\kappa}(\xi, t) d\xi$.

Теорема 2. Пусть $\dot{f}^{\beta} \in \dot{C}^0(Q \times \mathbb{R}^3)$, $\dot{f}^{\beta} \geq 0$. Тогда для любого $\kappa > 0$ существует сильное решение $\{f_{\kappa}^{\beta}\}$, $\beta = \pm 1$, уравнений (26), (30)–(32) с условиями (33), (34).

Доказательство. 1. Зафиксируем $\kappa > 0$ и построим последовательность сильных решений уравнений Власова $f_{\kappa, n}^{\beta}$ для заданных полей $E_{\kappa, n-1}$.

Положим

$$f_{\kappa, 0}^{\beta}(x, v) := \dot{f}^{\beta}(x, v), \quad \rho_{\kappa, 0}(x) := \int_{\mathbb{R}^3} (f_{\kappa, 0}^{+1} - f_{\kappa, 0}^{-1}) dv.$$

Тогда $\sigma_{\kappa, 0} := \omega_{\kappa} * \tilde{\rho}_{\kappa, 0} \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ и задача

$$-\Delta \varphi_{\kappa, 0}(x) = 4\pi e \sigma_{\kappa, 0}(x), \quad \varphi_{\kappa, 0}|_{\partial Q} = 0$$

имеет единственное классическое решение $\varphi_{\kappa, 0}$. Поскольку $\partial Q \setminus K \in C^{\infty}$, функция $\varphi_{\kappa, 0}(x)$ непрерывна по x , непрерывно дифференцируема по x в $\bar{Q}$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $\bar{Q} \setminus K$, при этом $\varphi_{\kappa, 0} \in C^{\infty}(\bar{Q} \setminus K)$. Таким образом, функции $E_{\kappa, 0}(x) := -\nabla_x \varphi_{\kappa, 0}(x)$ и $B(x)$ в уравнении (26) удовлетворяют условию 1. Следовательно, для $p = (x, v, t) \in (\Lambda_1)_{\kappa, 0} \subset \Omega$ существуют порождающие характеристики, которые обозначим через $\hat{S}_{\varphi_{\kappa, 0}}^{\beta}(\tau, p)$. Множество $(\Lambda_1)_{\kappa, 0} \subset \Omega$ является открытым и $\mu_7(\Omega \setminus (\Lambda_1)_{\kappa, 0}) = 0$ (см. теорему 1).

Далее в качестве $f_{\kappa, 1}^{\beta}$ возьмём функцию

$$f_{\kappa, 1}^{\beta}(x, v, t) := \dot{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varphi_{\kappa, 0}}^{\beta}(0, x, v, t)),$$

которая для $p(x, v, t) \in (\Lambda_1)_{\kappa, 0}$ является сильным решением уравнений Власова для заданного поля $E_{\kappa, 0}(x) = -\nabla_x \varphi_{\kappa, 0}(x)$. Обозначим теперь

$$\begin{aligned} \rho_{\kappa, 1}(x, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} (f_{\kappa, 1}^{+1} - f_{\kappa, 1}^{-1}) dv, \\ \sigma_{\kappa, 1}(x, t) &= \tilde{\rho}_{\kappa, 1} * \omega_{\kappa} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{f}_{\kappa, 1}^{+1}(\xi, v, t) - \tilde{f}_{\kappa, 1}^{-1}(\xi, v, t)) dv \right) \omega_{\kappa}(x - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (37)$$

Из свойств ядра усреднения $\omega_{\kappa}(x)$, равенств (37) и леммы 1 получим следующие соотношения:

$$\|\sigma_{\kappa, 1}(\cdot, t)\|_1 = \|\tilde{\rho}_{\kappa, 1} * \omega_{\kappa}\|_1 \leq \|\dot{f}^{+1}\|_1 + \|\dot{f}^{-1}\|_1, \quad \|\sigma_{\kappa, 1}(\cdot, t)\| \leq C_{\kappa}(\|\dot{f}^{+1}\|_1 + \|\dot{f}^{-1}\|_1).$$

Рассмотрим отображение

$$t \mapsto \sigma_{\kappa, 1}(\cdot, t) \in L_1(Q) \cap L_{\infty}(Q). \quad (38)$$

Из условия компактности носителей начальных функций $\mathring{f}^\beta$ и непрерывности отображения $(t, y, w) \mapsto \hat{S}_{\varphi_{\kappa,0}}^\beta(t, y, w, 0)$ (см. лемму 2.1 из [25]) следует ограниченность множества

$$\bigcup_t \text{supp}_{x,v} f_{\kappa,1}^\beta(x, v, t) = \bigcup_t \text{supp}_{x,v} \mathring{f}^\beta(\hat{S}_{\varphi_{\kappa,0}}^\beta(0, x, v, t)) \subset \mathbb{R}^6$$

для $|t - t_0| < \varepsilon$, $(x, v, t) \in (\Lambda_1)_{\kappa,0}$.

Отсюда, а также из непрерывности отображения $(x, v, t) \mapsto \hat{S}_{\varphi_{\kappa,0}}^\beta(0, x, v, t)$ и очевидной оценки $|\sigma_{\kappa,1}(x, t) - \sigma_{\kappa,1}(x, t_0)| \leq C_{\kappa,1} \sum_{\beta=\pm 1} \|f_{\kappa,1}^\beta(\cdot, \cdot, t) - f_{\kappa,1}^\beta(\cdot, \cdot, t_0)\|_1$ вытекает непрерывность отображения (38).

По построению $\sigma_{\kappa,1}(\cdot, t) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ для всех $t \in [0, T)$ и непрерывна по (x, t) в $\bar{Q} \times [0, T)$.

Обозначим через $\varphi_{\kappa,1}(x, t)$ классическое решение задачи

$$-\Delta \varphi_{\kappa,1}(x, t) = 4\pi e \sigma_{\kappa,1}(x, t), \quad \varphi_{\kappa,1}|_{\partial Q} = 0,$$

существование которого гарантировано в силу принадлежности $\sigma_{\kappa,1}(x, t)$ классу $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ для всех $t \in [0, T)$.

Поскольку $\partial Q \setminus K \in C^\infty$, функция $\varphi_{\kappa,1}(x, t)$ непрерывна по (x, t) , непрерывно дифференцируема по x в $\bar{Q} \times [0, T)$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $(\bar{Q} \setminus K) \times [0, T)$, при этом $\varphi_{\kappa,1}(\cdot, t) \in C^\infty(\bar{Q} \setminus K)$ для $t \in [0, T)$, а $\nabla \varphi_{\kappa,1}$ ограничена в $\bar{Q} \times [0, T)$. Следовательно, функции $E_{\kappa,1}(x, t) := -\nabla_x \varphi_{\kappa,1}(x, t)$ и $B(x)$ в уравнении (26) удовлетворяют условию 1. Таким образом, для $p \in (\Lambda_1)_{\kappa,1} \subset \Omega$ существуют порождающие характеристики, которые мы обозначим через $\hat{S}_{\varphi_{\kappa,1}}^\beta(\tau, p)$. Множество $(\Lambda_1)_{\kappa,1} \subset \Omega$ является открытым и $\mu_7(\Omega \setminus (\Lambda_1)_{\kappa,1}) = 0$.

Продолжив построения аналогичным образом, получим последовательность сильных решений уравнений Власова $f_{\kappa,n}^\beta$ для заданных полей $E_{\kappa,n-1}$:

$$f_{\kappa,n}^\beta(x, v, t) := \mathring{f}^\beta(\hat{S}_{\varphi_{\kappa,n-1}}^\beta(0, x, v, t)), \quad n \geq 1.$$

2. Обозначим $I := [0, T)$. Докажем, что существует подпоследовательность $f_{\kappa,n_k}^\beta \subset f_{\kappa,n}^\beta$ и функция

$$f_\kappa^\beta : I \rightarrow L_1(Q \times \mathbb{R}^3)$$

такая, что

(а) для всех $g \in L_\infty(\mathbb{R}^6)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \left| \int (\tilde{f}_{\kappa,n_k}^\beta(y, v, t) - \tilde{f}_\kappa^\beta(y, v, t)) g(y, v) dy dv \right| = 0, \quad (39)$$

(б) отображение $\tilde{f}_\kappa^\beta : I \rightarrow L_1(\mathbb{R}^6)$ непрерывно в слабой топологии на $L_1(\mathbb{R}^6)$.

В силу леммы 4.5 из работы [16] достаточно показать, что:

1) семейство функций $f_{\kappa,n}^\beta$ является слабо компактным в $L_1(Q \times \mathbb{R}^3)$ для всех $t \in I$;

2) для любых $g(y, v) \in L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3)$ семейство функций $\int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\kappa,n}^\beta(y, v, t) g(y, v) dy dv$ равномерно непрерывно по t .

Первое утверждение следует из теоремы 4.2 в [16] (теорема Данфорда–Петтиса). Доказательство второго утверждения аналогично предложению 5 в [24]. Переобозначим подпоследовательность f_{κ,n_k}^β снова как $f_{\kappa,n}^\beta$.

3. Пусть $\tilde{\rho}_\kappa(y, t) := \int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{f}_\kappa^{+1}(y, v, t) - \tilde{f}_\kappa^{-1}(y, v, t)) dv$ и $\sigma_\kappa(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\kappa(y, t) \omega_\kappa(x - y) dy$. Докажем справедливость равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \|\sigma_{\kappa,n}(\cdot, t) - \sigma_\kappa(\cdot, t)\|_1 = 0. \quad (40)$$

Для каждого фиксированного $x \in Q$ имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{\varkappa,n}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^6} (\tilde{f}_{\varkappa,n}^{+1}(y, v, t) - \tilde{f}_{\varkappa,n}^{-1}(y, v, t)) \omega_{\varkappa}(x - y) dy dv, \\ \sigma_{\varkappa}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^6} (\tilde{f}_{\varkappa}^{+1}(y, v, t) - \tilde{f}_{\varkappa}^{-1}(y, v, t)) \omega_{\varkappa}(x - y) dy dv,\end{aligned}$$

где $\omega_{\varkappa}(x - y) \in L_{\infty}(\mathbb{R}^6)$.

