

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ, СОДЕРЖАЩЕГО СТЕПЕНИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

© 2023 г. А. В. Глушак

Рассмотрено абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора, который является генератором операторной функции Бесселя. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле на полуоси. Исследован вопрос о стремлении решения к нулю на бесконечности. Приведены примеры.

DOI: 10.31857/S0374064123100047, EDN: ONFNQC

Введение. Исследование дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, действующими в банаховом пространстве E , стимулирует развитие теории разрешающих операторов соответствующих начальных задач. В результате исследований эволюционных уравнений первого порядка $u'(t) = Au(t)$ возникли полугруппы линейных операторов $T(t)$, а при изучении уравнения второго порядка (абстрактного волнового уравнения) $u''(t) = Au(t)$ – операторные косинус-функции $C(t)$. Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятиям проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной косинус оператор-функции. Терминологию и литературные источники см. в монографиях [1, 2] и обзорных работах [3, 4].

Операторная функция Бесселя (ОФБ) была введена в рассмотрение в статьях [5, 6] как разрешающий оператор задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД). Но, также как и в теории полугрупп и операторных косинус-функций, семейство операторных функций Бесселя можно ввести (см. [7]) независимо от дифференциального уравнения ЭПД, с которым в итоге оно связано. Далее напомним процесс построения ОФБ.

Важную роль в построении семейства играет зависящий от параметра $k > 0$ оператор обобщённого сдвига T_s^t , определяемый равенством (см. [8])

$$T_s^t Y(s) = \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)} \int_0^\pi Y(\sqrt{s^2 + t^2 - 2st \cos \varphi}) \sin^{k-1} \varphi d\varphi, \quad s, t \geq 0, \quad (1)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Оператор обобщённого сдвига зависит от параметра $k > 0$, но, следуя [8], этот факт в его записи отмечать не будем.

Укажем также, что в настоящей работе будем обходиться понятием интеграла от непрерывной функции, но в случае необходимости можно использовать интеграл Бохнера от функции со значением в банаховом пространстве.

Пусть E – банахово пространство, параметр $k > 0$ и $Y_k(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow B(E)$ – операторная функция, действующая в пространство линейных ограниченных операторов $B(E)$.

Определение 1. Сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов $Y_k(t) : [0, \infty) \rightarrow B(E)$, зависящее от параметра $k > 0$, называется *операторной функцией Бесселя*, если

$$Y_k(0) = I, \quad Y_k(t)Y_k(s) = T_s^t Y_k(s), \quad s, t \geq 0,$$

и существуют постоянные $\Upsilon \geq 1$, $\omega \geq 0$ такие, что

$$\|Y_k(t)\| \leq \Upsilon e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

С семейством ОФБ связан дифференциальный оператор Бесселя

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t} \frac{d}{dt},$$

который часто встречается в дифференциальных уравнениях с осевой симметрией.

Определение 2. Генератором ОФБ $Y_k(t)$ называется оператор A с областью определения $D(A)$, состоящей из тех $x \in E$, для которых функция $Y_k(t)x$ дважды дифференцируема в точке $t = 0$, и который определяется равенством

$$Ax = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{d^2 Y_k(t)x}{dt^2} + \frac{k}{t} \frac{dY_k(t)x}{dt} \right).$$

В работе [7] доказаны следующие утверждения.

1. Если оператор A является генератором ОФБ $Y_k(t)$, то он замкнут и его область определения $D(A)$ плотна в E ; более того, в E плотно множество элементов, на которых определены все степени оператора A .

2. Для любых $t, s \geq 0$ и $x \in D(A)$ справедливы равенства

$$Y_k(t)Y_k(s) = Y_k(s)Y_k(t), \quad AY_k(t)x = Y_k(t)Ax.$$

3. Пусть $x \in D(A)$ и $t > 0$, тогда $Y_k(t)x \in D(A)$ и

$$AY_k(t)x = \frac{d^2 Y_k(t)x}{dt^2} + \frac{k}{t} \frac{dY_k(t)x}{dt}.$$

4. Если $u_0 \in D(A)$, то функция $Y_k(t)u_0$ является решением следующей задачи Коши для уравнения ЭПД:

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0;$$

в дальнейшем удобно символом $Y_0(t)$ обозначать операторную косинус-функцию $C(t)$ с генератором A .

5. Пусть $0 \leq k < m$ и оператор A – генератор ОФБ $Y_k(t)$; тогда A будет и генератором $Y_m(t)$, при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t)$ имеет вид

$$Y_m(t) = \frac{2\Gamma(m/2 + 1/2)}{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(m/2 - k/2)} \int_0^1 s^k (1 - s^2)^{(m-k)/2-1} Y_k(ts) ds; \quad (2)$$

равенство (2) называется *формулой сдвига* ОФБ по параметру.

Если оператор A – генератор операторной косинус-функции $Y_0(t) = C(t)$, то из (2) при $k = 0$ следует, что ОФБ $Y_m(t)$ представляет собой проинтегрированную специальным образом операторную косинус-функцию (подробнее об этом см. статью [9]).

1. Задача Дирихле. В банаховом пространстве E на полуоси $t \geq 0$ при значении параметра $k < 1$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащего степени неограниченного оператора A :

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = -P_m(A)u(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(0) = u_0, \quad \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| \leq M, \quad (4)$$

где $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1}B_m A^m u(t) + \sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n u(t)$, B_n , $n = \overline{0, m}$, – ограниченные операторы, действующие в E , A – генератор ОФБ $Y_q(t)$ при некотором $q \geq 0$.

Будем предполагать, что ограниченные операторные коэффициенты B_n и генератор A удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Область определения $D(A)$ инвариантна относительно ограниченных операторов B_n , $n = \overline{0, m}$, $AB_n x = B_n A x$, $x \in D(A)$, и спектр $\sigma(B_m)$ оператора B_m расположен правее вертикальной прямой $\operatorname{Re} \lambda = \delta > 0$ (условие параболичности).

