

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51+517.929

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2023 г. Р. И. Кадиев

Исследованы вопросы моментной устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием модифицированным методом регуляризации, основанным на выборе вспомогательного уравнения и применении теории неотрицательно обратимых матриц. Для упомянутых систем получены достаточные условия устойчивости в терминах неотрицательной обратимости матриц, построенных по параметрам этих систем. Проверена выполнимость этих условий для конкретных классов систем линейных уравнений Ито с последствием.

DOI: 10.31857/S0374064123100023, EDN: OOKKIZ

Введение. Стохастические дифференциальные уравнения описывают многие реальные практически важные процессы современной физики, биологии, иммунологии, экономики, кибернетики и т.д. Изучение таких процессов привело к необходимости исследований вопросов устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, т.е. к созданию соответствующего направления в теории устойчивости.

Математические модели многих реальных процессов, учитывающие состояния не только в текущий, но и в предшествующие моменты времени, описывают развитие процессов более точно. В этом случае поведение процесса, подверженного случайным воздействиям, описывается стохастическими дифференциальными уравнениями с последствием. Примеры показывают, что поведение решений уравнений без учёта запаздывания, даже при малой его величине, может существенно отличаться от поведения решений тех же уравнений с запаздывающим аргументом. Это обстоятельство подчёркивает необходимость и принципиальную важность изучения уравнений с запаздываниями.

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных математиков. Достаточно полный их список приведён в монографиях [1–4]. Исследования устойчивости в этих и многих других работах проводятся методом функционалов Ляпунова–Красовского–Разумихина. Этот метод предполагает существование подходящей функции Ляпунова (функционала Ляпунова–Красовского), которая обеспечивает желаемое свойство устойчивости (асимптотического поведения) решений исследуемых уравнений. Однако, как отмечается в монографии [5], применение этого метода для функционально-дифференциальных уравнений, частным случаем которых являются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, во многих случаях встречает серьёзные трудности. В теории устойчивости решений для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений широкое применение и высокую эффективность показал метод регуляризации, основанный на выборе вспомогательных или “модельных” уравнений – “ W -метод” Н.В. Азбелева [5].

Исследованиям проблем устойчивости по части переменных решений для детерминированных динамических систем и их приложениям посвящено много работ, обширный перечень которых можно найти в [6]. В статьях [7–10] методом вспомогательных или “модельных” уравнений исследованы вопросы устойчивости по части переменных для стохастических функционально-дифференциальных уравнений. В работах [11, 12] исследованы вопросы частичной устойчивости нелинейных стохастических систем методом функций Ляпунова. Главной целью настоящего исследования является развитие метода вспомогательных уравнений на основе теории неотрицательно обратимых матриц и покомпонентных оценок решений применительно

к исследованию вопросов моментной устойчивости решений по части переменных для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием относительно начальных данных. Этот подход ранее показал свою эффективность при исследовании вопросов устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием [13, 14] и, как будет показано в статье, позволяет получить новые конструктивные результаты устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для детерминированных и стохастических систем с запаздыванием и без него.

1. Постановка задачи исследования. Будем использовать следующие обозначения: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ – стохастический базис, здесь Ω – множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ – σ -алгебра событий на Ω , $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ – непрерывный справа неубывающий поток σ -подалгебр алгебры $\mathcal{F}$, P – вероятностная мера на $\mathcal{F}$ (все σ -алгебры являются полными относительно этой меры); k^n – линейное пространство n -мерных $\mathcal{F}_0$ -измеримых случайных величин; $\mathcal{B}_i$, $i = \overline{2, m}$, – скалярные независимые стандартные винеровские процессы; E – символ математического ожидания; $\bar{E}$ – единичная $k \times k$ -матрица; $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{R}^n$; $\|\cdot\|$ – норма $k \times n$ -матрицы, согласованная с нормой в $\mathbb{R}^n$; μ – мера Лебега на $[0, \infty)$.

В статье используются следующие константы: $n \in \mathbb{N}$ – размерность фазового пространства уравнения, т.е. размер вектора решения уравнения; p – фиксированная вещественная константа, $1 \leq p < \infty$; q – фиксированная вещественная константа, $1 \leq q < \infty$; l – фиксированное натуральное число такое, что $1 \leq l < n$.

