

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О КРАТНОМ СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТОМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

© 2023 г. Н. Ю. Капустин

Рассматривается задача для уравнения Бесселя целого порядка с комплексным физическим и спектральным параметрами в граничном условии. Спектральный параметр в граничное условие входит квадратично. Изучается вопрос базисности системы собственных функций в случае появления кратного собственного значения.

DOI: 10.31857/S0374064123100114, EDN: OOLJKGO

1. Постановка задачи. В работе [1] рассмотрена спектральная задача для уравнения Бесселя целого порядка

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (1)$$

с граничным условием

$$R'(1) = d\lambda^2 R(1). \quad (2)$$

В предположении ограниченности решений уравнения (1) получена система собственных функций

$$R_k(r) = J_n(\sqrt{\lambda_k}r), \quad k \in \mathbb{N},$$

отвечающих собственным значениям λ_k – корням характеристического уравнения

$$J'_n(\sqrt{\lambda}) = d(\sqrt{\lambda})^3 J_n(\sqrt{\lambda}). \quad (3)$$

Для всех собственных значений задачи будем считать выполненным условие

$$-\pi/2 < \arg \sqrt{\lambda_k} \leq \pi/2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2. Основные результаты. Получено уравнение

$$-4zJ_n(z)J'_n(z) + n^2J_n^2(z) = z^2[J_n^2(z) + (J'_n(z))^2] \quad (4)$$

для кратных корней уравнения (3) и доказана их простота при $n \neq 0$ (случай $n = 0$ достаточно подробно изучен в статье [2] и на нём здесь мы останавливаться не будем).

Доказано следующее утверждение: если $d \notin \{J'_n(z)J_n(z)/z^3\}$, где z – любой корень уравнения (4), то система

$$\{\sqrt{r}R_k(r) = \sqrt{r}J_n(\sqrt{\lambda_k}r)\}, \quad k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m-1, m+1, \dots,$$

собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без любых двух собственных функций с номерами l и m является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}W_k(r)\}$ определяется по формуле

$$\overline{W_k(r)} = A_k^{-1} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k}r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_l - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_l})} J_n(\sqrt{\lambda_l}r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_m - \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_m})} J_n(\sqrt{\lambda_m}r) \right],$$

где

$$A_k = \int_0^1 r J_n^2(\sqrt{\lambda_k} r) dr + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) =$$

$$= \left(\frac{d^2 \lambda_k^3 + 1 - n^2/\lambda_k}{2} \right) J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}), \quad k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m-1, m+1, \dots$$

Рассмотрим случай появления кратного спектра. Имеют место утверждения.

Теорема 1. Если $d = J'_n(z)J_n(z)/z^3$, где комплексное число z – любой корень уравнения (4), то система $\{\sqrt{r}R_k(r)\}$, $k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots$, собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без одной собственной функции с номером l , соответствующей кратному собственному значению $\lambda_l = z^2$, является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}V_k(r)\}$ определяется по формуле

$$\overline{V_k(r)} = A_k^{-1} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k} r) - \frac{(\lambda_l - \lambda_k)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{J_n(\sqrt{\lambda_l})} Z_l(r) - \left(1 - \frac{(\lambda_l - \lambda_k)Z_l(1)}{J_n(\sqrt{\lambda_l})} \right) \frac{J_n(\sqrt{\lambda_k})}{J_n(\sqrt{\lambda_l})} J_n(\sqrt{\lambda_l} r) \right],$$

где

$$Z_l(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}} [J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l} r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l} r)].$$

Теорема 2. Если $d = J'_n(z)J_n(z)/z^3$, где комплексное число z – любой корень уравнения (4), то система $\{\sqrt{r}R_k(r)\}$, $k = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots$, собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без одной собственной функции $R_m(r)$, соответствующей простому собственному значению λ_m , при наличии кратного корня $\lambda_l = z^2$, $m \neq l$, образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}V_k(r)\}$ определяется по формулам

$$\overline{V_l(r)} = A_l^{-1} \left[Z_l^\alpha(r) - \frac{Z_l^\alpha(1)}{J_n(\sqrt{\lambda_m})} J_n(\sqrt{\lambda_m} r) \right],$$

$$\overline{V_k(r)} = A_k^{-1} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k} r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_l - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_l})} J_n(\sqrt{\lambda_l} r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_m - \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_m})} J_n(\sqrt{\lambda_m} r) \right], \quad k \neq l,$$

где

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}} [J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l} r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l} r)] + \alpha J_n(\sqrt{\lambda_l} r), \quad Z_l^\alpha(1) = \frac{J_n(\sqrt{\lambda_l})}{\lambda_l - \lambda_m},$$

$$A_l = \int_0^1 r Z_l^\alpha(r) J_n(\sqrt{\lambda_l} r) dr + d(\lambda_l + \lambda_m) Z_l^\alpha(1) J_n(\sqrt{\lambda_l}) = - \left(2d + d^2 \lambda_l^2 + \frac{1}{4\lambda_l} \right) J_n^2(\sqrt{\lambda_l}).$$

Доказательство этих теорем проводится по схемам, разработанным в [3, 4] с использованием результатов работ [5, 6]. Построение биортогонально сопряжённой системы основано, в свою очередь, на формулах

$$\int_0^1 r J_n(\sqrt{\lambda_m} r) J_n(\sqrt{\lambda_k} r) dr + d(\lambda_m + \lambda_k) J_n(\sqrt{\lambda_m}) J_n(\sqrt{\lambda_k}) = 0,$$

$$\int_0^1 r J_n(\sqrt{\lambda_m} r) Z_l(r) dr + d(\lambda_m + \lambda_l) J_n(\sqrt{\lambda_m}) Z_l(1) - d J_n(\sqrt{\lambda_m}) J_n(\sqrt{\lambda_l}) = 0,$$

в которых λ_m , λ_k и λ_l – различные собственные значения задачи (1), (2), причём λ_l – кратный корень.

Функция $Z_l(r)$ – это присоединённая функция для собственной функции $R_l(r) = J_n(\sqrt{\lambda_l}r)$ с кратным собственным значением. Действительно, пусть z – любой корень уравнения (4), $d = J'_n(z)J_n(z)/z^3$, $\lambda_l = z^2$. Рассмотрим задачу для присоединённой функции

$$Z_l''(r) + \frac{1}{r}Z_l'(r) + \left(\lambda_l - \frac{n^2}{r^2}\right)Z_l(r) = R_l(r), \quad 0 < r < 1, \quad (5)$$

$$Z_l'(1) = d\lambda_l^2 Z_l(1) - 2d\lambda_l R_l(1). \quad (6)$$

Решением задачи (5), (6) является корневая функция

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}}[J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l}r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l}r)] + \alpha J_n(\sqrt{\lambda_l}r),$$

где α – любое комплексное число.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капустин Н.Ю. О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1715–1718.
2. Moiseev E.I., Moiseev T.E., Kapustin N.Yu. On the multiple spectrum of a problem for the Bessel equation // Integral Transforms and Special Functions. 2020. V. 31. № 12. P. 1020–1024.
3. Капустин Н.Ю., Моисеев Т.Е. О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1426–1430.
4. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
5. Капустин Н.Ю. О классической задаче с комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 701–706.
6. Капустин Н.Ю. О двух спектральных задачах с одним характеристическим уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 962–964.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.
После доработки 30.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.