Из последних двух соотношений и (39) получим равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |\sigma_{\varkappa,n}(x, t) - \sigma_{\varkappa}(x, t)| = 0 \quad (41)$$

для любого $x \in Q$.

Используя лемму 1 об инвариантности меры относительно отображения $\hat{S}_{\varphi_{\varkappa,n-1}}^{\beta}(s, \cdot, \cdot, t) : \Gamma_t \rightarrow \Gamma_s$ и групповое свойство порождающих характеристик, будем иметь

$$\begin{aligned}\|f_{\varkappa,n}^{\beta}\|_1 &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\varkappa,n}^{\beta}(x, v, t) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \hat{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varphi_{\varkappa,n-1}}^{\beta}(0, x, v, t)) dx dv = \\ &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \hat{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varphi_{\varkappa,n-1}}^{\beta}(0, \hat{S}_{\varphi_{\varkappa,n-1}}^{\beta}(t, y, w, 0), t)) dy dw = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \hat{f}^{\beta}(y, w) dy dw = \|\hat{f}^{\beta}\|_1.\end{aligned}$$

Из непрерывности отображения $\hat{f}_{\varkappa}^{\beta}(\cdot, \cdot, t) : I \rightarrow L_1(\mathbb{R}^6)$ в слабой топологии и теоремы Банаха–Штейнгауза вытекает неравенство

$$\sup_{t \in I} \|\hat{f}_{\varkappa}^{\beta}(\cdot, \cdot, t)\|_1 \leq c_{\varkappa,1},$$

где $c_{\varkappa,1} > 0$ – некоторая константа, не зависящая от t .

Отсюда и из (41) получим

$$\begin{aligned}|\sigma_{\varkappa,n}(x, t) - \sigma_{\varkappa}(x, t)| &\leq |\sigma_{\varkappa,n}(x, t)| + |\sigma_{\varkappa}(x, t)| \leq \\ &\leq c_{\varkappa,2} \sum_{\beta} (\|\hat{f}^{\beta}\|_1 + \|f_{\varkappa}^{\beta}(\cdot, \cdot, t)\|_1) \leq c_{\varkappa,2} \sum_{\beta} (\|\hat{f}^{\beta}\|_1 + c_{\varkappa,1}),\end{aligned} \quad (42)$$

где $c_{\varkappa,2} > 0$ не зависит от x , n и t .

Из (41), (42) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$\sup_{t \in I} \int_Q |\sigma_{\varkappa,n}(x, t) - \sigma_{\varkappa}(x, t)| dx \leq \int_Q \sup_{t \in I} |\sigma_{\varkappa,n}(x, t) - \sigma_{\varkappa}(x, t)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

4. Покажем теперь, что для фиксированного $\varkappa > 0$ предел последовательности сильных решений уравнений Власова $f_{\varkappa,n}^{\beta}$, определённый в п. 2 доказательства, является сильным решением сглаженной системы Власова–Пуассона (26), (30)–(32) с начальными условиями (33) и краевыми условиями (34).

В п. 2 доказательства мы определили функции $f_{\varkappa}^{\beta}$, а в п. 3 – функции $\rho_{\varkappa}$ и $\sigma_{\varkappa}$. Обозначим

$$\varphi_{\varkappa}(x, t) := \int_Q G(x, \xi) \sigma_{\varkappa}(\xi, t) d\xi, \quad x \in \bar{Q}, \quad t \in I, \quad (43)$$

$$E_{\varkappa}(x, t) := -\nabla_x \varphi_{\varkappa}(x, t), \quad x \in \bar{Q}, \quad t \in I. \quad (44)$$

Из известных свойств функции Грина [33]

$$G(x, y) \leq \frac{c_1}{|x - y|}, \quad |\nabla_x G(x, y)| \leq \frac{c_1}{|x - y|^2}, \quad x, y \in Q, \quad x \neq y, \quad (45)$$

а также соотношений (42)–(45) и неравенства Гёльдера следует оценка

$$\|E_{\varkappa,n}(\cdot, t) - E_{\varkappa}(\cdot, t)\| \leq c_2 \|\sigma_{\varkappa,n}(\cdot, t) - \sigma_{\varkappa}(\cdot, t)\|_1^{1/4}, \quad t \in I,$$

где $E_{\varkappa,n}(x, t) = -\nabla \varphi_{\varkappa,n}(x, t)$, $\varphi_{\varkappa,n}(x, t) = \int_Q G(x, y) \sigma_{\varkappa,n}(y, t) dy$, $x \in \bar{Q}$, $t \in I$.

Отсюда и из (40) получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \|E_{\varkappa,n}(\cdot, t) - E_{\varkappa}(\cdot, t)\| = 0. \quad (46)$$

Таким образом, отображение

$$I \ni t \rightarrow E_{\varkappa}(\cdot, t) \in C(\bar{Q})$$

непрерывно, т.е. функция $E_{\varkappa}(x, t)$ непрерывна по x и t на множестве $\bar{Q} \times I$.

По построению функция $\varphi_{\varkappa}$ является решением задачи

$$-\Delta \varphi_{\varkappa}(x, t) = 4\pi e \sigma_{\varkappa}(x, t), \quad x \in Q, \quad t \in I, \quad (47)$$

$$\varphi_{\varkappa}(x, t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad t \in I, \quad (48)$$

где по определению $\sigma_{\varkappa}(\cdot, t) \in C^\infty(\bar{Q})$, $t \in I$. Поэтому по теореме 6.18 из [34] о регулярности решений эллиптических задач вблизи гладкой границы $\varphi_{\varkappa}(x, t)$ непрерывна по x и t , непрерывно дифференцируема по x в $\bar{Q} \times [0, T)$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $(\bar{Q} \setminus K) \times [0, T)$. Таким образом, выполнено условие 1, которое обеспечивает существование порождающих характеристик для сглаженного уравнения Власова (26) на открытом множестве $(\Lambda_1)_{\varkappa} \subset \Omega$, при этом $\mu_7(\Omega \setminus (\Lambda_1)_{\varkappa}) = 0$. Из равенства (46) следует, что вектор-функции $E_{\varkappa,n}$ и $E_{\varkappa}$ удовлетворяют условиям леммы 2.1 в [25]. Отсюда вытекает существование числа $N \in \mathbb{N}$ такого, что для любых $(x, v, t) \in (\Lambda_1)_{\varkappa}$, $s \neq t_k(x, v, t)$ ($k \in \mathbb{Z}$) и $n \geq N$ мы имеем $(x, v, t) \in (\Lambda_1)_{\varkappa,n}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_{\varkappa,n}^\beta(s, x, v, t) = \hat{S}_{\varkappa}^\beta(s, x, v, t),$$

где $(\Lambda_1)_{\varkappa,n} \subset \Omega$ – открытое множество, $\mu_7(\Omega \setminus (\Lambda_1)_{\varkappa,n}) = 0$.

Следовательно, для всех $(x, v, t) \in (\Lambda_1)_{\varkappa}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\varkappa,n}^\beta(x, v, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}^\beta(\hat{S}_{\varkappa,n}^\beta(0, x, v, t)) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_{\varkappa}^\beta(0, x, v, t)) =: g_{\varkappa}^\beta(x, v, t). \quad (49)$$

Из (49) получим

$$\sup_{x,v,t} |f_{\varkappa,n}^\beta(x, v, t)|, \sup_{x,v,t} |g_{\varkappa}^\beta(x, v, t)| \leq \|\hat{f}^\beta\|.$$

Из соотношений (49), последнего неравенства и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{\varkappa,n}^\beta(\cdot, \cdot, t) - g_{\varkappa}^\beta(\cdot, \cdot, t)\|_1 = 0, \quad t \in I,$$

поэтому

$$f_{\varkappa}^\beta(x, v, t) = g_{\varkappa}^\beta(x, v, t) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_{\varkappa}^\beta(0, x, v, t)) \quad \text{для п.в. } (x, v, t) \in \Omega. \quad (50)$$

Отсюда имеем

$$\sigma_{\varkappa}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^6} (\tilde{f}_{\varkappa}^{+1}(y, v, t) - \tilde{f}_{\varkappa}^{-1}(y, v, t)) \omega_{\varkappa}(x - y) dy dv = \int_{\mathbb{R}^6} (\tilde{g}_{\varkappa}^{+1}(y, v, t) - \tilde{g}_{\varkappa}^{-1}(y, v, t)) dy dv. \quad (51)$$

Таким образом, функции $g_{\varkappa}^{\beta}$ удовлетворяют сглаженной системе уравнений Власова–Пуассона (26), (30)–(32). Легко видеть, что начальные условия (33) и краевые условия (34) также выполняются.

Мы доказали, что функция $g_{\varkappa}^{\beta}(x, v, t) = \hat{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(0, x, v, t))$ является сильным решением задачи (26), (30)–(34). Теорема доказана.

5. Слабые решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона. Докажем теорему существования слабых решений системы Власова–Пуассона (1), (2) с начальным условием (3) и краевыми условиями (4), (5).

Пусть $f^{\beta} \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $\Omega := Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$, а функция $E = E(x, t)$ такова, что $f^{\beta} E$ локально интегрируема на Ω .