Рассматриваемый нами случай назовём эллиптическим. Решением задачи Дирихле (3), (4) будем называть абстрактную функцию $u(t)$ со значением в области $D(A^m)$, дважды непрерывно дифференцируемую при $t > 0$, непрерывную при $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению (3) и условиям (4).

Абстрактные параболические уравнения с оператором $P_m(A)$ исследовались ранее в [10]. В гиперболическом случае начальная задача для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащего степени генератора ОФБ, изучалась в статьях [11, 12].

Укажем также, что решению эллиптических задач для дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих по одной или нескольким переменным оператор Бесселя, посвящены работы [13–17], в которых также имеется и обширный обзор соответствующих публикаций.

В настоящей работе рассмотрена задача (3), (4) в эллиптическом случае, при этом использовано построенное в [10] фундаментальное решение $G(t, s)$ уравнения

$$\frac{\partial v(t, s)}{\partial t} = (-1)^{m+1} B_m \frac{\partial^{2m} v(t, s)}{\partial s^{2m}} + \sum_{n=0}^{m-1} B_n \frac{\partial^{2n} v(t, s)}{\partial s^{2n}}, \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

которое имеет вид

$$G(t, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma} Q(t, \sigma) d\sigma, \quad (6)$$

где

$$Q(t, \sigma) = \exp\left(-t\sigma^{2m} B_m - t \sum_{n=0}^{m-1} \sigma^{2n} B_n\right).$$

При этом для функции $G(t, s)$ справедлива формула свёртки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t - t_1, s - s_1) G(t_1 - \tau, s_1 - \xi) ds_1 = G(t - \tau, s - \xi), \quad 0 \leq \tau < t_1 < t. \quad (7)$$

Наряду с уравнением (5), в области $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial w(t, s)}{\partial t} = (-1)^m B_m \frac{\partial^{2m} w(t, s)}{\partial s^{2m}} - \sum_{n=0}^{m-1} B_n \frac{\partial^{2n} w(t, s)}{\partial s^{2n}}, \quad w(0, s) = \delta(s), \quad (8)$$

где $\delta(s)$ – дельта-функция Дирака.

Применив к задаче (8) преобразование Фурье по переменной $s \in \mathbb{R}$ с учётом формулы связи решения задачи Дирихле для уравнения ЭПД с решением задачи Коши для параболического уравнения (см. [18, теорема 3]), введём в рассмотрение следующую операторную функцию, являющуюся решением задачи (8):

$$Z_k(t, s) = \frac{t^{1-k}}{2^k \pi \Gamma(1/2 - k/2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\sigma} \int_0^{\infty} \tau^{k/2-3/2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right) Q(\tau, \sigma) d\tau d\sigma = \int_0^{\infty} h_k(t, \tau) G(\tau, s) d\tau, \quad (9)$$

где фундаментальное решение $G(\tau, s)$ определено равенством (6),

$$h_k(t, \tau) = \frac{t^{1-k} \tau^{k/2-3/2}}{2^{1-k} \Gamma(1/2 - k/2)} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0.$$

Для обоснования существования решения задачи Дирихле (3), (4) нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $t \geq 0$, $b > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 1$. Тогда для функции вида

$$f(t) = \int_0^\infty s^{-\gamma} \exp\left(-\frac{b}{s} - \frac{t}{s^\beta}\right) ds$$

существуют постоянные $M_1, M_2 > 0$ такие, что справедлива оценка

$$f(t) \leq \frac{M_1}{M_2 + t^{(\gamma-1)/\beta}}. \quad (10)$$

Доказательство. При $t > 0$ после замены получим

$$f(t) = t^{(1-\gamma)/\beta} \int_0^\infty \xi^{-\gamma} \exp\left(-\frac{b}{\xi t^{1/\beta}} - \frac{1}{\xi^\beta}\right) d\xi < M_4 t^{(1-\gamma)/\beta},$$

что вместе с очевидным неравенством $f(t) \leq f(0) = M_3$ приводит к требуемому соотношению (10). Лемма доказана.

В зависимости от вида и свойств операторов A и $P(A)$ дальнейшее исследование будет разбито на два случая.

2. Задача Дирихле в случае $k < 1$ с оператором вида $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1} \times \times B_m A^m u(t)$. Для определяемого равенством (6) фундаментального решения $G(t, s)$ в статье [10] для этого случая установлена оценка

$$\left\| \frac{\partial^j G(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq M_j t^{-(j+1)/(2m)} \exp(-at^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)}), \quad a > 0, \quad (11)$$

доказательство которой проводится методами, развитыми в [19, гл. 1] для случая матричных коэффициентов B_j . Кроме того, при равномерной ограниченности $Y_0(s)$ определена аналитическая полугруппа

$$U(t; P_m(A))x = 2 \int_0^\infty G(t, s) Y_0(s) x ds$$

с генератором $P_m(A)$, областью определения которого является $D(A^m)$. Отметим, что полугрупповое свойство для $U(t; P_m(A))$ справедливо в силу формулы свёртки (7).

Оценим теперь производные операторной функции $Z_k(t, s)$.