Исследуем вопросы моментной устойчивости решений по части переменным для системы линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями вида

$$dx(t) = - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t)) dt + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t)) d\mathcal{B}_i(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

относительно начальных данных

$$x(t) = \varphi(t), \quad t < 0, \quad (1a)$$

$$x(0) = v, \quad (1b)$$

где:

- 1) $x = \text{col}(x^1, \dots, x^n)$ – n -мерный неизвестный случайный процесс;
- 2) $A_{ij} = (a_{sl}^{ij})_{s,l=1}^n$ – $n \times n$ -матрица при $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m_i}$, элементами матриц A_{1j} , $j = \overline{1, m_1}$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых почти наверно (п.н.) локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij} , $i = \overline{2, m}$, $j = \overline{1, m_i}$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п.н. локально суммируемы с квадратом;
- 3) h_{ij} – измеримая по Борелю функция, заданная на множестве $[0, \infty)$, такая, что $h_{ij}(t) \leq t$, $t \in [0, \infty)$, μ -почти всюду при $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m_i}$;
- 4) $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – $\mathcal{F}_0$ -измеримый n -мерный случайный процесс, заданный на полуоси $(-\infty, 0)$;
- 5) $v = \text{col}(v_1, \dots, v_n)$ – $\mathcal{F}_0$ -измеримая n -мерная случайная величина, т.е. $v \in k^n$.

Определение 1. Под решением системы (1), удовлетворяющим начальным условиям (1a) и (1b), понимается случайный процесс

$$x(t) = \text{col}(x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

прогрессивно измеримый при $t \geq 0$, удовлетворяющий условиям $x(\varsigma) = \varphi(\varsigma)$, $\varsigma < 0$, $x(0) = v$ и системе

$$x(t) = v - \sum_{j=1}^{m_1} \int_0^t A_{1j}(\varsigma)x(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t A_{ij}(\varsigma)x(h_{ij}(\varsigma)) d\mathcal{B}_i(\varsigma), \quad t \geq 0,$$

P -почти всюду, где первый интеграл – интеграл Лебега, а второй – интеграл Ито.

Систему (1) с условиями (1a) и (1b) называют *начальной задачей*, а условия (1a), (1b) – *начальными условиями*. Если $h_{ij}(t) = t$, $t \geq 0$, μ -почти всюду при $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m_i}$, то условие (1a) лишнее. В этом случае (1), (1b) называют *задачей Коши* для системы линейных дифференциальных уравнений Ито.

Пусть в дальнейшем D^n – линейное пространство n -мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0, \infty)$, траектории которых п.н. непрерывны; L^n – линейное пространство n -мерных случайных процессов на $(-\infty, 0)$, которые не зависят от винеровских процессов $\mathcal{B}_i$, $i = \overline{2, m}$, и имеют п.н. ограниченные в существенном траектории; $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ – положительная непрерывная функция.

Отметим, что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение [15]. Обозначим через $x(t, v, \varphi)$, $t \in (-\infty, \infty)$, решение системы (1), удовлетворяющее условиям (1a) и (1b), т.е. $x(t, v, \varphi) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $x(0, v, \varphi) = v$. Очевидно, что при $t \geq 0$ имеем $x(\cdot, v, \varphi) \in D^n$. Заметим также, что при нулевых начальных условиях (1a), (1b) задача (1), (1a), (1b) имеет только тривиальное решение.