Определение 2. Функции f^{β} назовём *слабо дифференцируемыми* по направлению

$$l^{\beta} := \left(v, \frac{\beta e}{m_{\beta}} E + \frac{\beta e}{m_{\beta} c} [v, B(x)], 1 \right),$$

если существуют функции $h^{\beta} \in L_p(\Omega)$ такие, что для всех $g^{\beta} \in \dot{C}^1(\Omega)$

$$\langle h^{\beta}, g^{\beta} \rangle = -\langle f^{\beta}, L^{\beta} g^{\beta} \rangle := -\int_{\Omega} f^{\beta} L^{\beta} g^{\beta} dx dv dt,$$

где

$$L^{\beta} g^{\beta} := \langle v, \nabla_x g^{\beta} \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_{\beta}} E + \frac{\beta e}{m_{\beta} c} [v, B(x)], \nabla_v g^{\beta} \right\rangle + \frac{\partial g^{\beta}}{\partial t}.$$

Функции $h^{\beta} \in L_p(\Omega)$ определены единственным образом и обозначаются через $L^{\beta} f^{\beta}$.

Определение 3. Пусть функции $f^{\beta} \in L_p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) слабо дифференцируемы по направлению l^{β} . Функции $f_{\pm}^{\beta} \in L_{p,loc}(A_{\pm})$ будем называть *следами* f^{β} на $A_{\pm}$, если

$$\langle L^{\beta} f^{\beta}, \psi^{\beta} \rangle + \langle f^{\beta}, L^{\beta} \psi^{\beta} \rangle = \int_{A_+} f_+^{\beta} \psi^{\beta} dv_+ - \int_{A_-} f_-^{\beta} \psi^{\beta} dv_-$$

для любых $\psi^{\beta} \in \dot{C}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \times (0, T))$.

В силу определения 1 и лемм 3, 4 любое сильное решение $\{f^{\beta}\}$, $\beta = \pm 1$, задачи (1)–(5) с начальными функциями $\hat{f}^{\beta} \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ слабо дифференцируемо по направлению l^{β} , при этом $L^{\beta} f^{\beta} = 0$, следы f^{β} на $A_{\pm}$ существуют и задаются формулами (13), (14).

Запишем задачу (1)–(5) следующим образом:

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^{\beta} \rangle + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left\langle E + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^{\beta} \right\rangle = 0, \quad x \in Q, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T), \quad \beta = \pm 1, \quad (52)$$

$$E(x, t) = - \int_Q \nabla_x G(x, \xi) \rho(\xi, t) d\xi, \quad \rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x, v, t) dv, \quad x \in \bar{Q}, \quad t \in [0, T), \quad (53)$$

$$f^{\beta}(x, v, 0) = \hat{f}^{\beta}(x, v), \quad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad (54)$$

$$f_-^{\beta}(x, v, t) = \mathcal{K} f_+^{\beta}(x, v, t), \quad (x, v, t) \in A_-, \quad \beta = \pm 1. \quad (55)$$

Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $1 \leq p' \leq \infty$ такие, что $1/p + 1/p' = 1$, и пусть X – измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$. Для $1 \leq p < \infty$ обозначим через $\sigma(p, p')$ слабую топологию в $L_p(X)$, а через $\sigma(\infty, 1)$ – слабую-* топологию в пространстве $L_\infty(X)$.

Определение 4. Функции $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, будем называть *слабым решением системы уравнений* (52)–(55), если выполняются следующие условия:

- 1) отображения $f^\beta : I \rightarrow (L_1(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(1, \infty)) \cap (L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(\infty, 1))$ непрерывны, $\beta = \pm 1$;
- 2) $f^\beta(x, v, 0) = \mathring{f}^\beta(x, v)$ для почти всех $x \in \bar{Q}$, $v \in \mathbb{R}^3$ и $\beta = \pm 1$;
- 3) для почти всех $(x, t) \in Q \times [0, T]$ и $\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_\beta \beta f^\beta(x, v, t) dv$ положим $E(x, t) = - \int_Q \nabla_x G(x, \xi) \rho(\xi, t) d\xi$, тогда функции $f^\beta E$ локально интегрируемы на $\Omega \times \mathbb{R}^3$;
- 4) для всех $\psi \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ имеем

$$\left(t \rightarrow \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \right) \in C^1(I),$$

$$\frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \psi)(x, v, t) f^\beta(x, v, t) dx dv,$$

где

$$(X^\beta \psi)(x, v, t) := \langle v, \nabla_x \psi(x, v) \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle;$$

- 5) следы f^β на $A_\pm$ существуют и $f_-^\beta = \mathcal{K} f_+^\beta$ на A_- , $\beta = \pm 1$.

Теорема 3. Пусть $\mathring{f}^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$, $\mathring{f}^\beta \geq 0$. Тогда существует слабое решение $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, задачи (52)–(55).

Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 5. Пусть $1 \leq r < 3$, $r \leq q < 3r/(3-r)$, и пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ область такая, что $\bar{K} \subset Q$. Тогда оператор $A_G : L_r(Q) \rightarrow L_q^3(Q)$, определённый по формуле

$$(A_G \sigma)(x) = \chi_K(x) \int_Q \nabla_x G(x, y) \sigma(y) dy,$$

является компактным, где $\chi_K(x)$ – характеристическая функция множества K .

Доказательство см. в [24, лемма 4.3].

Лемма 6. Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть $\{f_\varkappa^\beta\}$, $\varkappa > 0$, – сильное решение задачи (26), (29)–(34). Тогда для любой последовательности $\{\varkappa_n\}$, $\varkappa_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\varkappa_n > 0$, существуют подпоследовательность $\{\varkappa_{n_k}\}$ и функции $f^\beta \in C(I, (L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p')))$ такие, что для любых $p, p' \in [1, \infty]$, $1/p + 1/p' = 1$, справедливы утверждения:

- a) $f_{\varkappa_{n_k}}^\beta \rightharpoonup f^\beta$ в $(L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p'))$ равномерно по $t \in I$ при $k \rightarrow \infty$;
- b) $f_{\varkappa_{n_k}}^\beta \rightharpoonup f^\beta$ в $(L_p(\Omega), \sigma(p, p'))$ при $k \rightarrow \infty$;
- c) существуют $g_\pm^\beta \in L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$ такие, что $f_{\varkappa_{n_k}, \pm}^\beta \rightharpoonup^* g_\pm^\beta$ в $L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство аналогично [24, лемма 4.5].

В дальнейшем для упрощения будем обозначать подпоследовательность $\{\varkappa_{n_k}\}$ через $\varkappa_n$.

Лемма 7. Пусть выполнены условия теоремы 3.

- a) Пусть, кроме того, $1 \leq p \leq 5/3$, а функции $\rho_{\varkappa_n}^\beta : I \rightarrow L_p(Q)$ определены по формуле

$$\rho_{\varkappa_n}^\beta(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) dv.$$

Тогда $\rho_{\varkappa_n}^\beta(x, t) \rightharpoonup \rho^\beta(x, t)$ при $n \rightarrow \infty$ в $(L_p(Q), \sigma(p, p'))$ равномерно по $t \in I$.

б) Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\psi \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(\cdot, v) f_{\varkappa_n}^\beta(\cdot, v, t) dv \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\cdot, v) f^\beta(\cdot, v, t) dv$$

в $(L_p(Q), \sigma(p, p'))$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in I$.

Доказательство см. в [24, лемма 4.7].

Доказательство теоремы 3. 1. Рассмотрим функции f^β , $g_\pm^\beta$, $\beta = \pm 1$, из леммы 6. Покажем, что $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, – слабое решение задачи (52)–(55). Выполнение условий 1)–3) для функций $\{f^\beta\}$ в определении слабого решения следует из леммы 6, равенства (33), а также соотношений (53) и (46).

2. Докажем выполнение условия 4). Вначале покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} (J_{1,n}^\beta(t) + J_{2,n}^\beta(t)) = 0, \quad (56)$$

где

$$J_{1,n}^\beta(t) = \left| \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left(\langle v, \nabla_x \psi(x, v) \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle \right) (f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) - f^\beta(x, v, t)) dx dv \right|,$$

$$J_{2,n}^\beta(t) = \left| \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \frac{\beta e}{m_\beta} \langle \nabla_v \psi(x, v), E_{\varkappa_n}^\beta(x, t) f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) - E^\beta(x, t) f^\beta(x, v, t) \rangle dx dv \right|, \quad (57)$$

$\psi \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$, $E_{\varkappa_n}^\beta(x, t) = \int_Q e_n(x, y) \rho_{\varkappa_n}^\beta(y, t) dy$, $\rho_{\varkappa_n}^\beta(y, t) := \int_{\mathbb{R}^3} f_{\varkappa_n}^\beta(y, v, t) dv$.

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} J_{1,n}^\beta = 0. \quad (58)$$

Поскольку $\psi \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$, имеем

$$\langle v, \nabla_x \psi(x, v) \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle \in L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3) \cap L_1(Q \times \mathbb{R}^3).$$

Отсюда и из утверждения а) леммы 6 следует равенство (58).

