

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. В. С. Мокейчев, А. М. Сидоров

Предлагается новый подход к вопросу разрешимости как обыкновенных уравнений, так и с частными производными, в теории линейных дифференциальных уравнений, а также в теории интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123110031, EDN: PDRKWE

Введение. Пусть X и Y – векторные пространства, которые оба являются либо вещественными, либо комплексными, A – линейный оператор, определённый на линеале $D(A) \subset X$, с множеством значений $R(A) \subset Y$. Рассмотрим линейное уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где y – заданный элемент пространства Y , а x – искомый элемент из $D(A)$, и введём понятие его решения.

Элемент $x \in D(A)$ называется *решением уравнения* (1), где $y \in R(A)$, если Ax и y совпадают как элементы из пространства Y .

При таком подходе к понятию решения следует ответить на два вопроса: при каких ограничениях на оператор A

- 1) у уравнения (1) не может быть двух решений;
- 2) уравнение (1) имеет решение при каждом $y \in Y$?

Ответы на эти два вопроса – суть общей теории разрешимости уравнений.

Для дифференциальных уравнений с частными производными часто не удаётся ввести удовлетворительное понятие решения. М. Громов отметил [1]: “Классическая теория уравнений в частных производных уходит корнями в физику, где, как считается, эти уравнения описывают законы природы. “Законопослушные” функции, удовлетворяющие таким уравнениям, весьма редки в пространстве всех “допустимых” функций (независимо от выбора топологии в рассматриваемом функциональном пространстве)”.

Пусть математическая модель физического процесса описывается уравнением

$$\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(t) D^\alpha u = f(t), \quad t \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = \partial/\partial x_k$.

Классическим решением уравнения (2) называется функция u , имеющая непрерывные частные производные $D^\alpha u$ при $|\alpha| \leq m$ и обращающая уравнение в тождество.

Многие задачи математической физики требуют расширения понятия решения, поскольку из физических соображений следует, что искомые функции не имеют необходимого числа производных. Это привело к понятию обобщённого решения [2]. Существуют дифференциальные уравнения, не имеющие и обобщённого решения. Например, математическая модель вынужденных 2π -периодических колебаний закреплённой на концах отрезка $[0, \pi]$ струны имеет вид

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega = \mathbb{R} \times [0, \pi],$$

$u, u_t, f(t, x) \in L_1^2(\Omega)$ – 2π -периодические по t функции, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$. В работе [3] показано, что эта модель имеет или не имеет обобщённого решения при каждой функции

$f(t, x)$ в зависимости от того, не является или является s числом Лиувилля, что отражает сложность рассматриваемого процесса.

Предлагается идея: записывается счётная система $\phi = \{\phi_p, p \in \mathbb{N}\}$ элементов, имеющая в некотором векторном пространстве H_1 со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ биортогональную систему $\phi^* = \{\phi_p^*, p \in \mathbb{N}\}$, причём в некотором векторном пространстве H_2 со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ системы $A\phi = \{A\phi_p, p \in \mathbb{N}\}$ и $(A\phi)^* = \{(A\phi_p)^*, p \in \mathbb{N}\}$ биортогональны. Если существуют пространства X и Y , в которых сходятся ряды $\sum_p a_p \phi_p$, $\sum_p a_p A\phi_p$, где a_p – числа и x , y – соответствующие их суммы, то элемент x следует называть *решением уравнения (1)*; так как это решение определяется множеством ϕ , то естественно назвать его ϕ -решением.

На первой стадии разработки теории разрешимости возникает вопрос: в каких случаях можно построить пространства X и Y , в которых при всех $a_p, b_p, p \in \mathbb{N}$, сходились бы ряды $\sum_p a_p \phi_p$ и $\sum_p b_p A\phi_p$? Эту идею удалось реализовать в статьях [4–6].

Было построено полное топологическое векторное пространство D'_ϕ , элементы u которого и только они представимы в виде $u = \sum_p a_p \phi_p$, и доказано, что уравнение (1) имеет ϕ -решение, если $y = \sum_p b_p A\phi_p$.

Отметим, что в работе [7] вводится самый широкий класс обобщённых периодических функций, который можно отождествить с множеством формальных тригонометрических рядов. Предложенный там подход является частным случаем разработанного нами подхода.