Лемма 2. Для определяемой равенством (9) операторной функции $Z_k(t, s)$ и её производных до порядка $j = \overline{0, 2m}$ при $t > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq \frac{M_{k,j} t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j} > 0. \quad (12)$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (9) и воспользуемся оценкой (11). После замены переменных будем иметь

$$\left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq M_j \int_0^\infty h_k(t, \tau) \tau^{-(j+1)/(2m)} \exp(-a\tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)}) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M_j t^{1-k}}{2^{1-k} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau} - a\tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)}\right) d\tau = \\
&= \frac{M_j t^{-(j+1)/m}}{2^{1-k} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_0^\infty \xi^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp\left(-\frac{1}{4\xi} - \frac{a(|s|^m/t)^{2/(2m-1)}}{\xi^{1/(2m-1)}}\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Оценив последний интеграл с помощью неравенства (10) из леммы 1 при значениях

$$b = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2m-1}, \quad \gamma = \frac{j+1-m(k-3)}{2m},$$

получим требуемое неравенство (12):

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| &\leq \frac{M_j t^{-(j+1)/m}}{2^{1-k} \Gamma(1/2 - k/2)} \frac{M_1}{M_2 + (1/4(|s|^m/t)^{2/(2m-1)})^{(j+1+m-mk)(2m-1)/(2m)}} \leq \\
&\leq \frac{M_{k,j} t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам также понадобятся оценки производных с весом операторной функции $Z_k(t, s)$. Для этого сначала установим следующую лемму, которая доказывается по индукции.

Лемма 3. Пусть функция $Z(s) \in C^n(0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо равенство

$$\left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds}\right)^n Z(s) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,n} s^{j-2n} Z^{(j)}(s), \quad (13)$$

где

$$\theta_{j,n} = \frac{(2n-j-1)!}{(-2)^{n-j}(n-j)!(j-1)!}. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть равенство (13) выполнено при каком-то n . Тогда

$$\left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds}\right)^{n+1} Z(s) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,n} (j-2n) s^{j-2n-2} Z^{(j)}(s) + \sum_{j=2}^{n+1} \theta_{j-1,n} s^{j-2n-2} Z^{(j)}(s)$$

и для доказательства справедливости формулы (13) при $n+1$ осталось установить равенства

$$\theta_{1,n+1} = (1-2n)\theta_{1,n}, \quad \theta_{n+1,n+1} = \theta_{n,n} = 1, \quad \theta_{j,n+1} = (j-2n)\theta_{j,n} + \theta_{j-1,n}, \quad 2 \leq j \leq n,$$

которые непосредственно проверяются, учитывая определение чисел $\theta_{j,n}$ по формуле (14). Лемма доказана.

Следующая лемма является следствием лемм 2 и 3.

Лемма 4. Для определяемой равенством (9) операторной функции $Z_k(t, s)$ при $t > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t, s) \right\| \leq \sum_{j=1}^n \frac{|\theta_{j,n}| M_{k,j} t^{1-k} s^{j-2n}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j} > 0. \quad (15)$$

Предполагая равномерную ограниченность ОФБ $Y_q(s)$, $q \geq 0$, генератором которой является оператор A , далее выберем наименьшее $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq q$, и введём в рассмотрение операторную функцию

$$W_k(t)x = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t, s) s^{2n} Y_{2n}(s) x ds, \quad x \in E,$$

где ОФБ $Y_{2n}(s)$ выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Сходимость интеграла и возможность его дифференцирования по t обусловлены равенством (8) и оценкой (15). Ограниченная в пространстве E операторная функция $W_k(t)$ будет использована при установлении однозначной разрешимости задачи Дирихле (3), (4).

Отметим, что если оператор A – генератор ограниченной операторной косинус-функции $C(t)$, то, как следует из [20, гл. 9, п. 11], операторная функция

$$W_0(t) = 2 \int_0^\infty Z_0(t, s) C(s) ds = \int_0^\infty h_0(t, \tau) U(\tau; P(A)) d\tau,$$

где

$$h_0(t, \tau) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0,$$

является полугруппой, а псевдодифференциальный оператор $P_{1/2}(A) = -\sqrt{-P_m(A)}$ – генератор этой полугруппы $W_0(t)$.

Теорема 1. Пусть оператор A при некотором $q \geq 0$ является генератором равномерно ограниченной ОФБ $Y_q(s)$, $u_0 \in D(A^m)$ и выполнено условие 1. Тогда задача Дирихле (3), (4) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t, s) s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 ds, \quad (16)$$

где $Z_k(t, s)$ определена равенством (9), а ОФБ $Y_{2n}(s)$ выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Доказательство. Предположим вначале, что $u_0 \in D(A^{m+[n/2]+2})$ и $q > 0$. Тогда после n -кратного интегрирования по частям получим

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty Z_k(t, s) \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds}\right)^n (s^{2n-1} Y_{2n}(s) u_0) ds = 2 \int_0^\infty Z_k(t, s) \tilde{Y}_0(s) u_0 ds. \quad (17)$$

Записанная с помощью операторов движения решения уравнения ЭПД по параметру (подробнее см. [21, 22]) функция

$$\tilde{Y}_0(s)u_0 = \frac{1}{(2n-1)!!} \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds}\right)^n (s^{2n-1} Y_{2n}(s) u_0) \quad (18)$$

уже не будет ОФБ, но она определяет решение задачи Коши

$$u''(s) = Au(s), \quad s > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A^{[n/2]+2}), \quad u'(0) = 0.$$

Поскольку функция $Z_k(t, s)u_0$ удовлетворяет задаче (8), то непосредственно проверяется, что определяемая равенством (17) функция $u(t) = W_k(t)u_0$ является решением задачи Дирихле (3), (4). Действительно, очевидно, $u(0) = u_0$, а после интегрирования по частям внеинтегральные слагаемые обратятся в нуль и мы получим

$$\begin{aligned} u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) &= 2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 Z_k(t, s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial Z_k(t, s)}{\partial t} \right) \tilde{Y}_0(s) u_0 ds = \\ &= \int_0^\infty (-1)^m B_m \frac{\partial^{2m} Z_k(t, s)}{\partial s^{2m}} \tilde{Y}_0(s) u_0 ds = \int_0^\infty (-1)^m B_m Z_k(t, s) \frac{d^{2m} \tilde{Y}_0(s) u_0}{ds^{2m}} ds = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} (-1)^m B_m Z_k(t, s) A^m \tilde{Y}_0(s) u_0 ds = -P_m(A) u(t). \quad (19)$$

Таким образом, равенство (19) установлено на плотном в $D(A^m)$ множестве $D(A^{m+[n/2]+2})$ элементов u_0 . В силу ограниченности в пространстве E операторной функции $W_k(t)$ оно будет справедливо и для $u_0 \in D(A^m)$.