Докажем теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} J_{2,n}^\beta = 0. \quad (59)$$

Для любых $t \in I$ и п.в. $x \in Q$ имеем $\rho^\beta(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} f^\beta(x, v, t) dv$. В силу леммы 6 $\rho^\beta(\cdot, t) \in L_1(Q)$. Из доказательства леммы 4.1 в [34] и неравенств (45) следует, что потенциал

$$\varphi^\beta(x, t) := \int_Q G(x, y) \rho^\beta(y, t) dy$$

непрерывно дифференцируем по x для $x \in Q$ и $t \in I$ и

$$E^\beta(x, t) = -\nabla_x \varphi^\beta(x, t) = -\int_Q \nabla_x G(x, y) \rho^\beta(y, t) dy.$$

Обозначим

$$e(x, y) := -\nabla_x G(x, y), \quad e_n(x, y) := -\int_Q \nabla_x G(x, \xi) \omega_{\varkappa_n}(y - \xi) d\xi. \quad (60)$$

Тогда

$$E^\beta(x, t) = \int_Q e(x, y) \rho^\beta(y, t) dy.$$

Положим

$$E(x, t) = \sum_\beta \beta E^\beta(x, t), \quad E_{\varkappa_n}(x, t) = \sum_\beta \beta E_{\varkappa_n}^\beta(x, t).$$

Используя (60), мы можем записать (57) в виде

$$\begin{aligned} J_{2,n}^\beta(t) &= \frac{\beta e}{m_\beta} \int_{Q \times Q \times \mathbb{R}^6} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) f_{\varkappa_n}^\beta(y, w, t) \langle e_n(x, y) - e(x, y), \nabla_v \psi(x, v) \rangle dx dv dy dw + \\ &+ \frac{\beta e}{m_\beta} \int_{Q \times Q \times \mathbb{R}^6} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) (f_{\varkappa_n}^\beta(y, w, t) - f^\beta(y, w, t)) \langle e(x, y), \nabla_v \psi(x, v) \rangle dx dv dy dw + \\ &+ \frac{\beta e}{m_\beta} \int_{Q \times Q \times \mathbb{R}^6} f^\beta(y, w, t) (f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) - f^\beta(x, v, t)) \langle e(x, y), \nabla_v \psi(x, v) \rangle dx dv dy dw. \end{aligned} \quad (61)$$

Доказательство равенства (59) проводится аналогично доказательству леммы 4.8 из [24]. Для этого достаточно показать, что каждое из трёх слагаемых в формуле (61) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in I$. Докажем, например, справедливость этого утверждения для второго слагаемого. Для этого воспользуемся леммой 5 при $r = 5/3$ и $r \leq q < 15/4$. Выберем q' из условия $1/q + 1/q' = 1$. Поскольку $\text{supp}_x \psi \subset Q$, в силу утверждения б) леммы 7 имеем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{e}{m_\beta} \int_{Q \times Q \times \mathbb{R}^6} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) (f_{\varkappa_n}^\beta(y, w, t) - f^\beta(y, w, t)) \langle e(x, y), \nabla_v \psi(x, v) \rangle dx dv dy dw \right| = \\ &= \left| \frac{e}{m_\beta} \int_{Q \times Q \times \mathbb{R}^6} \chi_{\text{supp}_x \psi}(x) f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) (f_{\varkappa_n}^\beta(y, w, t) - f^\beta(y, w, t)) \langle e(x, y), \nabla_v \psi(x, v) \rangle dx dv dy dw \right| \leq \\ &\leq \frac{e}{m_\beta} \int_Q \chi_{\text{supp}_x \psi}(x) \left| \int_Q e(x, y) (\rho_{\varkappa_n}^\beta(y, t) - \rho^\beta(y, t)) dy \right| \left\| \int_{\mathbb{R}^3} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) \nabla_v \psi(x, v) dv \right\| dx \leq \\ &\leq \frac{e}{m_\beta} \left\| \chi_{\text{supp}_x \psi}(x) \int_Q e(x, y) (\rho_{\varkappa_n}^\beta(y, t) - \rho^\beta(y, t)) dy \right\|_q \left\| \int_{\mathbb{R}^3} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) \nabla_v \psi(x, v) dv \right\|_{q'}. \end{aligned} \quad (62)$$

В силу утверждения б) леммы 7

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^3} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) \nabla_v \psi(x, v) dv \right\|_{q'} \leq C, \quad (63)$$

где $C > 0$ не зависит от $t \in I$.

С другой стороны, из леммы 5 следует, что оператор $A_G : L_r(Q) \rightarrow L_q^3(Q)$ компактный, поэтому он переводит слабо сходящуюся последовательность $\{\rho_{\varkappa_n}^\beta\}$ в $L_r(Q)$ (см. утверждение а) леммы 7) в сильно сходящуюся в $L_q^3(Q)$. Следовательно,

$$\left\| \chi_{\text{supp}_x \psi}(x) \int_Q e(x, y) (\rho_{\varkappa_n}^\beta(y, t) - \rho^\beta(y, t)) dy \right\|_q \rightarrow 0$$

равномерно по $t \in I$. Отсюда и из (62), (63) следует (59). Таким образом, справедливость (56) доказана. Это означает, что

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \psi)(x, v, t) f_{\varepsilon_n}^\beta(x, v, t) dx dv \rightarrow \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \psi)(x, v, t) f^\beta(x, v, t) dx dv \quad (64)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in I$.

С другой стороны, в силу утверждения а) леммы 6 имеем

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} \varphi(x, v) f_{\varepsilon_n}^\beta(x, v, t) dx dv \rightarrow \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \varphi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \quad (65)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in I$, при этом из леммы 3 следует, что

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} \varphi(x, v) f_{\varepsilon_n}^\beta(x, v, t) dx dv \in C^1(I), \quad (66)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \varphi(x, v) f_{\varepsilon_n}^\beta(x, v, t) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \varphi)(x, v, t) f_{\varepsilon_n}^\beta(x, v, t) dx dv. \quad (67)$$

Из (64)–(67) и единственности предела заключаем, что последовательность

$$\left\{ \frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \varphi(x, v) f_{\varepsilon_n}^\beta(x, v, t) dx dv \right\}$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится к

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{Q \times \mathbb{R}^3} \varphi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \right) \in C^1(I)$$

равномерно по $t \in I$, при этом выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{Q \times \mathbb{R}^3} \varphi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \right) = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \varphi)(x, v, t) f^\beta(x, v, t) dx dv$$

для $t \in I$.

Выполнение условия 5 следует из доказательства предложения 6 в [24, с. 102–106].

Итак, мы доказали существование глобального слабого решения $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, первой смешанной задачи для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем, описывающей кинетику двухкомпонентной высокотемпературной плазмы в области с гладкой границей. Лемма доказана.

6. Система уравнений Власова–Пуассона в цилиндре. Далее предположим, что $Q = G \times (-d, d)$, где $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, $d > 0$.

Вначале мы докажем вспомогательный результат о существовании и единственности сильного решения уравнения Пуассона с условиями Дирихле в цилиндре Q в пространстве Соболева $W_p^2(Q)$, $p \geq 2$, который является обобщением соответствующего результата для ограниченной области с гладкой границей (см. теорему 9.15 из [34, гл. 9, § 9.6]).

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u(x) = F(x), \quad x \in Q, \quad (68)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad (69)$$

где $F \in L_p(Q)$, $2 \leq p < \infty$.

Определение 5. Функцию $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ назовём *слабым (обобщённым) решением задачи* (68), (69), если для любой функции $v \in \dot{C}^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_Q F(x) v(x) dx.$$

Определение 6. Функцию $u \in \dot{W}_p^1(Q) \cap W_{p,loc}^2(Q)$ назовём *сильным решением задачи* (68), (69), если она удовлетворяет п.в. в Q уравнению (68).

Очевидно, что сильное решение задачи (68), (69) является и слабым тем более.

Лемма 8. Для любой функции $F \in L_p(Q)$ существует единственное сильное решение $u \in W_p^2(Q) \cap \dot{W}_p^1(Q)$ задачи (68), (69), при этом

$$\|u\|_{W_p^2(Q)} \leq c_1 \|F\|_{L_p(Q)}, \quad (70)$$

где $2 \leq p < \infty$, $c_1 = c_1(Q) > 0$ не зависит от F .

Доказательство. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в теореме 9.15 из [34, гл. 9, § 9.6], в которой рассматривалась область с гладкой границей. Принципиальное отличие заключается в том, что в рассматриваемом случае граница ∂Q не является гладкой, так как она содержит два ребра $\partial G \times \{-d\}$ и $\partial G \times \{d\}$.

Все этапы доказательства указанной леммы состоят из вспомогательных утверждений, касающихся гладкости и априорных оценок слабых решений задачи (68), (69) во внутренних подобластях Q' ($Q' \subset Q$) или в подобластях Q' вблизи гладкой границы $Q' \subset Q$, $\partial Q' \cap \partial Q \neq \emptyset$. В рассматриваемом нами случае ключевым результатом является

Лемма 9. Пусть $B_R^+ := \{x \in B_R : x_3 > 0\}$ и $B_R^{++} := \{x \in B_R : x_2 > 0, x_3 > 0\}$. Пусть функция $u \in \dot{W}_p^1(B_R^{++})$, $2 \leq p < \infty$, является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^{++} и равна нулю вблизи $\partial B_R^{++} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0, x_3 > 0\}$, где $F \in L_p(B_R^{++})$.

Тогда $u \in W_p^2(B_R^{++})$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_p^2(B_R^{++})} \leq c_2 \|F\|_{L_p(B_R^{++})},$$

где $c_2 > 0$ и не зависит от F .

Доказательство. Продолжим функции $u(x)$ и $F(x)$ нечётным образом в $B_R^+ \setminus B_R^{++}$, полагая

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_1, x_2, x_3) &= -u(x_1, -x_2, x_3), \quad x \in B_R^+, \quad x_2 < 0, \\ \tilde{F}(x_1, x_2, x_3) &= -F(x_1, -x_2, x_3), \quad x \in B_R^+, \quad x_2 < 0. \end{aligned}$$

По построению функция $\tilde{u}$, которая является нечётным продолжением функции u , обладает следующими свойствами: $\tilde{u} \in \dot{W}_p^1(B_R^+)$ и $\tilde{u}(x) = 0$ вблизи $\partial B_R^+ \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$.