Введение пространства D'_ϕ позволило значительно расширить множество разрешимых дифференциальных уравнений, в том числе и тех, которые не имели обобщённых решений. В частности, упомянутая выше задача о колебании струны при иррациональном s однозначно разрешима в пространстве D'_ϕ [5], т.е. она однозначно разрешима при $f \in D'_\phi$ и

$$\phi = \{\exp(ik_1 t) \sin(k_2 x), k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидны и недостатки.

1. Если систему ϕ мы выбираем сами, то ничто не мешает выбрать её так, что выполнится не только биортогональность, но и равенство $\phi = \phi^*$, существование у $A\phi$ биортогональной $(A\phi)^*$ в общем случае под вопросом.

2. Если элемент y задан, то возможно ли равенство $y = \sum_p b_p \phi_p$?

3. Не решены вопросы регулярности ϕ -решения.

Поэтому ниже приводится новый подход (при введённом понятии решения) к вопросу разрешимости дифференциальных уравнений. Разработанный метод универсален в том смысле, что применим к линейным уравнениям разных типов (скалярным, матричным, дифференциальным, интегральным, алгебраическим, функциональным, с отклонениями и без отклонений аргументов и многим другим), что будет показано на конкретных типах уравнений.

1. Абстрактные результаты.

1.1. Известные результаты, гарантирующие разрешимость уравнения (1). Пусть A отображает конечномерное линейное пространство L^m в конечномерное линейное пространство L^n . С помощью базисов $e_{(1)}$ в L^m и $e_{(2)}$ в L^n уравнение преобразуется к системе уравнений $A_0 u = v$, в которой A_0 – прямоугольная числовая матрица размерности $m \times n$ и справедлива

Теорема 1 [8, с. 49]. *Уравнение (1) разрешимо (однозначно) тогда и только тогда, когда совпадают ранги матриц A_0 и расширенной $(A_0|y)$ (в системе $A_0 e_{(1)}$ – линейно независимые элементы).*

Проблема разрешимости резко усложняется тогда, когда либо m , либо n , либо и m и n одновременно равны $+\infty$. Хотя и в этом случае часто уравнение $Ax = y$ можно преобразовать в систему $A_0 u = v$, однако матрица A_0 окажется бесконечномерной и неизвестно, будет ли справедлива теорема 1.

Пусть A – линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения и замкнутым в банаховом пространстве Y множеством значений $R(A)$. Пусть A^* – оператор, сопряжённый к A , с областью определения $D(A^*)$, $N(A^*) = \{\psi \in D(A^*), A^* \psi = 0\}$.

Теорема 2 [9, с. 229]. 1. Если $N(A^*) = \{0\}$, то $R(A) = Y$.

2. Если $N(A^*) \neq \{0\}$, то для разрешимости уравнения $Ax = y$ необходимо и достаточно, чтобы $\langle y, \psi \rangle = 0$ для всех решений уравнения $A^*\psi = 0$.

Здесь и далее через 0 обозначаем число ноль, нулевой вектор, нулевую матрицу, нулевой элемент. По смыслу всегда будет понятно, что подразумевается под записью 0. В случае конкретных пространств X теоремы о разрешимости выглядят проще.

Теорема 3 [10, с. 44]. Пусть X – полное метрическое пространство с метрикой ρ и оператор $A : X \rightarrow X$ таков, что для всех $x, y \in X$ $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$, где $\alpha < 1$ и не зависит от x и y . Тогда уравнение $Ax = x$ имеет одно и только одно решение x .

Теорема 4 [11, с. 37]. Пусть X – банахово пространство, A – вполне непрерывный оператор, отображающий ограниченное замкнутое выпуклое множество $\Omega \subset X$ в себя. Тогда уравнение $Ax = x$ имеет решение $x \in \Omega$.

Мы привели эти известные теоремы для полноты изложения.

1.2. Пространства, в которых заданный набор линейно независимых элементов образует ортогональный базис. Пусть L – векторное пространство, $g = \{g_p \in L, p \in N \subset \mathbb{Z}^n\}$ и $L_g = \{\sum_{|p|=0}^M c_p g_p, c_p \in \mathbb{C}, M \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ – линейная оболочка множества g . Здесь и далее $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{Z}^n$ – множество всех n -мерных векторов $p = (p_1, \dots, p_n)$ с целочисленными координатами, $|(p_1, \dots, p_n)| = |p_1| + \dots + |p_n|$, $\sum_{|p|=0}^M (\cdot)$ означает, что суммирование производится по всем $p \in N$, для которых $|p| \leq M$. Всюду $\mu = \{\mu_p \neq 0, p \in N\}$.