Случай $q = 0$ рассматривается аналогично, причём со значительными упрощениями.

Доказательство единственности решения задачи (3), (4) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения этой задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t, y) = f(W_k(y)(u_1(t) - u_2(t))),$$

где $f \in E^*$ (E^* – сопряжённое пространство), $t, y \geq 0$, которая, очевидно, удовлетворяет следующим уравнению и условиям:

$$\frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial w(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial w(t, y)}{\partial y}, \quad t, y > 0, \quad (20)$$

$$w(0, y) = 0, \quad \sup_{t, y \geq 0} \|w(t, y)\| < M. \quad (21)$$

Интерпретируем функцию $w(t, y)$ как обобщённую функцию и по переменной y применим I -преобразование. Для обычных экспоненциально убывающих при $y \rightarrow +\infty$ функций I -преобразование определяется равенством

$$\hat{w}(t, \lambda) = \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda y} I_p(\lambda y) w(t, y) dy,$$

где $p = (k-1)/2$, $I_p(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя. Распространение этого преобразования на обобщённые функции изложено в [23; 24, с. 63], при этом пространством основных функций также являются экспоненциально убывающие при $y \rightarrow +\infty$ функции, на которых и обеспечивается корректное определение I -преобразования обобщённой функции $w(t, y)$.

Из условий (20), (21) для образа $\hat{w}(t, \lambda)$ в пространстве регулярных обобщённых функций получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}(t, \lambda)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial \hat{w}(t, \lambda)}{\partial t} = \lambda^2 \hat{w}(t, \lambda), \quad t > 0, \quad (22)$$

$$\hat{w}(0, \lambda) = 0, \quad \sup_{\substack{t \geq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \|\hat{w}(t, \lambda)\| < M. \quad (23)$$

Общее решение уравнения (22) имеет вид

$$\hat{w}(t, \lambda) = t^{(1-k)/2} (d_1(\lambda) I_{(k-1)/2}(\lambda t) + d_2(\lambda) K_{(k-1)/2}(\lambda t)),$$

где $I_{(k-1)/2}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя, $K_{(k-1)/2}(\cdot)$ – функция Макдональда.

Из второго условия в (23) вытекает $d_1(\lambda) = 0$, а из первого условия в (23) следует $d_2(\lambda) = 0$, поэтому $\hat{w}(t, \lambda) = w(t, y) = 0$ для любого $y \geq 0$. В силу произвольности функционала $f \in E^*$ при $y = 0$ получим равенство $u_1(t) \equiv u_2(t)$, и единственность решения задачи Дирихле (3), (4) установлена. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть параметр $k < 1$, $B_m = I$, $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1} A^m u(t)$. Тогда, учитывая формулу (6), получаем

$$Q(t, \sigma) = e^{-t\sigma^{2m}}, \quad G(t, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma - t\sigma^{2m}} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(s\sigma) e^{-t\sigma^{2m}} d\sigma.$$

Последний интеграл только при $m = 1$ вычисляется в элементарных функциях и определяет фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$G(t, s)|_{m=1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right).$$

При $m \geq 2$ выражение для интеграла весьма громоздкое и содержит специальные функции. Например, при $m = 2$ оно имеет вид

$$G(t, s) = \frac{\Gamma(5/4)}{\pi t^{1/4}} {}_0F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{s^4}{256t}\right) - \frac{\Gamma(3/4)s^2}{8\pi t^{3/4}} {}_0F_2\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}; \frac{s^4}{256t}\right),$$

где ${}_0F_2(\cdot)$ – гипергеометрическая функция.

Подставив фундаментальное решение в (9) с учётом интеграла 2.3.3.1 из [25], определим

$$\begin{aligned} Z_k(t, s)|_{m=1} &= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2+s^2}{4\tau}\right) d\tau = \\ &= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty \xi^{-k/2} \exp\left(-\frac{t^2+s^2}{4}\xi\right) d\xi = \frac{\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} (t^2+s^2)^{k/2-1}. \end{aligned}$$

Наконец, по формуле (16) запишем решение задачи Дирихле (3), (4) при $m = 1$ в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= W_k(t)u_0 = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t, s) s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 ds = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot 2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}\right)^n (t^2+s^2)^{k/2-1} s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 ds = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot 2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty (k-2)(k-4)\cdots(k-2n)(t^2+s^2)^{k/2-n-1} s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 ds = \\ &= \frac{2\Gamma(n+1-k/2)t^{1-k}}{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty \frac{s^{2n} Y_{2n}(s) u_0}{(t^2+s^2)^{n+1-k/2}} ds. \end{aligned}$$

Приведём далее примеры представлений решения задачи Дирихле (3), (4) при $k < 1$, $m = 1$ в конкретных банаховых пространствах.