Покажем, что функция $\tilde{u}$ является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^+ . Возьмём произвольную пробную функцию $v \in \dot{C}^1(B_R^+)$. Введём чётную функцию $\xi_\varepsilon(x_2) \in C^1(\mathbb{R})$ так, что $\xi_\varepsilon(x_2) = 0$ при $|x_2| \leq \varepsilon$, $\xi_\varepsilon(x_2) = 1$ при $|x_2| \geq 2\varepsilon$ и $|\xi'_\varepsilon(x_2)| \leq 2/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Тогда, используя определения функций $\tilde{F}$ и $\tilde{u}$ и формулу Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_R^+} \tilde{F}(x) \xi_\varepsilon(x_2) v(x) dx &= \int_{B_R^+} \nabla \tilde{u}(x) \nabla (\xi_\varepsilon v)(x) dx = \\ &= \int_{B_R^+} \xi_\varepsilon(x_2) \nabla \tilde{u}(x) \nabla v(x) dx + \int_{B_R^+} v(x) \xi'_\varepsilon(x_2) D_{x_2} \tilde{u}(x) dx. \end{aligned} \quad (71)$$

С учётом чётности функции $\xi_\varepsilon(x_2)$ и нечётности по x_2 функции $\tilde{u}(x)$, оценки $|\xi'_\varepsilon(x_2)| \leq 2/\varepsilon$ и формулы Лагранжа в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_R^+} v(x) \xi'_\varepsilon(x_2) D_{x_2} \tilde{u}(x) dx \right| &= \left| \int_{B_R^{++} \cap \{x_2 < 2\varepsilon\}} (v(x_1, x_2, x_3) - v(x_1, -x_2, x_3)) \xi'_\varepsilon(x_2) D_{x_2} u(x) dx \right| \leq \\ &\leq 4\varepsilon \frac{2}{\varepsilon} \max_{x \in \bar{B}_R^+} |D_{x_2} v(x)| \int_{B_R^{++} \cap \{x_2 < 2\varepsilon\}} |D_{x_2} u(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Устремив в тождестве (71) ε к нулю, в силу (72) будем иметь

$$\int_{B_R^+} \tilde{F}(x) v(x) dx = \int_{B_R^+} \nabla \tilde{u}(x) \nabla v(x) dx.$$

Таким образом, $\tilde{u} \in \dot{W}_p^1(B_R^+)$ является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^+ и $u(x) = 0$ вблизи $\partial B_R^+ \cap \{x_3 > 0\}$.

Следовательно, в силу леммы 9.12 из [34, гл. 9, § 9.5] $\tilde{u} \in W_p^2(B_R^+)$ и

$$\|\tilde{u}\|_{W_p^2(B_R^+)} \leq k_1 \|\tilde{F}\|_{L_p(B_R^+)},$$

где $k_1 > 0$ не зависит от $\tilde{F}$. Отсюда вытекает утверждение леммы 9.

Комбинируя известные утверждения о гладкости и априорных оценках слабых решений внутри области, вблизи гладких частей границы, а также доказанную выше лемму 9 о гладкости и априорных оценках слабых решений задачи (68), (69) вблизи ребра, мы убеждаемся в справедливости леммы 8. Лемма доказана.

Замечание 3. Лемма 8 справедлива также в случае сильно эллиптического в $\bar{Q}$ дифференциального уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами и однородными условиями Дирихле на границе ∂Q . Однако нам понадобится лишь рассмотренная выше задача (68), (69).

В дальнейшем нам потребуется оценка нормы напряжённости самосогласованного электрического поля $E_\varkappa(x, t)$ для сглаженной системы Власова–Пуассона через нормы начальных функций распределения заряженных частиц $\tilde{f}^\beta(x, v)$.

Обозначим

$$Q_{2\delta} := \{x \in Q : \text{dist}(x, \partial G \times (-d, d)) > 2\delta\}, \quad G_{2\delta} := \{x \in G : \text{dist}(x', \partial G) > 2\delta\},$$

где число $\delta > 0$ таково, что $Q_{2\delta} \neq \emptyset$, $x = (x', x_3)$.

Предположим, что выполнено следующее

Условие 2. Пусть $\tilde{f}^\beta \in \dot{C}^1(\mathbb{R}^6)$ и $\text{supp } \tilde{f}^\beta \subset D_0 := (Q_{2\delta} \cap B_\lambda) \times B_\rho$, где $\delta, \rho > 0$, $0 \in Q_{2\delta}$, $2\delta < \lambda < d/2$.

Из (47), (48), (50) и (51) получим задачу

$$-\Delta \varphi_\varkappa(x, t) = 4\pi e \sigma_\varkappa(x, t), \quad x \in Q, \quad t \in [0, T], \quad (73)$$

$$\varphi_\varkappa(x, t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad t \in [0, T], \quad (74)$$

где

$$\sigma_\varkappa(x, t) = \int_{\mathbb{R}^6} \sum_{\beta=\pm 1} \omega_\varkappa(x-y) \beta \tilde{f}_\varkappa^\beta(y, v, t) dy dv, \quad x \in Q, \quad t \in [0, T], \quad (75)$$

$\tilde{f}_\varkappa^\beta(y, v, t)$ ($(y, v) \in \mathbb{R}^6$, $t \in [0, T]$) – продолжение по y нулём в $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ функции $f_\varkappa^\beta(y, v, t) = \tilde{f}^\beta(\hat{S}_\varkappa^\beta(0, y, v, t))$ ($y \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0, T]$), $\varkappa > 0$ (см. доказательство теоремы 2).

Из условия 2 и теоремы 1 следует, что $\sigma_{\varkappa}(\cdot, t) \in C^\infty(\bar{Q})$ для любого $t \in [0, T)$.
Обозначим

$$R(T) := \{1 + \max_{\beta} \sup_{\varkappa > 0} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} |v| : \text{существуют } x \in Q \text{ и } t \in [0, T) \text{ такие, что } f_{\varkappa}^{\beta}(y, v, t) \neq 0\}.$$

Условие 3. $R(T) < \infty$.

Выполнение аналогичного условия в случае задачи Коши для системы Власова–Пуассона доказано в работах [22, 23]. Заметим, что константа $R(T)$ зависит также от начальных функций $\mathring{f}^{\beta}$ (см. [22, с. 1316]).

Теорема 4. Пусть выполнено условие 2. Тогда справедлива оценка

$$\|\|\nabla \varphi_{\varkappa}\|\|_{0,T} \leq \frac{c_3}{\varkappa^3} \max_{\beta} \|\mathring{f}^{\beta}\|, \quad \beta = \pm 1, \quad (76)$$

где $c_3 = c_3(Q, \rho) > 0$ – константа, не зависящая от T , $\mathring{f}^{\beta}$ и $\varkappa$.

Если к тому же выполняется условие 3, то имеет место неравенство

$$\|\|\nabla \varphi_{\varkappa}\|\|_{0,T} \leq c_4 \max_{\beta} \|\mathring{f}^{\beta}\|, \quad \beta = \pm 1, \quad (77)$$

где $c_4 = c_4(Q, \rho, T, \mathring{f}^{\beta}) > 0$ – константа, не зависящая от $\varkappa$.

Доказательство. 1. В силу леммы 8 для $t \in [0, T)$ существует единственное сильное решение $\varphi_{\varkappa}(\cdot, t) \in W_p^2(Q) \cap \dot{W}_p^1(Q)$ задачи (73), (74), при этом

$$\|\varphi_{\varkappa}(\cdot, t)\|_{W_p^2(Q)} \leq c_1 4\pi e \|\sigma_{\varkappa}(\cdot, t)\|_{L_p(Q)}, \quad (78)$$

где $c_1 = c_1(Q) > 0$ не зависит от $\sigma_{\varkappa}$ и от t , $p \geq 2$.

Из теоремы Соболева о непрерывности вложения пространства $W_p^2(Q)$ в $C^1(\bar{Q})$ при $p \geq 4$ и соотношений (70) и (75) следует, что

$$\|\|\nabla \varphi_{\varkappa}(\cdot, t)\|\|_{C^0(\bar{Q})} \leq k_1 \|\varphi_{\varkappa}(\cdot, t)\|_{W_4^2(Q)} \leq c_1 k_1 4\pi e \|\sigma_{\varkappa}(\cdot, t)\|_{L_4(D)} \leq c_1 k_1 4\pi e \sum_{\beta=\pm 1} I^{\beta}, \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} I^{\beta} &= \left\{ \int_Q \left| \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \omega_{\varkappa}(x-y) f_{\varkappa}^{\beta}(y, v, t) dy dv \right|^4 dx \right\}^{1/4} = \\ &= \left\{ \int_Q \left| \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \omega_{\varkappa}(x-y) \mathring{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(0, y, v, t)) dy dv \right|^4 dx \right\}^{1/4}, \end{aligned}$$

$k_1 = k_1(Q) > 0$.