На первом этапе предполагаем, что в множестве g элементы линейно независимы, т.е. при каждом M из условия $\sum_{|p|=0}^M c_p g_p = 0$ следует, что $c_p = 0$ при всех p . Элементы $u \in L_g$, $v \in L_g$ однозначно представимы в виде $u = \sum u_p g_p$, $v = \sum v_p g_p$, причём в множествах $\{u_p\}$, $\{v_p\}$ имеется конечное количество ненулевых чисел. Поэтому $\langle u, v \rangle_\mu = \sum |\mu_p|^2 u_p \bar{v}_p$ – скалярное произведение в L_g и $(\langle u, u \rangle_\mu)^{1/2} = \|u\|_\mu$ – норма элемента u . Итак, L_g – предгильбертово пространство.

Полношение L_g с нормой $\|\cdot\|_\mu$ до гильбертова пространства обозначим $H_\mu(g)$. Итак, $f \in H_\mu(g)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $u_m \in L_g$ такая, что $\|f - u_m\|_\mu \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Так как $\langle g_p, g_r \rangle_\mu = 0$ при $p \neq r$ и $\langle g_p, g_p \rangle_\mu = |\mu_p|^2$, то

$$\{\mu_p^{-1} g_p, p \in N\} \text{ – ортонормированный базис в } L_g. \quad (3)$$

Если дополнительно не оговорено, то в дальнейшем суммирование проводится по $p \in N$.

Теорема 5. (3) – ортонормированный базис в пространстве $H_\mu(g)$.

Доказательство. Пусть $f \in H_\mu(g)$. Существуют $f_m = \sum f_{m,p} \mu_p^{-1} g_p \in L_g$, при которых $\|f - f_m\|_\mu \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m\|_\mu = \|f\|_\mu$. В силу (3) имеем

$$\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_\mu^2 = \sum |f_{m_1,p} - f_{m_2,p}|^2 \rightarrow 0$$

при $m_1 \geq m_2 \rightarrow +\infty$. Поэтому существуют f_p , для которых $\sum |f_{m,p} - f_p|^2 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Составим ряд $\sum f_p \mu_p^{-1} g_p$ и его частные суммы $S_m = \sum_{|p| \leq m} f_p \mu_p^{-1} g_p$. Ввиду (3)

$$\|f_m - S_m\|_\mu^2 = \sum |f_{m,p} - f_p|^2 \rightarrow 0,$$

если $m \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\|f - S_m\|_\mu \leq \|f - f_m\|_\mu + \|f_m - S_m\|_\mu \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow +\infty$. Это означает, что ряд $\sum f_p \mu_p^{-1} g_p$ сходится по норме к элементу f . Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 5 следует, что ряд $\sum a_p \mu_p^{-1} g_p$ сходится в $H_\mu(g)$ по норме тогда и только тогда, когда $\sum |a_p|^2 < +\infty$; если $f \in H_\mu(g)$, $f_p = \langle f, \mu_p^{-1} g_p \rangle_\mu$, то $\sum |f_p|^2 < +\infty$, $f = \sum f_p \mu_p^{-1} g_p$, в частности, f – нулевой элемент в $H_\mu(g)$, т.е. $f_p = 0$ при всех $p \in N$. Если $h \in H_\mu(g)$ и $\hat{\mu}_p \leq c_1 \mu_p$ при всех достаточно больших $|p|$, где c_1 не зависит от p , то $h \in H_{\hat{\mu}}(g)$.

Обозначим $H(g) = \bigcup_\mu H_\mu(g)$. Элементы из $H(g)$ называем g -распределениями.

Определение 1. Ряд $\sum b_p g_p$ сходится в пространстве $H(g)$, если существует μ , при котором ряд сходится в $H_\mu(g)$ по норме.

Теорема 6. Все ряды $\sum b_p g_p$ сходятся в пространстве $H(g)$.