а) Пусть $E = L_p(-\infty, \infty)$, $p > 1$, $Y_0(s)u_0(x) = (u_0(x+s) + u_0(x-s))/2$ – операторная косинус-функция с генератором $A = d^2/dx^2$, $B_1 = I$. Тогда при $k < 1$, $m = 1$ решение задачи (3), (4) имеет вид

$$u(t, x) = \frac{\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty \frac{u_0(x+s) + u_0(x-s)}{(t^2+s^2)^{1-k/2}} ds.$$

б) Пусть $E = L_p(0, \infty)$, $p > 1$, $B_1 = I$. Если $0 < q \leq 2$, то определяемый равенством (1) (после замены параметра k на q) оператор обобщённого сдвига $T_x^s u_0(x)$ является ОФБ $Y_q u_0(x) = T_x^s u_0(x)$ с генератором

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{q}{x} \frac{d}{dx}.$$

Тогда $n = 1$ и в этом случае при $k < 1$, $m = 1$ решение задачи Дирихле (3), (4) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x) &= W_k(t)u_0 = \frac{-2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (t^2 + s^2)^{k/2-1} s^2 Y_2(s) u_0(x) ds = \\ &= \frac{4\Gamma(2-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty \frac{s^2 Y_2(s) u_0(x)}{(t^2 + s^2)^{2-k/2}} ds, \end{aligned}$$

где при $q = 2$

$$Y_2(s)u_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi u_0(\sqrt{x^2 + s^2 - 2xs \cos \varphi}) \sin \varphi d\varphi, \quad x, s \geq 0,$$

а при $0 < q < 2$ ОФБ $Y_q(s)$ определяется по формуле (2):

$$\begin{aligned} Y_2(s)u_0(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(q/2 + 1/2)\Gamma(1-q/2)} \int_0^1 \tau^q (1-\tau^2)^{-q/2} Y_q(\tau s) u_0(x) d\tau, \\ Y_q(s)u_0(x) &= \frac{\Gamma(q/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q/2)} \int_0^\pi u_0(\sqrt{x^2 + s^2 - 2xs \cos \varphi}) \sin^{q-1} \varphi d\varphi, \quad x, s \geq 0. \end{aligned}$$

в) Пусть $E = \mathbb{R}$, $A = -A_0^2$, $A_0 > 0$, $B_1 = 1$. Тогда проще всего считать $n = 0$, $Y_0(s) = \cos(A_0 s)$, и при $k < 1$, $m = 1$ решение задачи Дирихле (3), (4) имеет вид

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}u_0}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^\infty \frac{\cos(A_0 s)}{(t^2 + s^2)^{1-k/2}} ds.$$

Вычислив интеграл по формуле 2.5.6.4 из [25], получим

$$u(t) = \frac{2^{k/2+1/2}(A_0 t)^{1/2-k/2}}{\Gamma(1/2-k/2)} K_{1/2-k/2}(A_0 t) u_0,$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда.

К такому же результату мы придём, если возьмём $q = 2n$:

$$Y_{2n}(s) = \Gamma(n + 1/2)(A_0 s/2)^{1/2-n} J_{n-1/2}(A_0 s),$$

где $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода. Тогда

$$u(t) = \frac{2^{n+1/2}\Gamma(n + 1 - k/2)A_0^{1/2-n}t^{1-k}u_0}{\Gamma(1/2 - k/2)} \int_0^\infty (t^2 + s^2)^{k/2-n-1} s^{n+1/2} J_{n-1/2}(A_0 s) ds.$$

Вычислив интеграл по формуле 2.12.4.28 из [26], будем иметь

$$u(t) = \frac{2^{k/2+1/2}(A_0 t)^{1/2-k/2}}{\Gamma(1/2-k/2)} K_{1/2-k/2}(A_0 t) u_0.$$

Отметим, что в силу экспоненциального убывания функции Макдональда при $t \rightarrow \infty$ в последнем примере решение $u(t) = W_k(t)u_0$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Но в общем случае

из оценки (15) стремление решения $u(t) = W_k(t)u_0$ к нулю при $t \rightarrow \infty$ не вытекает. Приведём достаточное условие, обеспечивающее это стремление.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно при $s > 0$

$$\left\| \int_0^s Y_q(\tau) u_0 d\tau \right\| < \infty. \quad (24)$$

Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} W_k(t)u_0 = 0$.

Доказательство. Проинтегрировав по частям, запишем решение задачи Дирихле в виде

$$\begin{aligned} u(t) = W_k(t)u_0 &= \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^n Z_k(t, s) s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 ds = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} \left(s^{2n} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^n Z_k(t, s) \right) \int_0^s Y_{2n}(\tau) u_0 d\tau ds. \end{aligned} \quad (25)$$

С учётом равенства (13) дифференцированием получим

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(s^{2n} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^n Z_k(t, s) \right) = \sum_{j=1}^n j \theta_{j,n} s^{j-1} \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} + \sum_{j=1}^n \theta_{j,n} s^j \frac{\partial^{j+1} Z_k(t, s)}{\partial s^{j+1}},$$

и, применив в (25) оценки (12), (24), будем иметь

$$\begin{aligned} \|W_k(t)u_0\| &\leq \Upsilon_1 \|u_0\| t^{1-k} \sum_{j=1}^n j |\theta_{j,n}| M_{k,j} \int_0^\infty \frac{s^{j-1} ds}{t^{1-k+(j+1)/m} + s^{m(1-k)+j+1}} + \\ &+ \Upsilon_1 \|u_0\| t^{1-k} \sum_{j=1}^n |\theta_{j,n}| M_{k,j+1} \int_0^\infty \frac{s^j ds}{t^{1-k+(j+2)/m} + s^{m(1-k)+j+2}} = \Phi(t) + \Psi(t). \end{aligned}$$

В этом равенстве первое слагаемое $\Phi(t)$ после замен

$$s = t^\alpha \xi, \quad \alpha = \frac{1-k+(j+1)/m}{m(1-k)+j+1}, \quad \beta = \frac{-m(1-k)-j-1}{m(m(1-k)+j+1)}$$

превратится в

$$\Phi(t) = \Upsilon_1 \|u_0\| t^\beta \sum_{j=1}^n j \theta_{j,n} M_{k,j} \int_0^\infty \frac{\xi^{j-1} ds}{1 + \xi^{m(1-k)+j+1}},$$

и поскольку $\beta < 0$, то $\Phi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Второе слагаемое $\Psi(t)$ рассматривается аналогично с заменой j на $j+1$, откуда и вытекает нужное нам утверждение теоремы. Теорема доказана.