В силу леммы 1 отображение $\hat{S}_{\varphi}^{\beta}(t, \cdot, \cdot, 0) : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_t$ биективно и отображает измеримое множество $U_0 = (D_0 \times \{0\}) \cap \Lambda \subset \Gamma_0$ на множество $U_t \subset \Gamma_t$, при этом $\mu_6(U_t) = \mu_6(U_0) < \infty$, где $\Gamma_t = \{(x, v, \tau) \in \Lambda_1 : \tau = t\}$, множества Λ и Λ_1 определены перед теоремой 1.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} I^{\beta} &= \left\{ \int_Q \left| \int_{U_t} \omega_{\varkappa}(x-y) \mathring{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(0, y, v, t)) dy dv \right|^4 dx \right\}^{1/4} \leq \\ &\leq \sup_{(y,v) \in U_t} \mathring{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(0, y, v, t)) \left\{ \int_Q \left(\int_{U_t} \omega_{\varkappa}(x-y) dy dv \right)^4 dx \right\}^{1/4}. \end{aligned} \quad (80)$$

2. Докажем справедливость оценки (76). Из (27), (28) для любых $x, y \in \mathbb{R}^3$ получим

$$\omega_{\varkappa}(x - y) \leq \frac{k_2}{\varkappa^3}, \quad (81)$$

где $k_2 > 0$ не зависит от $x, y \in \mathbb{R}^3$ и $\varkappa > 0$. Из (80) и (81) вытекают неравенства

$$I^\beta \leq \max_{(z,w) \in \bar{D}_0} \hat{f}^\beta(z, w) \frac{k_2}{\varkappa^3} \left\{ \int_Q \mu_6^4(U_t) dx \right\}^{1/4} \leq \frac{k_2}{\varkappa^3} \mu_3^{1/4+1}(Q) \mu_3(B_\rho) \|\hat{f}^\beta\|. \quad (82)$$

Из (79), (82) следует оценка (76).

3. Остаётся доказать неравенство (77). Пусть выполнено условие 3. Тогда из (80) и условия 3 получим

$$I^\beta \leq \max_{(z,w) \in \bar{D}_0} \hat{f}^\beta(z, w) \left\{ \int_Q \left(\int_{|v| < R(T)} dv \int_{|x-y| < \varkappa} \omega_{\varkappa}(x-y) dy \right)^4 dx \right\}^{1/4} \leq \mu_3^{1/4}(Q) \mu_3(B_{R(T)}) \|\hat{f}^\beta\|. \quad (83)$$

Из (80), (83) вытекает (77). Теорема доказана.

Рассмотрим порождающие характеристики $\hat{S}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0) := (\hat{X}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0), \hat{V}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0))$, $(x, v, 0) \in \Lambda_3$, сглаженной системы уравнений (35), (36). Положим $(x_k^\beta, v_k^\beta) := \hat{S}_{\varkappa}^\beta(t_k^\beta - 0, x, v, 0)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 10. Пусть выполнено условие 2. Тогда для всех $(x, v, 0) \in \Lambda_3$, $(x, v) \in D_0$, справедлива оценка

$$|\hat{V}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0)| \leq \rho + \frac{eT^\beta k_1}{m_\beta} \|\hat{f}^\beta\|, \quad 0 \leq \tau < t_1^\beta, \quad (84)$$

$$|x_1^\beta - x| \leq \left(\rho + \frac{eT^\beta}{m_\beta} k_1 \|\hat{f}^\beta\| \right) T^\beta, \quad (85)$$

где $k_1 = c_3/\varkappa^3$ ($c_3 > 0$) – константа из неравенства (76); $T^\beta := t_1^\beta < T$, если существует момент отражения $t_1^\beta < T$, $T^\beta = T$, если $\hat{X}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0) \cap \partial Q = \emptyset$ для всех $0 \leq \tau < T$; $x_1^\beta := \hat{X}_{\varkappa}^\beta(T^\beta - 0, x, v, 0)$.

Если к тому же выполняется условие 3, то для всех $(x, v, 0) \in \Lambda_3$, $(x, v) \in D_0$, выполняются неравенства (84), (85) с константой $k_1 = c_4$, где $c_4 > 0$ – постоянная из неравенства (77).

Доказательство. Умножим (36) скалярно на $\hat{V}_{\varkappa}^\beta$. Тогда для всех $\hat{V}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0) \neq 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} |\hat{V}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0)|^2 = -\frac{\beta e}{m_\beta} \langle \nabla_x \varphi_{\varkappa}(\hat{X}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0)), \hat{V}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0) \rangle, \quad 0 \leq \tau < T^\beta.$$

Отсюда и из неравенства Коши–Буняковского получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} |\hat{V}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0)|^2 \leq \frac{e}{m_\beta} |\nabla_x \varphi_{\varkappa}(\hat{X}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0))| |\hat{V}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0)|, \quad 0 \leq \tau < T^\beta.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau} |\hat{V}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0)| \leq \frac{e}{m_\beta} |\nabla_x \varphi_{\varkappa}(\hat{X}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0))|, \quad 0 \leq \tau < T^\beta. \quad (86)$$

Проинтегрировав (86) по τ от 0 до t , в силу теоремы 4 и условия 2 имеем

$$|\hat{V}_{\varkappa}^\beta(t, x, v, 0)| \leq |v| + \frac{e}{m_\beta} \int_0^t |\nabla_x \varphi_{\varkappa}(\hat{X}_{\varkappa}^\beta(\tau, x, v, 0))| d\tau \leq \rho + \frac{eT^\beta}{m_\beta} k_1 \|\hat{f}^\beta\|.$$

Неравенство (84) доказано. Проинтегрировав (84) от 0 до T^β по t , получим (85). Лемма доказана.

Замечание 4. Положив в (85) $x_1^\beta \in (G \times \{-d\}) \cup (G \times \{d\})$, будем иметь

$$\frac{d}{2} < |x_1^\beta - x| \leq \left(\rho + \frac{eT}{m_{-1}} k_1 \max_{\beta} \|\dot{f}^\beta\| \right) T.$$

Условие 4. Имеет место неравенство

$$\frac{d}{2} > \left(\rho + \frac{eT}{m_{-1}} k_1 \max_{\beta} \|\dot{f}^\beta\| \right) T.$$

Если выполняется условие 4, то траектория частицы сглаженной системы Власова–Пуассона, находящейся в момент времени $\tau = 0$ в точке (x, v) , не может достичь оснований цилиндра в момент времени $\tau = t \leq T$. Другими словами,

$$\hat{S}_\varkappa^\beta(t, x, v, 0) \cap ((G \times \{-d\} \times \mathbb{R}^3) \cup (G \times \{d\} \times \mathbb{R}^3)) = \emptyset.$$

Таким образом, если выполняется условие 4, то порождающие характеристики сглаженной системы уравнений Власова–Пуассона не пересекаются с основаниями цилиндра $Q = G \times (-d, d)$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется следующее

Условие 5. Пусть $B \in \hat{C}^1(\bar{Q})$ и пусть $B(x) = (0, 0, b)$ для $x \in \bar{Q}_{\delta/2}$, где

$$\frac{4c}{e\delta} (\rho m_{+1} + eT k_1 \max_{\beta} \|\dot{f}^\beta\|) < b, \quad (87)$$

$k_1 > 0$ – константа из неравенства (84).

Введём матрицу

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Умножение на матрицу $R(\theta)$ соответствует вращению на угол θ на плоскости. Следующее утверждение позволяет применить свойства этого оператора к исследованию траекторий заряженных частиц при наличии ненулевого магнитного поля в (36). В работе [29] доказаны следующие свойства матрицы $R(\theta)$.

Лемма 11.

- a) $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$;
- b) $R(\theta)^m = R(m\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$;
- c) $\frac{d}{d\theta} R(\theta) = R(\pi/2)R(\theta) = R(\theta + \pi/2)$, $\theta \in \mathbb{R}$;
- d) $|R(\theta)x| = |x|$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$;
- e) $\exp(tR(\theta)) = \exp(t \cos \theta)R(t \sin \theta)$.

Обозначим $x' = (x_1, x_2)$ и $X_\varkappa^{\beta'}(x, v, \tau) = (X_{\varkappa,1}^\beta(x, v, \tau), X_{\varkappa,2}^\beta(x, v, \tau))$.

Следующий результат является обобщением леммы 3.3 из [29] (см. также [30]).

Лемма 12. Пусть выполняются условие 2 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_3/\varkappa^3$, где $c_3 > 0$ – постоянная из неравенства (76).

Тогда порождающие характеристики $\hat{S}_\varkappa^\beta(\tau, x, v, 0)$, $(x, v, 0) \in \Lambda_3$, $0 \leq \tau < T$, сглаженной системы (35), (36) для каждого $0 < \varkappa < 1$ обладают следующими свойствами: если $x' \in G_{\delta'}$, $\delta' \geq \delta$, $v \in B_\rho$, то $T^\beta = T$ и $|\hat{X}_\varkappa^{\beta'}(\tau, x, v, 0) - x'| < \delta/2$, $\hat{V}_\varkappa^\beta(\tau, x, v, 0) \in B_{\rho_1}$ для всех $0 \leq \tau < T$, где

$$\rho_1 = \rho + \frac{eT}{m_{-1}} k_1 \max_{\beta} \|\dot{f}^\beta\|.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, где $c_4 > 0$ – постоянная из неравенства (77), не зависящая от $\varkappa$, то порождающие характеристики $\hat{S}_\varkappa^\beta(\tau, x, v, 0)$, $(x, v, 0) \in \Lambda_3$, $0 \leq \tau < T$, системы (35), (36) удовлетворяют тем же свойствам равномерно по всем $0 < \varkappa < 1$.

Доказательство. 1. Докажем, что

$$T^\beta = T, \quad (88)$$

$$|\hat{X}_\varkappa^{\beta'}(\tau, x, v, 0) - x'| < \delta/2 \quad \text{для всех } \tau \in [0, T]. \quad (89)$$

При этом если выполняются условия 2, 4, 5 с константой $k_1 = c_3/\varkappa^3$, то соотношения (88), (89) справедливы для каждого $0 < \varkappa < 1$, удовлетворяющего условиям 4 и 5.

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$ ($c_4 > 0$ не зависит от $\varkappa$), то соотношения (88), (89) справедливы для всех $0 < \varkappa < 1$.