Доказательство. Если $\sum |b_p|^2 |\mu_p|^2 < +\infty$, то ряд сходится в силу замечания 1. Убедимся в том, что эта оценка выполняется при некотором μ . Положим $\mu_p = x_p |b_p|^{-1}$, если $b_p \neq 0$, $\mu_p = x_p$ в случае $b_p = 0$, где $x_p \neq 0$, $\sum |x_p|^2 < +\infty$. Так как $|b_p \mu_p| \leq |x_p|$, то $\sum |b_p|^2 |\mu_p|^2 < +\infty$.

Очевидно, что если множество $\hat{g} = \{\hat{g}_p, p \in N_1\}$ состоит из линейно независимых элементов и $g \subset \hat{g}$, то $H_\mu(g) \subset H_\mu(\hat{g})$. Теорема доказана.

На втором этапе построим пространство $X(g)$, в котором сходятся все ряды

$$\sum_{p \in N} a_p g_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

в случае, когда нет линейной зависимости элементов.

Как установлено на первом этапе, $X(g) = H(g)$, если в множестве g все элементы линейно независимы. Так как элементы $g_r = 0$ не влияют на сходимость ряда (4), то предполагаем, что $g_p \neq 0$ при всех $p \in N$.

Теорема 7. Предположим, что после удаления из множества g конечного числа элементов g_p , $p \in N_2$, линейно зависящих от оставшихся, в полученной системе $\hat{g} = \{g_p, p \in N_1\}$ элементы линейно независимы. Тогда $X(g) = H(\hat{g})$.

Доказательство. Нужно доказать, что в $H(\hat{g})$ сходится каждый ряд (4). Итак,

$$\sum_{p \in N} a_p g_p = \sum_{p \in N_2} a_p g_p + \sum_{p \in N_1} a_p g_p.$$

По предположению число N_2 конечное и $g_p = \hat{g}_p$ при $p \in N_1$. Поэтому $\sum_{p \in N_2} a_p g_p = \sum_{p \in N_1} c_p \hat{g}_p$, и среди c_p , $p \in N_1$, имеется конечное количество ненулевых элементов. Поэтому $\sum a_p g_p = \sum_{p \in N_1} (c_p + a_p) \hat{g}_p$ и ряд (4) сходится в $H(\hat{g})$. Теорема доказана.

Замечание 2. При выполнении предположения теоремы 7 ряд (4) сходится в $H(\hat{g})$ тогда и только тогда, когда $\sum |\mu_p|^2 |a_p|^2 < +\infty$ при некотором μ . Это объясняется тем, что среди c_p , $p \in N$, количество ненулевых элементов конечно.

1.3. Разрешимость линейных уравнений. Зафиксируем систему $\phi = \{\phi_p, p \in N\}$, принадлежащую некоторому векторному пространству L . Предположим, что все элементы в ϕ линейно независимы. Тогда существует пространство $H(\phi)$, в котором сходятся все ряды

$$\sum a_p \phi_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \quad (5)$$

причём ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда $\sum |a_p|^2 |\mu_p|^2 < +\infty$.

Пусть A_0 – линейный оператор, применимый к каждому элементу множества ϕ . Введём множество $A_0 \phi = \{A_0 \phi_p, p \in N\}$, принадлежащее некоторому другому векторному пространству. Обозначим $N_3 = \{p : A_0 \phi_p = 0\}$.

Предположение (Р). Из множества $\{A_0 \phi_p, p \in N, p \notin N_3\}$ можно так удалить конечное количество элементов (множество их индексов обозначим через N_4), линейно зависящих от оставшихся $\{A_0 \phi_p, p \in N_4\}$, что в $A_0 \hat{\phi} = \{A_0 \phi_p, p \in N_4\}$ элементы линейно независимы.

При выполнении предположения (P) все ряды

$$\sum_{p \in N} a_p A_0 \phi_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \quad (6)$$

сходятся в $H(A_0 \hat{\phi})$, причём ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0 \hat{\phi})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum' |a_p|^2 |\mu_p|^2 < +\infty.$$

Здесь запись $\sum'(\cdot)$ означает, что суммирование проводится по всем $p \in N_4$. Итак, справедлива

Теорема 8. Пусть выполняется предположение (P). Если ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$, то ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0 \hat{\phi})$; если ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0 \hat{\phi})$ и в N_3 конечное количество элементов, то ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$; если в $A_0 \phi$ элементы линейно независимы, то ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0 \hat{\phi})$.