Например, если в условиях теоремы 1 оператор A является генератором равномерно ограниченной операторной косинус-функции $Y_0(s) = C(s)$, то, как следует из теоремы 2, помимо этого для стремления решения $u(t) = W_k(t)u_0$ к нулю при $t \rightarrow \infty$ следует дополнительно потребовать ограниченность операторной синус-функции

$$S(s) = \int_0^t C(\tau) d\tau.$$

В этом случае условие (24) выполнено, если, например, $A = A_1^2$, где оператор A_1 – генератор равномерно ограниченной группы $T(s; A_1)$ и, кроме того, точка $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора A_1 , $0 \in \rho(A_1)$. Тогда

$$Y_0(s) = C(s) = \frac{1}{2}(T(s; A_1) + T(-s; A_1)),$$

$$\int_0^s T(\tau; A_1)u_0 d\tau = \int_0^s AT(\tau; A_1)A^{-1}u_0 d\tau = \int_0^s T'(\tau; A_1)A^{-1}u_0 d\tau = (T(s; A_1) - I)A^{-1}u_0,$$

и условие (24), очевидно, справедливо, поскольку группа $T(s; A_1)$ равномерно ограничена.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда $E = H$ – гильбертово пространство и $A = -A_0^2$, где A_0 – самосопряжённый оператор, действующий в H , $0 \in \rho(A_0)$. Пусть E_λ – спектральная функция оператора A_0 . По теореме Стоуна (см., например, [1, § 4, теорема 4.7]) оператор A_0 является генератором унитарной группы

$$T(t; A_0)x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda x, \quad x \in H,$$

которая удовлетворяет неравенству (24). Действительно,

$$\int_0^s T(\tau; A_0)x d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^s e^{i\lambda\tau} d\tau dE_\lambda x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda s} - 1}{i\lambda} dE_\lambda x = -i(T(s; A_0) - I)A_0^{-1}x,$$

следовательно, операторная синус-функция ограничена, неравенство (24) выполнено и решение задачи Дирихле

$$u(t) = W_k(t)u_0 = 2 \int_0^{\infty} Z_k(t, s) \cos(A_0 s) u_0 ds$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

3. Задача Дирихле в случае $k < 1$ с оператором вида $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1}B_m \times \times A^m u(t) + \sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n u(t)$, $\sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n \neq 0$. Введём в рассмотрение оператор

$$B = -\mu^{2m} B_m - \sum_{n=0}^{m-1} \mu^{2n} B_n, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Условие 2. Если $\sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n \neq 0$, то при любом $\mu \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(B)$ оператора B не лежит на мнимой оси.

В случае выполнения условия 2 для определяемого равенством (6) фундаментального решения $G(t, s)$ в статье [10] установлена оценка

$$\left\| \frac{\partial^j G(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq M_j t^{-(j+1)/(2m)} \exp(-at^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} - \delta_1 t), \quad (26)$$

где $M_j > 0$, $a > 0$, $0 < \delta_1 < \delta$, постоянная δ взята из условия 1 (параболичности). Отметим, что в отличие от оценки (11) оценка (26) содержит множитель $\exp(-\delta_1 t)$.

Покажем, что условие 2 позволит ослабить требование равномерной ограниченности ОФБ $Y_q(s)$ при установлении разрешимости задачи Дирихле и допустить её экспоненциальный рост.

Лемма 5. Если выполнено условие 2, то для определяемой равенством (9) операторной функции $Z_k(t, s)$ и её производных до порядка $j = \overline{0, 2m}$ существуют постоянные $M_{k,j}$, Ω , $\Omega_1 > 0$ такие, что при $t > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq \frac{M_{k,j} t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}} e^{-\Omega_1 t - \Omega |s|}. \quad (27)$$

Доказательство. Также как и при доказательстве леммы 2, продифференцируем равенство (9) и воспользуемся оценкой (26). Обозначив $a = a_1 + a_2$, $0 < a_1 < a$, $a_2 = a - a_1$, $1 = b_1 + b_2$, $0 < b_1 < 1$, $b_2 = 1 - b_1$, $\delta_1 = \delta_2 + \delta_3$, $0 < \delta_2 < \delta_1$, $\delta_3 = \delta_1 - \delta_2$, получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| &\leq M_j \int_0^\infty h_k(t, \tau) \tau^{-(j+1)/(2m)} \exp(-a\tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} - \delta_1 \tau) d\tau = \\ &= \frac{M_j t^{1-k}}{2^{k-1} \Gamma(1/2 - k/2)} \times \\ &\times \int_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp\left(-\frac{(b_1+b_2)t^2}{4\tau} - (a_1+a_2)\tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} - (\delta_2+\delta_3)\tau\right) d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Покажем далее, что при $s \in \mathbb{R}$, $t, \tau > 0$ справедливы неравенства

$$\exp(-a_2 \tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} - \delta_3 \tau) \leq e^{-\Omega |s|}, \quad (29)$$

$$\exp(-b_2 \tau^{-1} t^2 - \delta_2 \tau) \leq e^{-\Omega_1 t}, \quad (30)$$

где

$$\Omega = a_2^{(2m-1)/(2m)} (\delta_3 (2m-1))^{1/(2m)} + \delta_3^{1/(2m)} (a_2/(2m-1))^{(2m-1)/(2m)}, \quad \Omega_1 = 2\sqrt{b_2 \delta_2}. \quad (31)$$

Неравенство (29) при $s = 0$, очевидно, выполнено. Пусть теперь $s \neq 0$. Докажем соотношение

$$a_2 \tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} + \delta_3 \tau \geq \Omega |s|$$

или равносильное ему

$$a_2 \left(\frac{|s|}{\tau} \right)^{1/(2m-1)} + \delta_3 \frac{\tau}{|s|} \geq \Omega.$$

Наименьшее значение функции $\varphi(t) = a_2 t^{1/(2m-1)} + \delta_3/t$ при $t > 0$ равно Ω , что и доказывает оценка (29).