Для любого $x = \text{col}(x^1, \dots, x^n)$ введём обозначения

$$y = \text{col}(x^1, \dots, x^l) \quad \text{и} \quad \xi = \text{col}(x^{l+1}, \dots, x^n).$$

Введём также обозначения для следующих линейных нормированных подпространств пространств D^l , k^n , L^n :

$$M_q^\gamma = \{x : x \in D^l, \quad \|x\|_{M_q^\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \geq 0} (E|\gamma(t)x(t)|^q)^{1/q} < \infty\}, \quad M_q^1 = M_q;$$

$$k_q^n = \{\alpha : \alpha \in k^n, \quad \|\alpha\|_{k_q^n} \stackrel{\text{def}}{=} (E|\alpha|^q)^{1/q} < \infty\};$$

$$L_q^n = \{\varphi : \varphi \in L^n, \quad \|\varphi\|_{L_q^n} \stackrel{\text{def}}{=} \text{vraisup}_{\varsigma < 0} (E|\varphi(\varsigma)|^q)^{1/q} < \infty\}.$$

Определение 2. Тривиальное решение $x(t, 0, 0) \equiv 0$ системы (1) (или систему (1)) назовём:

– *q -устойчивым* относительно первых l компонент, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любых $v \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и $\|v\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство

$$(E|y(t, v, \varphi)|^q)^{1/q} \leq \varepsilon, \quad t \geq 0;$$

– *асимптотически q -устойчивым* относительно первых l компонент, если оно q -устойчиво и, кроме того, для любых $v \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и $\|v\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\varepsilon)$ будет

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (E|y(t, v, \varphi)|^q)^{1/q} = 0;$$

– *экспоненциально q -устойчивым* относительно первых l компонент, если существуют некоторые положительные числа $\bar{c}$, β такие, что для любых $v \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ справедливо неравенство

$$(E|y(t, v, \varphi)|^q)^{1/q} \leq \bar{c}(\|v\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \exp\{-\beta t\}, \quad t \geq 0.$$

Следующее определение объединяет все виды устойчивости из определения 2.

Определение 3. Систему (1) назовём *$M_q^\gamma y$ -устойчивой*, если для любых $v \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ для решения задачи (1), (1a), (1b) $x(t, v, \varphi)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, выполняются соотношение $y(\cdot, v, \varphi)|_{[0, \infty)} \in M_q^\gamma$ и неравенство

$$\|y(\cdot, v, \varphi)|_{[0, \infty)}\|_{M_q^\gamma} \leq \bar{c}(\|v\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \quad (2)$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$.

Очевидно, что:

- из $M_q y$ -устойчивости системы (1) следует q -устойчивость этой же системы относительно первых l компонент;
- из $M_q^\gamma y$ -устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) \geq \delta > 0$, $t \geq 0$, и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = +\infty$) следует асимптотическая q -устойчивость этой же системы относительно первых l компонент;
- из $M_q^\gamma y$ -устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, β – некоторое положительное число) следует экспоненциальная q -устойчивость этой же системы относительно первых l компонент.

Для установления $M_q^\gamma y$ -устойчивости системы (1) необходимо проверить принадлежность вектора $y(\cdot, v, \varphi)|_{[0, \infty)}$, составленного из первых l компонент решения задачи (1), (1a), (1b) $x(t, v, \varphi)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, пространству M_q^γ при любых $v \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и выполнимость для него неравенства (2). Для этого будет использована модификация метода вспомогательных или модельных уравнений, известная также как W -метод [5], основанный на теории положительно обратимых матриц и покомпонентных оценках решений.

2. Метод исследования. Как было отмечено ранее, устойчивость системы (1) относительно первых l компонент будем проверять преобразованием этой системы с помощью вспомогательной (модельной) системы в другую, более простую систему, для которой условия, обеспечивающие устойчивость системы (1) относительно первых l компонент, можно проверить непосредственно.

В дальнейшем будем пользоваться следующим представлением для решения задачи (1), (1a), (1b): $x(t) = \bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t)$, где $\bar{x}(t)$ – неизвестный n -мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{x}(t) = 0$ при $t < 0$ и $\bar{x}(t) = x(t)$ при $t \geq 0$, а $\bar{\varphi}(t)$ – известный n -мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $\bar{\varphi}(t) = 0$ при $t \geq 0$. Тогда задача (1), (1a), (1b) эквивалентна следующей задаче:

$$d\bar{x}(t) = ((V\bar{x})(t) + f(t)) dZ(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\bar{x}(0) = v, \quad (3b)$$