Введём оператор $A : H(\phi) \rightarrow H(A_0 \hat{\phi})$, положив $Ax = \sum a_p A_0 \phi_p$ для $x = \sum a_p \phi_p$. Отметим, что $A\phi_p = A_0 \phi_p$, $p \in N$.

Рассмотрим уравнение (1), в котором неизвестно x . Через $\|x\|_{\mu,1}$ (соответственно $\|y\|_{\mu,2}$) обозначим норму $x \in H_\mu(\phi)$ (соответственно $y \in H_\mu(A\hat{\phi})$). Как доказано ранее,

$$\left\| \sum x_p \mu_p^{-1} \phi_p \right\|_{\mu,1}^2 = \sum |x_p|^2, \quad \left\| \sum y_p \mu_p^{-1} A\hat{\phi}_p \right\|_{\mu,2}^2 = \sum |y_p|^2,$$

поэтому $\|x\|_{\mu,1} = \|y\|_{\mu,2}$, если $x \in H_\mu(\hat{\phi})$ является решением уравнения $Ax = y$ и $y \in H_\mu(A\hat{\phi})$.

2. Приложения.

2.1. Дифференциальные уравнения в частных производных с отклонениями аргументов. Рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha,j}(t) x^{(\alpha)}(t + \tau_{\alpha,j}) = u(t), \quad t \in \Omega \subset \mathbb{R}^s, \quad s \geq 1. \quad (7)$$

В этом пункте используем обозначения и предположения: Φ – конечное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$; $C_{\alpha,j}(t)$ – квадратные $n \times n$ -матрицы, не зависящие от x ; $x^{(\alpha)}$ – производная порядков α_1 по $t_1, \dots, \alpha_s$ по t_s , $s \geq 1$; $\tau_{\alpha,j} \in \mathbb{R}^s$ и не зависят от x , t ; $[0, 2\pi]^s \subset \Omega$; если $t \in \mathbb{R}^s$, $\xi \in \mathbb{R}^s$, то полагаем $t\xi = (t_1\xi_1, \dots, t_s\xi_s)$, $t \geq \xi$ означает, что $t_j \geq \xi_j$, $j = \overline{1, s}$; i – мнимая единица; k, p, r, M_j – элементы из $\mathbb{Z}^s$; $e_q = (e_{q,1}, \dots, e_{q,n})$, $e_{q,q} = 1$, $e_{q,j} = 0$, если $q \neq j$; $u(t)$ не зависит от x .

Уравнение вида (7) пытаются решить, полагая $x(\xi) = \psi(\xi)$ при $\xi \notin \Omega$, где $\psi(\xi)$ – заданная достаточно гладкая функция [12].

Введём систему $\phi = \{e_q \exp((\lambda + ik)t), \quad q = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{Z}^s, \quad s \geq 1\}$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ не зависит от k . Пусть

$$(\lambda + ik)^\alpha = \prod_{j=1}^s (\lambda_j + ik_j)^{\alpha_j}.$$

В ϕ функции линейно независимы, поэтому существуют пространства $H_\mu(\phi)$, $H(\phi)$. Используя обозначение

$$A_k(t, \lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha,j}(t) (\lambda + ik)^\alpha \exp((\lambda + ik)\tau_{\alpha,j}),$$

получим $A\phi = \{A_k(t, \lambda)e_q \exp((\lambda + ik)t), \quad q = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{Z}^s, \quad s \geq 1\}$. Предполагая, что $C_{\alpha, j}(t)$ – тригонометрические многочлены, т.е.

$$C_{\alpha, j}(t) = \sum_{r=M_1}^{M_2} C_{\alpha, j, r} \exp(irt)$$

при всех $\alpha \in \Phi$, $j = \overline{1, n_1}$, и используя обозначения

$$A_{k, r}(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha, j, r}(\lambda + ik)^\alpha \exp((\lambda + ik)\tau_{\alpha, j}),$$

будем иметь

$$A_k(t, \lambda) = \sum_{r=M_1}^{M_2} A_{k, r}(\lambda)e_q \exp((\lambda + ik + ir)t). \quad (8)$$

Теорема 9. Пусть выполняются равенства (8). Тогда:

- 1) если матрицы $A_{k, M_2}(\lambda)$ обратимы при $k \geq M_4$, то в $A\phi(M_4) \equiv \{A(e_q \exp((\lambda + ik)t)), \quad q = \overline{1, n}, \quad k \geq M_4\}$ элементы линейно независимы;
- 2) если матрицы $A_{k, M_1}(\lambda)$ обратимы при $k \leq M_3$, то в $A\phi(M_2) \equiv \{A(e_q \exp((\lambda + ik)t)), \quad q = \overline{1, n}, \quad k \leq M_3\}$ элементы линейно независимы;
- 3) если матрицы $A_{k, M_2}(\lambda)$ обратимы при всех k (либо матрицы $A_{k, M_1}(\lambda)$ обратимы при всех k), то в $\{A(e_q \exp((\lambda + ik)t)), \quad q = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{Z}^s\}$ элементы линейно независимы.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Предположим, что в $A\phi(M_4)$ имеются линейно зависимые элементы, т.е. существуют такие числа $b_{k, q}$, при которых

$$\sum_{k=M_4}^{M_5} \sum_{q=1}^n b_{k, q} A(e_q \exp((\lambda + ik)t)) \equiv 0, \quad \sum_{k=M_4}^{M_5} \sum_{q=1}^n |b_{k, q}| \neq 0. \quad (9)$$

После обозначений $b_k = (b_{k, 1}, \dots, b_{k, n})$ в силу (9) получим тождество

$$\sum_{k=M_4}^{M_5} \sum_{r=M_1}^{M_2} A_{k, r}(\lambda) b_k \exp(i(k + r)t) \equiv 0. \quad (10)$$

При этом было учтено, что λ не зависит от k и $\exp(\lambda t) \neq 0$. Ввиду (9), не нарушая общности, можно считать $b_{M_5} \neq 0$. Запишем (10) в виде

$$A_{M_5, M_2} b_{M_5} \exp(i(M_5 + M_2)t) + \sum' D_{k, r} \exp(i(k + r)t),$$

здесь штрих указывает на то, что суммирование проводится по тем $k \in [M_4, M_5]$, $r \in [M_1, M_2]$, для которых $k + r \leq M_5 + M_2$, $|k + r| < |M_5 + M_2|$, т.е. $\exp(i(M_5 + M_2)t)$ отсутствует в $\sum'(\cdot)$. Поэтому $A_{M_5, M_2} b_{M_5} = 0$, $b_{M_5} = 0$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение. Аналогично доказываются второе и третье.

Ниже $A\hat{\phi} = \{A\phi_{q, p}, \quad q, p \in N_6\}$ получается удалением из $A\phi$ всех нулевых элементов и конечного количества ненулевых элементов, линейно зависимых от оставшихся. На основании доказанных результатов сформулируем основной результат данного пункта.

Теорема 10. Пусть в $A\hat{\phi}$ элементы линейно независимы. Тогда

- 1) уравнение (7) имеет решение $x \in H(\phi)$ тогда и только тогда, когда $u \in H(A\hat{\phi})$;
- 2) если в $A\phi$ конечное количество нулевых элементов, то $x \in H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда $u \in H_\mu(A\hat{\phi})$;

3) уравнение (7) однозначно разрешимо в $H(\phi)$ тогда и только тогда, когда в $A\phi$ элементы линейно независимы, $u \in H(A\phi)$.

Доказательство. Нужно доказать только второе утверждение. Пусть $x \in H_\mu(\phi)$, т.е. $x = \sum x_{q,p} \mu_p^{-1} e_q \exp((\lambda + ik)t)$. Тогда $\sum |x_{q,p}|^2 < +\infty$. Значит, ряд $\sum_{q,p \in N_6} x_{q,p} \mu_p^{-1} A(e_q \exp((\lambda + ik)t))$ сходится в $H_\mu(A\hat{\phi})$, т.е. $u = Ax \in H_\mu(A\hat{\phi})$.

В случае $u \in H_\mu(A\hat{\phi})$ имеем

$$u = \sum_{q,p \in N_6} u_{q,p} \mu_p^{-1} A(e_q \exp((\lambda + ik)t)), \quad \sum_{q,p \in N_6} |u_{q,p}|^2 < +\infty.$$

Добавив конечное количество чисел, получим $\sum |u_{q,p}|^2 < +\infty$. Следовательно, ряд

$$\sum x_{q,p} \mu_p^{-1} e_q \exp((\lambda + ik)t)$$

сходится в $H_\mu(\phi)$ и его сумма x является решением уравнения (7).