Неравенство (30) получается из (29) заменой a_2 на b_2 , m на 1, s на t , δ_3 на δ_2 .

Учитывая неравенства (29), (30), из (28) выводим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| &\leq \frac{M_j t^{1-k}}{2^{k-1} \Gamma(1/2 - k/2)} e^{-\Omega_1 t - \Omega |s|} \times \\ &\times \int_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp\left(-\frac{b_1 t^2}{4\tau} - a_1 \tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Оценка интеграла в неравенстве (32) фактически была проведена ранее в лемме 2. Применяя эту оценку, придём к требуемому неравенству (27). Лемма доказана.

Следующая лемма является непосредственным следствием лемм 3 и 5.

Лемма 6. Если выполнено условие 2, то для определяемой равенством (9) операторной функции $Z_k(t, s)$ при $t > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^n Z_k(t, s) \right\| \leq t^{1-k} e^{-\Omega_1 t - \Omega |s|} \sum_{j=1}^n \frac{|\theta_{j,n}| M_{k,j} s^{j-2n}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j} > 0. \quad (33)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1 и 2, $u_0 \in D(A^m)$, оператор A при некотором $q \geq 0$ является генератором ОФБ $Y_q(s)$, удовлетворяющей оценке

$$\|Y_q(s)\| \leq \Upsilon e^{\omega s}, \quad s \geq 0, \quad \Upsilon \geq 1, \quad 0 \leq \omega < \Omega, \quad (34)$$

где Ω – постоянная из (31). Тогда задача Дирихле (3), (4) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при $t \rightarrow \infty$, которое представимо в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^n Z_k(t, s) s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 ds,$$

где $Z_k(t, s)$ определена равенством (9), а ОФБ $Y_{2n}(s)$ выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Доказательство. Сходимость определяющего функцию $u(t) = W_k(t)u_0$ интеграла и возможность его дифференцирования обусловлены оценкой (33). Проверим, что эта функция является решением задачи (3), (4).

Также как и при доказательстве теоремы 1 предположим вначале, что $u_0 \in D(A^{m+[n/2]+2})$, $q > 0$ и $\tilde{Y}_0(s)u_0$ определена равенством (18). После интегрирования по частям внеинтегральные слагаемые обратятся в нуль и мы получим

$$\begin{aligned} u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) &= 2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 Z_k(t, s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial Z_k(t, s)}{\partial t} \right) \tilde{Y}_0(s) u_0 ds = \\ &= 2 \int_0^\infty \left((-1)^m B_m \frac{\partial^{2m} Z_k(t, s)}{\partial s^{2m}} - \sum_{n=0}^{m-1} B_n \frac{\partial^{2n} Z_k(t, s)}{\partial s^{2n}} \right) \tilde{Y}_0(s) u_0 ds = \\ &= 2 \int_0^\infty Z_k(t, s) \left((-1)^m B_{2m} \frac{d^{2m} \tilde{Y}_0(s) u_0}{ds^{2m}} - \sum_{n=0}^{m-1} B_n \frac{d^{2n} \tilde{Y}_0(s) u_0}{ds^{2n}} \right) ds = \\ &= 2 \int_0^\infty Z_k(t, s) \left((-1)^m B_m A^m \tilde{Y}_0(s) u_0 - \sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n \tilde{Y}_0(s) u_0 \right) ds = -2P_m(A) \int_0^\infty Z_k(t, s) \tilde{Y}_0(s) u_0 ds = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} P_m(A) \int_0^\infty \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^n Z_k(t, s) s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 ds = -P_m(A) u(t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $W_k(t)u_0$ является решением уравнения (3) на плотном в $D(A^m)$ множестве $D(A^{m+[n/2]+2})$ элементов u_0 . В силу ограниченности в пространстве E операторной функции $W_k(t)$ утверждение будет справедливо и для $u_0 \in D(A^m)$.

Случай $q = 0$ рассматривается аналогично, причём со значительными упрощениями.

Поскольку оценка (33) содержит множитель $\exp(-\Omega_1 t)$, то, очевидно, решение $u(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Остальные утверждения теоремы 3 уже фактически установлены в теореме 1. Теорема доказана.

Замечание. Если в теореме 3 условие 2 не выполнено, то также как и в теореме 1 ОФБ $Y_q(s)$ должна быть равномерно ограниченной. При этом указанное решение задачи Дирихле (3), (4), вообще говоря, не обязано стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Для стремления решения к нулю, также как и в теореме 2, от ОФБ $Y_q(s)$ следует дополнительно потребовать выполнения неравенства (24).