где

$$\begin{aligned} (V\bar{x})(t) &= \left(-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)\bar{x}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} A_{2j}(t)\bar{x}(h_{2j}(t)), \dots, \sum_{j=1}^{m_m} A_{mj}(t)\bar{x}(h_{mj}(t)) \right), \\ f(t) &= \left(-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)\bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} A_{2j}(t)\bar{\varphi}(h_{2j}(t)), \dots, \sum_{j=1}^{m_m} A_{mj}(t)\bar{\varphi}(h_{mj}(t)) \right), \\ Z(t) &= \text{col}(t, \mathcal{B}_2(t), \dots, \mathcal{B}_m(t)). \end{aligned}$$

Замечание 1. Аналог уравнения (3) в детерминированном случае является частным случаем функционально-дифференциального уравнения (см. [5]), которое записывается с использованием линейных операторов внутренней суперпозиции.

Решение задачи (3), (3b) обозначим через $\bar{x}(t, v, \varphi)$. Очевидно, что при $t \geq 0$ имеем $x(t, v, \varphi) = \bar{x}(t, v, \varphi)$.

Пусть:

- $I^n(Z)$ – линейное пространство $n \times m$ -матриц на $[0, +\infty)$, строки которых – m -мерные прогрессивно измеримые случайные процессы, локально интегрируемые по Z ;
- $\bar{D}^n$ – линейное пространство n -мерных случайных процессов на $(-\infty, +\infty)$, равных нулю при $t < 0$, прогрессивно измеримых при $t \geq 0$ и имеющих п.н. непрерывные траектории на $[0, \infty)$;
- $\bar{M}_q^\gamma = \{x : x \in \bar{D}^l, \|x\|_{\bar{M}_q^\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in (-\infty, \infty)} (E|\gamma(t)x(t)|^q)^{1/q} < \infty\}$, $\bar{M}_q^1 = \bar{M}_q$.

Очевидно, что для уравнения (3) V – линейный оператор, действующий из пространства $\bar{D}^n$ в пространство $I^n(Z)$ и $f \in I^n(Z)$.

Справедлива следующая

Лемма. При любых $v \in k^n$, $\varphi \in L^n$ для решения $\bar{x}(t, v, \varphi)$ задачи (3), (3b) имеет место представление

$$\bar{x}(t, v, \varphi) = X(t)v + (\hat{C}f)(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где $X(t)$ – $n \times n$ -матрица, столбцами которой являются решения однородного уравнения (3) (т.е. в случае $f \equiv 0$) (фундаментальная матрица), $X(0) = \bar{E}$, а $\hat{C} : I^n(Z) \rightarrow D^n$ – линейный оператор (оператор Коши) такой, что $\hat{C}f$ – решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $(\hat{C}f)(0) = 0$.

Справедливость леммы следует из аналогичного утверждения для более общего уравнения, доказанного в работе [16].

Замечание 2. Формула (4) имеет место для решения задачи (3), (3b) и в случае любой функции $f \in I^n(Z)$. Кроме того, из леммы также следует, что при любых $v \in k^n$, $\varphi \in L^n$ для решения $x(t, v, \varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) при $t \geq 0$ имеет место представление (4), где f определена в уравнении (3).

Представление (4) является центральным результатом в теории устойчивости решений уравнения (1). В силу этого представления асимптотические свойства решений системы (1), в том числе и компонент решений системы (1), определяются фундаментальной матрицей и оператором Коши для уравнения (3).

В дальнейшем если B – $n \times n$ -матрица, то B^1 – $l \times l$ -матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием $n - l$ последних столбцов и строк, B^2 – $l \times (n - l)$ -матрица, полученная из B зачёркиванием l первых столбцов и $n - l$ последних строк, B^3 – $(n - l) \times l$ -матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием первых l строк и $n - l$ последних столбцов, B^4 – $(n - l) \times (n - l)$ -матрица, полученная из B зачёркиванием l первых строк и столбцов, B^5 – $l \times n$ -матрица, полученная из B зачёркиванием $n - l$ последних строк, B^6 – $(n - l) \times n$ -матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием l первых строк. Тогда с учётом этих обозначений и так как $\bar{x} = \text{col}(\bar{y}, \bar{\xi})$, в силу введённых ранее обозначений, уравнение (3) можно записать в виде следующей системы:

$$d\bar{y}(t) = [(V_1\bar{y})(t) + (V_2\bar{\xi})(t) + f^y(t)] dZ(t), \quad d\bar{\xi}(t) = [(V_3\bar{y})(t) + (V_4\bar{\xi})(t) + f^\xi(t)] dZ(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где

$$(V_i\bar{y})(t) = \left(-\sum_{j=1}^{m_1} (A_{1j}(t))^i \bar{y}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} (A_{2j}(t))^i \bar{y}(h_{2j}(t)), \dots, \sum_{j=1}^{m_m} (A_{mj}(t))^i \bar{y}(h_{mj}(t)) \right), \quad i = 1, 3,$$

$$(V_i\bar{\xi})(t) = \left(-\sum_{j=1}^{m_1} (A_{1j}(t))^i \bar{\xi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} (A_{2j}(t))^i \bar{\xi}(h_{2j}(t)), \dots, \sum_{j=1}^{m_m} (A_{mj}(t))^i \bar{\xi}(h_{mj}(t)) \right), \quad i = 2, 4,$$

$$f^y(t)(t) = \left(-\sum_{j=1}^{m_1} (A_{1j}(t))^5 \bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} (A_{2j}(t))^5 \bar{\varphi}(h_{2j}(t)), \dots, \sum_{j=1}^{m_m} (A_{mj}(t))^5 \bar{\varphi}(h_{mj}(t)) \right),$$

$$f^\xi(t)(t) = \left(-\sum_{j=1}^{m_1} (A_{1j}(t))^6 \bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} (A_{2j}(t))^6 \bar{\varphi}(h_{2j}(t)), \dots, \sum_{j=1}^{m_m} (A_{mj}(t))^6 \bar{\varphi}(h_{mj}(t)) \right).$$

В дальнейшем если $\zeta(t)$ – случайный процесс на промежутке $[0, \infty)$, то $\bar{\zeta}(t)$ также является случайным процессом на $(-\infty, \infty)$, значения которого совпадают с значениями процесса $\zeta(t)$ на $[0, \infty)$ и с нулём на $(-\infty, 0)$.

Как как через любое $\bar{x}(0) \in k^n$ проходит единственное решение уравнения (3), каждое из уравнений системы (5) в отдельности будет иметь единственное решение при любых фиксированных $\bar{y}(0)$, $\bar{\xi}$ и $\bar{\xi}(0)$, $\bar{y}$ соответственно. Тогда в силу леммы второе уравнение системы (5) эквивалентно уравнению

$$\bar{\xi}(t) = H(t)\bar{\xi}(0) + (C_1(f^\xi + V_3\bar{y}))(t), \quad t \geq 0,$$

где H – фундаментальная матрица, а C_1 – оператор Коши для второго уравнения системы (5). Следовательно, из первого уравнения системы (5) получим

$$d\bar{y}(t) = [(V_5\bar{y})(t) + (V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (V_2\bar{C}_1f^\xi)(t) + f^y(t)] dZ(t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где $(V_5\bar{y})(t) = (V_1\bar{y})(t) + (V_2\bar{C}_1V_3\bar{y})(t)$.

Отсюда следует, что система (1) M_q^γ -устойчива тогда и только тогда, когда при любых $\bar{x}(0) = v \in k_q^n$ и $\varphi \in L_q^n$ для решения $\bar{y}(t, v, \varphi)$ уравнения (6) выполняются соотношение $\bar{y}(\cdot, v, \varphi) \in \bar{M}_q^\gamma$ и неравенство

$$\|\bar{y}(\cdot, v, \varphi)\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leq \bar{c}(\|v\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \quad (7)$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$.

Для установления отмеченных фактов воспользуемся W -преобразованием, т.е. эквивалентным преобразованием уравнения (6). Для описания W -преобразования уравнения (6) рассмотрим модельное уравнение, асимптотические свойства решений которого известны. Пусть модельное уравнение имеет вид

$$d\bar{y}(t) = [(Q\bar{y})(t) + g(t)] dZ(t), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

где $Q: \bar{D}^l \rightarrow I^l(Z)$ – линейный оператор, Z определён ранее, $g \in I^l(Z)$. Предполагается, что через любое значение $\bar{y}(0) \in k^l$ проходит единственное (с точностью до P -эквивалентности) решение $\bar{y}$ уравнения (8). Тогда, в силу леммы, для решения $\bar{y}$ этого уравнения имеет место представление

$$\bar{y}(t) = U(t)\bar{y}(0) + (Wg)(t), \quad t \geq 0,$$

где U – фундаментальная матрица, W – оператор Коши для уравнения (8).