Предположим противное: либо $T^\beta = t_1^\beta < T$, либо $|\hat{X}_\varkappa^{\beta'}(\tau_0, x, v, 0) - x'| \geq \delta/2$ для некоторого $\tau_0 \in [0, T)$.

Заметим, что неравенство $t_1^\beta := T^\beta < T$ влечёт за собой выполнение соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow T^\beta - 0} \text{dist}(X_\varkappa^{\beta'}(\tau, x, v, 0), \partial G) = 0.$$

Следовательно, $|\hat{X}_\varkappa^{\beta'}(\tau_0, x, v, 0) - x'| \geq \delta/2$ для некоторого $\tau_0 \in [0, T^\beta)$.

Поскольку $\hat{X}_\varkappa^{\beta'}(0, x, v, 0) = x'$, то для некоторого τ_1 , $0 < \tau_1 \leq \tau_0 < T^\beta$, имеем

$$|\hat{X}_\varkappa^{\beta'}(\tau, x, v, 0) - x'| = \delta/2, \quad (90)$$

$$|\hat{X}_\varkappa^{\beta'}(\tau, x, v, 0) - x'| < \delta/2, \quad \tau \in [0, \tau_1]. \quad (91)$$

Из (90), (91) и условия 4 следует, что порождающие характеристики $\hat{S}_\varkappa^\beta(\tau, x, v, 0)$ не пересекаются с границей $\partial Q \times \mathbb{R}^3$ при $\tau \in [0, \tau_1]$, т.е. $\hat{S}_\varkappa^\beta(\tau, x, v, 0) = S_\varkappa^\beta(\tau, x, v, 0)$, $\tau \in [0, \tau_1]$. Поэтому в силу условия 5 мы можем записать уравнение характеристик (36) в виде

$$\frac{dV_\varkappa^\beta(\tau)}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V_\varkappa^\beta(\tau), \quad \tau \in (0, \tau_1).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} V_{\varkappa,1}^\beta(\tau) \\ V_{\varkappa,2}^\beta(\tau) \end{pmatrix} + \frac{\beta e b}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} V_{\varkappa,1}^\beta(\tau) \\ V_{\varkappa,2}^\beta(\tau) \end{pmatrix} = -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau), \quad \tau \in (0, \tau_1).$$

Умножив последнее уравнение на $\exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left[\exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} V_{\varkappa,1}^\beta(\tau) \\ V_{\varkappa,2}^\beta(\tau) \end{pmatrix} \right] = \\ & = -\frac{\beta e}{m_\beta} \exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau), \quad \tau \in (0, \tau_1). \end{aligned} \quad (92)$$

Проинтегрировав (92) от 0 до t , $t \in (0, \tau_1)$, будем иметь

$$\exp\left(t \frac{\beta e b}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} V_{\varkappa,1}^\beta(t) \\ V_{\varkappa,2}^\beta(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\frac{\beta e}{m_\beta} \int_0^t \exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau) d\tau.$$

Из леммы 11 (см. п. е)) следует, что

$$\exp\left(\tau \frac{\beta eb}{m_{\beta c}} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(\tau \frac{\beta eb}{m_{\beta c}} \cos \frac{\pi}{2}\right) R\left(\tau \frac{\beta eb}{m_{\beta c}} \sin \frac{\pi}{2}\right) = R\left(\tau \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right).$$

Умножив предыдущее уравнение на $R(-t\beta eb/(m_{\beta c}))$, получим

$$\begin{pmatrix} V_{\varkappa,1}^{\beta}(t) \\ V_{\varkappa,2}^{\beta}(t) \end{pmatrix} = R\left(-t \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \frac{\beta e}{m_{\beta}} \int_0^t R\left((\tau-t) \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_{\varkappa}(X_{\varkappa}^{\beta}, \tau) d\tau.$$

Поэтому из (35) имеем

$$\begin{pmatrix} X_{\varkappa,1}^{\beta}(\tau_1) \\ X_{\varkappa,2}^{\beta}(\tau_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + I_1 + I_2, \quad (93)$$

где

$$I_1 = \int_0^{\tau_1} R\left(-t \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} dt, \quad I_2 = -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \int_0^{\tau_1} \int_0^t R\left((\tau-t) \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_{\varkappa}(X_{\varkappa}^{\beta}, \tau) d\tau dt.$$

Вычислим I_1 и I_2 . В силу леммы 11 (см. п. с)) мы имеем

$$R\left(-t \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) = -\frac{m_{\beta c}}{\beta eb} \frac{d}{dt} \left(R\left(-t \frac{\beta eb}{m_{\beta c}} - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{m_{\beta c}}{\beta eb} \left[-R\left(-t \frac{\beta eb}{m_{\beta c}} - \frac{\pi}{2}\right) \right]_{t=0}^{t=\tau_1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{m_{\beta c}}{\beta eb} \left\{ -R\left(-\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}} - \frac{\pi}{2}\right) + R\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{m_{\beta c}}{\beta eb} \left\{ -R\left(-\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) + R(0) \right\} R\left(-\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{m_{\beta c}}{\beta eb} \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) & -\sin\left(\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) \\ \sin\left(\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) & 1 - \cos\left(\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{m_{\beta c}}{\beta eb} \begin{pmatrix} \sin\left(\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) & 1 - \cos\left(\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) \\ -\left(1 - \cos\left(\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right)\right) & \sin\left(\tau_1 \frac{\beta eb}{m_{\beta c}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{m_{\beta c}}{\beta eb} \begin{pmatrix} \beta \sin\left(\tau_1 \frac{eb}{m_{\beta c}}\right) v_1 + \left(1 - \cos\left(\tau_1 \frac{eb}{m_{\beta c}}\right)\right) v_2 \\ -\left(1 - \cos\left(\tau_1 \frac{eb}{m_{\beta c}}\right)\right) v_1 + \beta \sin\left(\tau_1 \frac{eb}{m_{\beta c}}\right) v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|I_1| = \frac{m_{\beta c}}{eb} \left(\left(\beta \sin\left(\tau_1 \frac{eb}{m_{\beta c}}\right) v_1 + \left(1 - \cos\left(\tau_1 \frac{eb}{m_{\beta c}}\right)\right) v_2 \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(- \left(1 - \cos \left(\tau_1 \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right) v_1 + \beta \sin \left(\tau_1 \frac{eb}{m_\beta c} \right) v_2 \right)^2 \Big)^{1/2} = \\
& = \frac{m_\beta c}{eb} \left((v_1^2 + v_2^2) \left(\left(1 - \cos \left(\tau_1 \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right)^2 + \sin^2 \left(\tau_1 \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right) \right)^{1/2} = \\
& = \frac{m_\beta c}{eb} |v| \sqrt{2} \left(1 - \cos \left(\tau_1 \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right)^{1/2} \leq \frac{2c}{eb} m_{+1} |v|. \tag{94}
\end{aligned}$$

С другой стороны, используя лемму 11 (см. п. с)), видим, что

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{\beta e}{m_\beta} \int_0^{\tau_1} \left\{ \int_\tau^{\tau_1} R \left((\tau - t) \frac{\beta eb}{m_\beta c} \right) dt \right\} \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau) d\tau = \\
&= \frac{c}{b} \int_0^{\tau_1} \left\{ R \left((\tau - \tau_1) \frac{\beta eb}{m_\beta c} \right) - R(0) \right\} R \left(-\frac{\pi}{2} \right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau) d\tau = \\
&= \frac{c}{b} \int_0^{\tau_1} \begin{pmatrix} \cos \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) - 1 & -\beta \sin \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \\ \beta \sin \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) & \cos \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_2} \end{pmatrix} d\tau = \\
&= \frac{c}{b} \int_0^{\tau_1} \begin{pmatrix} \beta \sin \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) & \cos \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) - 1 \\ 1 - \cos \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) & \beta \sin \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_2} \end{pmatrix} d\tau = \\
&= \frac{c}{b} \int_0^{\tau_1} \begin{pmatrix} \beta \sin \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_1} + \left(\cos \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) - 1 \right) \frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_2} \\ \left(1 - \cos \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right) \frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_1} + \beta \sin \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_2} \end{pmatrix} d\tau.
\end{aligned}$$

Тогда аналогично (94) имеем

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \frac{c}{b} \int_0^{\tau_1} \left(\left(\left(1 - \cos \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right)^2 + \sin^2 \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(\left(\frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)}{\partial x_2} \right)^2 \right) \right)^{1/2} d\tau = \\
&= \frac{c}{b} \int_0^{\tau_1} \left(\left(\left(1 - \cos \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right)^2 + \sin^2 \left((\tau - \tau_1) \frac{eb}{m_\beta c} \right) \right) \right)^{1/2} |\nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)| d\tau \leq \\
&\leq \frac{2c}{b} \int_0^{\tau_1} |\nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta, \tau)| d\tau \leq \frac{2c}{b} T |||\nabla \varphi_\varkappa|||_{0, T}. \tag{95}
\end{aligned}$$

Из (90), (93)–(95) и теоремы 4 следует, что

$$\frac{\delta}{2} = |X_\varkappa^{\beta'}(\tau_1, x, v, 0) - x'| \leq |I_1| + |I_2| \leq \frac{2c}{eb} (\rho m_{+1} + eT |||\nabla \varphi_\varkappa|||_{0, T}) \leq$$

$$\leq \frac{2c}{eb}(\rho m_{+1} + ek_1 T \max_{\beta} \|f^{\beta}\|). \quad (96)$$

С другой стороны, (84) влечёт за собой неравенство

$$\frac{2c}{eb}(\rho m_{+1} + ek_1 T \max_{\beta} \|f^{\beta}\|) < \frac{\delta}{2}.$$

Это противоречит (96). Таким образом, доказано, что $T^{\beta}(x, v) = T$ и $|X_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, 0) - x'| < \delta/2$ для всех $\tau \in [0, T)$.