Пример 3. Пусть $E = \mathbb{R}$, параметр $m = 1$, $P_1(A) = B_1A + B_0$, где $B_1 > 0$ (условие параболичности), $A = -A_0^2$, $A_0 \in \mathbb{R}$, и тогда $Y_0(s) = \cos(A_0s)$. Пусть также $B_0 < 0$ (условие эллиптичности многочлена $P_1(A)$), при этом оператор $B = -\mu^2 B_1 - B_0$ для $\mu \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию 2. Тогда, учитывая результаты примера 1, получаем

$$\begin{aligned} Q(t, \sigma) &= \exp(-tB_1\sigma^2 + tB_0), \quad G(t, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t B_1}} \exp\left(-\frac{s^2}{4tB_1} + tB_0\right), \\ Z_k(t, s) &= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\Gamma(1/2 - k/2)\sqrt{\pi B_1}} \int_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau} - \frac{s^2}{4\tau B_1} + \tau B_0\right) d\tau = \\ &= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\Gamma(1/2 - k/2)\sqrt{\pi B_1}} \int_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2 B_1 + s^2}{4\tau B_1} + \tau B_0\right) d\tau = \\ &= \frac{2^{k/2} t^{1-k} (t^2 B_1 + s^2)^{k/4-1/2}}{\Gamma(1/2 - k/2)\sqrt{\pi B_1} (-B_0 B_1)^{k/4-1/2}} K_{1-k/2}\left(\frac{\sqrt{-B_0 B_1 (t^2 B_1 + s^2)}}{B_1}\right), \end{aligned}$$

при этом был использован интеграл 2.3.16.1 из [25].

По формуле (16) запишем стремящееся к нулю при $t \rightarrow \infty$ решение задачи Дирихле (3), (4) для $m = 1$ в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = 2 \int_0^\infty Z_k(t, s) \cos(A_0 s) u_0 ds.$$

4. Весовые граничные задачи в случае $k \geq 1$. Непосредственной проверкой устанавливается следующая

Лемма 7. Если при $k < 1$ функция $v_k(t)$ удовлетворяет задаче Дирихле (3), (4), то при $k > 1$ функция $u(t) = t^{1-k} v_{2-k}(t)$ является ограниченным на бесконечности решением уравнения (3), удовлетворяющим условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{k-1} u(t) = u_0. \quad (35)$$

Из леммы 7 и теоремы 3 вытекает

Теорема 4. Пусть $k > 1$, $u_0 \in D(A^m)$, выполнены условия 1 и 2, оператор A при некотором $q \geq 0$ является генератором ОФБ $Y_q(s)$, удовлетворяющей оценке (34). Тогда весовая задача Дирихле (3), (35) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при $t \rightarrow \infty$, которое представимо в виде

$$u(t) = \frac{(-1)^n \cdot 2t^{1-k}}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_{2-k}(t, s) s^{2n} Y_{2n}(s) u_0 ds,$$

где $Z_{2-k}(t, s)$ определена равенством (9), а ОФБ $Y_{2n}(s)$, $2n \geq q$, выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Как уже было установлено ранее, если выполнено условие 2 и оператор A является генератором операторной косинус-функции $Y_0(s)$, то определяемая равенством (11) полугруппа $U(t; P_m(A))$ будет сжимающей, следовательно, по теореме 5.6 из [1, гл. 1, § 5] оператор

$$P_{1/2}(A) = -\sqrt{-P_m(A)}$$

является генератором сжимающей полугруппы $U_1(t; P_{1/2}(A))$, которая имеет вид

$$U_1(t; P_{1/2}(A)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(t\sqrt{\tau})(\tau I + P_{1/2}(A))^{-1} d\tau.$$

В силу теоремы 4.1 из [27] справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть параметр $k \geq 1$, $u_0 \in D(A^{2m})$, выполнены условия 1 и 2, оператор A является генератором операторной косинус-функции $Y_0(s)$, удовлетворяющей оценке (34). Тогда функция

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(k)} \int_1^{\infty} (\xi^2 - 1)^{k/2-1} U_1(t\xi; P_{1/2}(A)) (-P_{1/2}(A))^{k-1} u_1 d\xi$$

является единственным решением уравнения (3), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^k u'(t) = u_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0. \quad (36)$$

Теорема 5, по сравнению с задачей (3), (35), содержит решение ещё одной весовой граничной задачи при $k > 1$, а также решение задачи (3), (36) при $k = 1$, которое имеет вид

$$u(t) = - \int_1^{\infty} (\xi^2 - 1)^{-1/2} U_1(t\xi; -\sqrt{-P_m(A)}) u_1 d\xi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
2. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, 1989.
3. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. ВИНТИ. Т. 28. 1990. С. 87–202.
4. Мельникова И.В., Филликов А.И. Интегрированные полугруппы и C -полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 6 (300). С. 111–150.
5. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–589.
6. Глушак А.В., Покручин О.А. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
7. Глушак А.В. Семейство операторных функций Бесселя // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Современ. математика и её прил. Темат. обз. Т. 187. ВИНТИ РАН, М., 2020. С. 36–43.
8. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 1. Вып. 2 (42). С. 102–143.
9. Глушак А.В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 583–589.
10. Кононенко В.И., Шмудевич С.Д. Об одном абстрактном параболическом уравнении // Изв. вузов. Математика. 1984. № 4. С. 72–75.
11. Воробьева С.А., Глушак А.В. Абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 706–709.
12. Глушак А.В. О свойствах решений уравнений, содержащих степени неограниченного оператора // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1355–1365.
13. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
14. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современ. математика. Фунд. направления. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.

15. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., 2019.
16. Шишкина Э.Л. Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и гиперболические B -потенциалы // Соврем. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 2. С. 157–338.
17. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1610–1620.
18. Глушак А.В. О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 510–514.
19. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964.
20. Иосида К. Функциональный анализ. М., 1967.
21. Глушак А.В., Шмелевич С.Д. Интегральные представления решений одного сингулярного уравнения, содержащего сумму коммутирующих операторов // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 831–838.
22. Glushak A.V. A family of singular differential equations // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 5. P. 763–771.
23. Koh E.L., Zemanian A.N. The complex Hankel and I -transformations of generalized functions // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. № 5. P. 945–957.
24. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
25. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
26. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
27. Глушак А.В. О связи решений абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с дробными степенями операторного коэффициента уравнения // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 575–590.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (НИУ “БелГУ”)

Поступила в редакцию 09.04.2023 г.

После доработки 09.08.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.