Для уравнения (7) второй по важности является проблема регулярности решений, т.е. выделения дополнительных свойств решений. Например, если

$$x = \sum_k z_k \exp((\lambda + ik)t) \quad (11)$$

и ряд сходится при всех $t \in \Omega$, то x следует считать обычной функцией в Ω ; если ряд сходится равномерно в Ω , то x следует считать непрерывной функцией в Ω и так далее.

Выделим условия на коэффициенты z_p , гарантирующие сходимость ряда (11) в $D'(\Omega)$ – пространстве обобщённых функций (распределений Шварца).

Пространство обобщённых функций строится по схеме:

1) фиксируется открытая область $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ненулевой меры;
2) через $C_0^{+\infty}(\Omega)$ обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(t) \equiv 0$ вне ограниченного замкнутого множества $K_f \subset \Omega$ ненулевой меры;

3) последовательность $\{f_m(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega), m = 1, 2, \dots\}$ называется *сходящейся в $C_0^{+\infty}(\Omega)$* , если существует такое ограниченное замкнутое $K \subset \Omega$, что $f_m(t) \equiv 0$ вне K для всех m и при некоторой $f_0(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$, каждом α имеет место $\sup_{t \in \Omega} |f_m^{(\alpha)}(t) - f_0^{(\alpha)}(t)| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$;

4) каждый линейный непрерывный функционал, заданный на $C_0^{+\infty}(\Omega)$, называется *обобщённой функцией*;

5) ряд (11) называется *сходящимся в множестве обобщённых функций*, если при каждой $f(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ сходится числовой ряд

$$\sum_k z_k \int_{\Omega} f(t) \exp((\lambda + ik)t) dt. \quad (12)$$

Теорема 11. Пусть выполняется равенство (11) и существует $p \in \mathbb{Z}^s$, при котором

$$\sum_k |z_k| |(\lambda + ik)^p| < +\infty.$$

Тогда ряд из (11) сходится в пространстве обобщённых функций.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что все координаты в p отрицательны. Докажем абсолютную сходимость ряда (12). Так как

$$(\lambda + ik)^{-p} \exp((\lambda + ik)t) = (\exp((\lambda + ik)t))^{(-p)},$$

то

$$\int_{\Omega} f(t) \exp((\lambda + ik)t) dt = (\lambda + ik)^p \int_{\Omega} f(t) (\exp((\lambda + ik)t))^{(-p)} dt.$$

Напомним, что $z^{(\alpha)}$ – производная порядка α . Интегрируя по частям и учитывая $f(t) \equiv 0$ вне $K_f \subset \Omega$, получаем соотношение

$$\int_{\Omega} f(t) \exp((\lambda + ik)t) dt = (-1)^{|p|} (\lambda + ik)^p \int_{\Omega} f^{(-p)}(t) \exp((\lambda + ik)t) dt,$$

при этом

$$\left| \int_{\Omega} f^{(-p)}(t) \exp((\lambda + ik)t) dt \right| \leq \int_{K_f} |f^{(-p)}(t)| \exp(\lambda t) dt = C_p < +\infty,$$

так как K_f – ограниченное и замкнутое множество, а подынтегральные функции непрерывны в K_f . Следовательно,

$$\sum_k |z_k| \left| \int_{\Omega} f(t) \exp((\lambda + ik)t) dt \right| \leq C_p \sum_k |z_k| (\lambda + ik)^p < +\infty.$$

Замечание 3. При выполнении предположений теоремы 11 решение x уравнения (7) можно считать в Ω обобщённой функцией. Следует отметить, что фразы “ x можно назвать обобщённым решением уравнения (7)” и “ x – обобщённое решение уравнения (7)” имеют разный смысл. Чтобы убедиться в этом, достаточно напомнить понятие обобщённого решения.