Уравнение (6) при помощи модельного уравнения (8) запишем в виде

$$d\bar{y}(t) = [(Q\bar{y})(t) + ((V_5 - Q)\bar{y})(t) + (V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (V_2\bar{C}_1f^\xi)(t) + f^y(t)] dZ(t), \quad t \geq 0,$$

или

$$\bar{y}(t) = U(t)\bar{y}(0) + (W(V_5 - Q)\bar{y})(t) + (WV_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (W(V_2\bar{C}_1f^\xi + f^y))(t), \quad t \geq 0.$$

Обозначив $W(V_5 - Q) = \Theta$, получим

$$((I - \Theta)\bar{y})(t) = U(t)\bar{y}(0) + (WV_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (W(V_2\bar{C}_1f^\xi + f^y))(t), \quad t \geq 0.$$

Теорема 1. Пусть $\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1f^\xi + f^y) \in \bar{M}_q^\gamma$ для любых $\bar{x}(0) \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и выполняется неравенство

$$\|\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1f^\xi + f^y)\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leq \bar{c}(\|\bar{x}(0)\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$, а оператор Θ действует в пространстве $\bar{M}_q^\gamma$. Тогда если оператор $(I - \Theta): \bar{M}_q^\gamma \rightarrow \bar{M}_q^\gamma$ непрерывно обратим, то система (1) M_q^γ -устойчива.

Доказательство. Ввиду непрерывной обратимости оператора $(I - \Theta): \bar{M}_q^\gamma \rightarrow \bar{M}_q^\gamma$ уравнение $(I - \Theta)\bar{y} = g$, где $g \in \bar{M}_q^\gamma$, имеет единственное решение из $\bar{M}_q^\gamma$, т.е. $\bar{y} = (I - \Theta)^{-1}g \in \bar{M}_q^\gamma$ и $\|\bar{y}\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leq \|(I - \Theta)^{-1}\|_{\bar{M}_q^\gamma} \|g\|_{\bar{M}_q^\gamma}$. Отсюда и из условий теоремы получим, что

$$(I - \Theta)^{-1}(\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1f^\xi + f^y)) \in \bar{M}_q^\gamma$$

для любых $\bar{x}(0) \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и справедливо неравенство

$$\|(I - \Theta)^{-1}(\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1f^\xi + f^y))\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leq \bar{c}(\|\bar{x}(0)\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$. Но, с другой стороны,

$$\bar{y}(\cdot, \bar{x}(0), \varphi) = (I - \Theta)^{-1}(\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0))) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1f^\xi + f^y).$$

Следовательно, $\bar{y}(\cdot, \bar{x}(0), \varphi) \in \bar{M}_q^\gamma$ для любых $\bar{x}(0) \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и для него выполнено неравенство (7), а это и означает $\bar{M}_q^\gamma$ -устойчивость системы (1). Теорема доказана.

Теорему 1 можно использовать для получения достаточных условий устойчивости системы (1) по части переменных в терминах параметров этой системы, как это делается в классической версии W -метода [7–10]. Однако, как показано в статьях [13, 14], такие условия получаются более точными, если использовать покомпонентные оценки решений. Поэтому ниже предлагается улучшенный метод регуляризации для исследования вопросов устойчивости по части переменных для системы (1).

Определение 4. Обратимая матрица $\Phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^m$ называется *неотрицательно обратной*, если все элементы матрицы Φ^{-1} неотрицательны.