2. В силу леммы 10 $|V_{\varphi}^{\beta}(x, v, t)| < \rho_1$ для всех $x' \in G_{\delta'}$, $v \in B_{\rho}$ и $t \in [0, T)$. Лемма доказана.

Аналогично лемме 12 можно доказать следующее утверждение.

Лемма 13. Пусть выполняются условие 2 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_3/\varkappa^3$, где $c_3 > 0$ – постоянная из неравенства (76).

Тогда порождающие характеристики $\hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t)$, $(x, v, t) \in \Lambda_1$, $0 \leq \tau < t < T$, связанной системы (35), (36) для каждого $0 < \varkappa < 1$ обладают следующими свойствами: если $x' \in G_{\delta'}$, $\delta' \geq \delta$, $v \in B_{\rho_1}$, то на полуинтервале $[0, t)$ не существует моментов отражения t_{-1}^{β} и $|\hat{X}_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t) - x'| < \delta/2$, $\hat{V}_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t) \in B_{\rho_2}$ для всех $0 \leq \tau < T$, где

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{ek_1 T}{m_{-1}} \max_{\beta} \|f^{\beta}\|.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, где $c_4 > 0$ – постоянная из неравенства (77), не зависящая от $\varkappa$, то порождающие характеристики $\hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, t)$, $(x, v, t) \in \Lambda_1$, $0 \leq \tau < t < T$, системы (35), (36) удовлетворяют тем же свойствам равномерно по всем $0 < \varkappa < 1$.

Обозначим $D_0^1 = D_0^1(\varkappa) := (Q_{3\delta/2} \cup B_{\lambda_1}) \times B_{\rho_1}$, где $\lambda_1 = \lambda + T\rho_1$.

Лемма 14. Пусть выполняются условия 2 и 4, 5 с константой $k_1 = c_3/\varkappa^3$, где $c_3 > 0$ – постоянная из неравенства (76).

Тогда для каждого $0 < \varkappa < 1$ имеем

$$\text{supp } \hat{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(0, x, v, t)) \subset D_0^1(\varkappa), \quad 0 < t < T.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, где $c_4 > 0$ – постоянная из неравенства (77), не зависящая от $\varkappa$, то для всех $0 < \varkappa < 1$

$$\text{supp } \hat{f}^{\beta}(\hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(0, x, v, t)) \subset D_0^1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где D_0^1 не зависит от $\varkappa$.

Доказательство. В силу леммы 12 и замечания 4 достаточно показать, что $S_{\varkappa}^{\beta}(t, x, v, 0) = \hat{S}_{\varkappa}^{\beta}(t, x, v, 0) \in D_0^1$ для всех $(x, v) \in \text{supp } \hat{f}^{\beta}$, $(x, v, 0) \in \Lambda_3$. Согласно условию 2 $\text{supp } \hat{f}^{\beta} \subset D_0$. Тогда из леммы 12 следует, что $S_{\varkappa}^{\beta}(t, x, v, 0) \in Q_{3\delta/2} \times B_{\rho_1}$. По условию $x \in B_{\lambda}$, поэтому, так как $|V_{\varkappa}^{\beta}(t, x, v, 0)| < \rho_1$, $0 < t < T$, из равенства $\lambda_1 = \lambda + T\rho_1$ получим соотношения

$$|X_{\varkappa}^{\beta}(t, x, v, 0)| \leq |x| + \int_0^t |V_{\varkappa}^{\beta}(\tau, x, v, 0)| d\tau < \lambda_1.$$

Лемма доказана.

Определим функцию $f_{\varkappa}^{\beta}(x, v, t)$ по формуле

$$f_{\varkappa}^{\beta}(x, v, t) = \begin{cases} \hat{f}^{\beta}(S_{\varkappa}^{\beta}(0, x, v, t)), & (x, v) \in D_0^1, \quad 0 \leq t < T, \\ 0, & (x, v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \setminus D_0^1, \quad 0 \leq t < T. \end{cases} \quad (97)$$

В силу леммы 13 $\text{supp } f^\beta(S_\varkappa^\beta(0, x, v, t)) \subset D_0^1$. Следовательно, используя метод характеристик, непрерывную дифференцируемость отображения $S_\varkappa^\beta(0, x, v, t)$ по x, v, t и условие 2, мы видим, что существует единственное классическое решение задачи (26), (30)–(32) с условиями (33), (34) в $C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T))$ с носителем по x, v в D_0^1 . Это решение определяется формулой (97).

Теорема 5. Пусть выполнены условия 2–5. Тогда существует слабое решение $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, системы (52)–(55), при этом $\text{supp}_{x,v} f^\beta(x, v, t) \subset \bar{D}_0^1$ для всех $t \in [0, T)$.

Доказательство. В силу теоремы 3 существует слабое решение $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, задачи (52)–(55). По лемме 6 найдётся подпоследовательность $f_{\varkappa_n}^\beta \rightharpoonup f^\beta$ в $(L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p'))$, где $p, p' \in [1, \infty]$, $1/p + 1/p' = 1$, равномерно по $t \in I$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что для любой функции $\psi \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) \varphi(x, v) dx dv \rightarrow \int_{Q \times \mathbb{R}^3} f^\beta(x, v, t) \varphi(x, v) dx dv$$

при $\varkappa_n \rightarrow 0$ равномерно по $t \in I$.

Пусть теперь $\varphi \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ – произвольная функция такая, что $\varphi(x, v) = 0$ при $(x, v) \in D_0^1$. По доказанному $\text{supp}_{x,v} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) \subset \bar{D}_0^1$, $t \in I$. Следовательно,

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\varkappa_n}^\beta(x, v, t) \varphi(x, v) dx dv = 0$$

для всех указанных φ . Таким образом,

$$\text{supp}_{x,v} f^\beta(x, v, t) \subset \bar{D}_0^1, \quad t \in I.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00392).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // Журн. эксп. и теор. физики. 1938. Т. 8. № 3. С. 291–318.
2. Власов А.А. Теория многих частиц. М., 1950.
3. Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы // Журн. эксп. и теор. физики. 1946. Т. 16. С. 574–586.
4. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева. Вып. 11. М., 1982.
5. Курс теоретической физики / Под ред. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица. Т. 10. Физическая кинетика. М., 1979.
6. Миямото К. Основы физики плазмы и управляемого синтеза. М., 2007.
7. Alexandre R. Weak solutions of the Vlasov–Poisson initial boundary value problem // Math. Meth. Appl. Sci. 1993. V. 16. № 8. P. 587–607.
8. Арсеньев А.А. Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 136–147.
9. Арсеньев А.А. О существовании обобщённых и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1253–1266.
10. Bardos C., Degond P. Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1985. V. 2. № 2. P. 101–118.
11. Batt J. Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics // J. Differ. Equat. 1977. V. 25. № 3. P. 342–364.
12. Ben Abdallah N. Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov–Poisson system // Math. Meth. Appl. Sci. 1994. V. 17. № 6. P. 451–476.

13. *Di Perna R.J., Lions P.L.* Solutions globales d'équations du type Vlasov–Poisson // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1988. V. 307. № 12. P. 655–658.
14. *Добрыйш П.Л.* Уравнения Власова // Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 2. С. 48–58.
15. *Guo Y.* Regularity for the Vlasov equations in a half space // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. № 1. P. 255–320.
16. *Horst E., Hunze R.* Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation // Math. Meth. Appl. Sci. 1984. V. 6. № 1. P. 262–279.
17. *Hwang H.J., Velázquez J.J.L.* On global existence for the Vlasov–Poisson system in a half space // J. Differ. Equat. 2009. V. 247. № 6. P. 1915–1948.
18. *Козлов В.В.* Обобщённое кинетическое уравнение Власова // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63. № 4. С. 93–130.
19. *Lions P.L., Perthame B.* Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov–Poisson system // Invent. Math. 1991. V. 105. № 1. P. 415–430.
20. *Маслов В.П.* Уравнения самосогласованного поля // Соврем. проблемы математики. М., 1978. Т. 11. С. 153–234.
21. *Mouhot C., Villani C.* On Landau damping // Acta Math. 2011. V. 207. № 1. P. 29–201.
22. *Pfaffmoser K.* Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data // J. of Differ. Equat. 1992. V. 95. № 2. P. 281–303.
23. *Schäffer J.* Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions // Comm. Part. Differ. Equat. 1991. V. 16. № 8–9. P. 1313–1335.
24. *Weckler J.* Zum Anfangs-Randwertproblem des Vlasov–Poisson-Systems. Dissertation, Universität München, 1994.
25. *Weckler J.* On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability // Arch. Rational Mech. Anal. 1995. V. 130. № 2. P. 145–161.
26. *Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве // Докл. АН СССР. 2012. Т. 443. № 4. С. 431–434.
27. *Скубачевский А.Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова–Пуассона в полупространстве // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 204–232.
28. *Skubachevskii A.L.* Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. S. 2016. V. 9. № 3. P. 847–868.
29. *Скубачевский А.Л., Tsuzuki Y.* Классические решения уравнений Власова–Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 3. С. 536–552.
30. *Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 12–34.
31. *Belyaeva Yu.O., Gebhard B., Skubachevskii A.L.* A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations // Kinetic and Related Models. 2021. V. 14. № 2. P. 257–282.
32. *Скубачевский А.Л.* Априорная оценка решений смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона с однородным внешним магнитным полем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1683–1687.
33. *Grüter M., Widmann K.-O.* The Green function for uniformly elliptic equations // Manuscripta Mathematica. 1982. V. 37. P. 303–342.
34. *Гилберг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.

Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы, г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 20.08.2023 г.
После доработки 29.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.