Обобщённая функция x называется *обобщённым решением уравнения (7)*, если при каждой $f \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ выполняется $x[A^*f] = u[f]$, где A^* – сопряжённый к A оператор, $u \in D'(\Omega)$, $v[f]$ – значение обобщённой функции на f , т.е. об обобщённом решении может идти речь только тогда, когда существует A^* , $A^*C_0^{+\infty}(\Omega) \subset C_0^{+\infty}(\Omega)$, u – обобщённая функция.

Мы выбрали систему $\phi = \{e_q \exp((\lambda + ik)t)\}$, так как многие волновые процессы после замены аргументов описываются функцией $\exp(\lambda t)v(t)$, где $v(t)$ – периодическая функция; легко проверяется независимость элементов в ϕ ; в случае $\det A_{k,r}(\lambda) = z(\lambda) \neq 0$ всегда можно подобрать λ так, чтобы $\det A_{k,r}(\lambda) \neq 0$ при всех k, r . Действительно, положив $\lambda = \lambda_0(1, \dots, 1)$, получим скалярную, аналитическую при всех λ_0 функцию $z(\lambda_0)$. Известно, что у таких функций не более счётного множества нулей.

Полученные в п. 2.1 результаты с естественными изменениями переносятся на случай, когда $\phi = \{e_q(t - t_0)^p, q = \overline{1, n}, p \in \mathbb{Z}^s\}$, где $t_j \neq t_{j,0}$ при всех j ; $C_{\alpha,j}(t) = \sum_{|r| \leq m} C_{\alpha,j,r}(t - t_0)^r$, $t = (t_1, \dots, t_s)$, $t_0 = (t_{1,0}, \dots, t_{s,0})$. Возникающие при этом ряды называются *рядами Лорана*.

При $s = 1$ уравнение (7) можно записать в виде

$$Ax \equiv \sum_{m=0}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} C_{m,j}(t) x^{(m)}(t + \tau_{m,j}) = u(t), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}^1.$$

Важно отметить, что в этом случае предыдущие результаты применимы и к сингулярным дифференциальным уравнениям.

2.2. Интегральные уравнения. Речь пойдёт о линейном уравнении

$$C(t)x(t) + \int_{\Omega} G(t, \xi)x(\xi)d\xi = f(t), \quad t \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{кратко } Ax = y), \quad (13)$$

где $C(t)$, $G(t, \xi)$, $f(t)$ – известные, не обязательно скалярные, функции, $\Omega \subset \Omega_1$. Линейность означает, что $C(t)$, $G(t, \xi)$, $f(t)$ не зависят от x .

Зафиксируем $\phi = \{\phi_p(\tau), p \in N\}$, $t \in \Omega_1$, – множество линейно независимых функций, для которых можно вычислить

$$A\phi = \left\{ C(t)x(t) + \int_{\Omega} G(t, \tau)\phi_p(\tau)d\tau, p \in N \right\}. \quad (14)$$

Очевидно, что функции в $A\phi$ будут линейно независимы тогда и только тогда, когда уравнение не имеет ненулевых решений вида $\sum_{|p| \leq m} b_p \phi_p(t)$, $m < +\infty$. Справедливо

Утверждение. Если функции в системе (14) линейно независимы, то существует пространство $H(A\phi)$ и при каждой функции $f \in H(A\phi)$ уравнение (13) имеет единственное решение $x_f \in H(\phi)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета в рамках реализации Программы стратегического академического лидерства (“Приоритет–2030”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными. М., 1990.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
3. Мокейчев В.С., Мокейчев А.В. Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. I // Изв. вузов. Математика. 1999. № 1. С. 25–35.
4. Мокейчев В.С. О разложении в ряды по заданной системе элементов // Исследования по прикладной математике и информатике. Вып. 27. Казань, 2011. С. 144–152.
5. Мокейчев В.С. Пространство, элементы которого и только они разлагаются в ряды Фурье по заданной системе элементов // Евразийское научное объединение. 2016. Т. 1. № 10. С. 24–31.
6. Мокейчев В.С. Метрические, банаховы, гильбертовы пространства ϕ_B -распределений // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 64–70.
7. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Тригонометрические ряды и обобщённые периодические функции // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 4. С. 799–804.
8. Ланкастер П. Теория матриц. М., 1978.
9. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.
10. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., 1965.
11. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
12. Мокейчев В.С. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами. Казань, 1985.

Казанский (Приволжский)
федеральный университет

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.
После доработки 31.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.