Согласно [17, с. 338] матрица Φ неотрицательно обратима, если $\phi_{ij} \leq 0$ при $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, и выполнено одно из следующих условий:

- все диагональные миноры матрицы Φ положительны;
- существуют $\varsigma_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, такие, что

$$\varsigma_i \phi_{ii} > \sum_{j=1}^m \varsigma_j |\phi_{ij}|, \quad i = \overline{1, m};$$

- существуют $\varsigma_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, такие, что

$$\varsigma_j \phi_{jj} > \sum_{i=1}^m \varsigma_i |\phi_{ij}|, \quad j = \overline{1, m}.$$

В частности, если положить $\varsigma_i = 1$, $i = \overline{1, m}$, то мы получим класс матриц со строгим диагональным преобладанием и неположительными внедиагональными элементами.

Для случайного процесса $\bar{y}(t) = \text{col}(\bar{y}^1(t), \dots, \bar{y}^l(t))$ введём обозначение

$$\bar{y}^\gamma(q) = \text{col}(\bar{y}^{1\gamma}(q), \dots, \bar{y}^{l\gamma}(q)),$$

где $\bar{y}^{i\gamma}(q) = \sup_{t \geq 0} (E|\gamma(t)\bar{y}^i(t)|^q)^{1/q}$ при $i = \overline{1, l}$.

Пусть при некоторых $1 \leq q < \infty$ и положительной непрерывной функции $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ для решения $\bar{y}(t, v, \varphi) = \bar{y}(t)$ системы (6) нам удалось получить матричное неравенство следующего вида:

$$\bar{E}\bar{y}^\gamma(q) \leq C\bar{y}^\gamma(q) + \bar{c}\|v\|_{k_q^n} + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n}, \quad (9)$$

где C – некоторая неотрицательная матрица размерности $l \times l$, а $\bar{c}$ и $\hat{c}$ – некоторые l -мерные вектор-столбцы, элементы которых неотрицательные числа. Тогда справедлива следующая

Теорема 2. Пусть в матричном неравенстве (9) матрица $\bar{E} - C$ является неотрицательно обратной. Тогда система (1) $\bar{M}_q^\gamma$ -устойчива.

Доказательство. Пользуясь неотрицательной обратимостью матрицы $\bar{E} - C$, запишем неравенство (9) в следующем виде:

$$\bar{E}\bar{y}^\gamma(q) \leq (\bar{E} - C)^{-1}(\bar{c}\|v\|_{k_q^n} + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n}),$$

откуда получим

$$|\bar{y}^\gamma(q)| \leq c(\|v\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}), \quad (10)$$

где $c = \|(\bar{E} - C)^{-1}\| \max\{|\bar{c}|, |\hat{c}|\}$. Поскольку $\bar{y}(t, v, \varphi) = \bar{y}(t)$ при $t \geq 0$ и $\|\bar{y}(\cdot, v, \varphi)\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leq |\bar{y}^\gamma(q)|$, то из неравенства (10) следует, что при любых $v \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ для решений $\bar{y}(t, v, \varphi)$ ($t \in (-\infty, \infty)$) задачи (3), (3b) выполняются соотношения $\bar{y}(\cdot, v, \varphi) \in \bar{M}_q^\gamma$ и неравенство

$$\|\bar{y}(\cdot, v, \varphi)\|_{\bar{M}_q^\gamma} \leq c(\|v\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}),$$

где c – некоторое положительное число. Следовательно, система (1) $M_q^\gamma y$ -устойчива. Теорема доказана.

На основе теоремы 2 в п. 3 будут получены достаточные условия экспоненциальной моментной устойчивости системы (1) по части компонент относительно начальных данных в терминах параметров этой системы.

3. Экспоненциальная устойчивость. Как было отмечено в п. 2, из $M_q^\gamma y$ -устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, β – некоторое положительное число) следует экспоненциальная q -устойчивость этой же системы относительно первых l компонент. Также было указано, что система (1) $M_q^\gamma y$ -устойчива тогда и только тогда, когда при любых $\bar{x}(0) = v \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ решение $\bar{y}(\cdot, v, \varphi)$ уравнения (6) принадлежит пространству $\bar{M}_q^\gamma$ и для него выполнено неравенство (7).

В дальнейшем будем считать: $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, где β – некоторое нефиксированное положительное число; $q = 2p$; f^{si} , $s = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$, – компоненты функции $f \in I^l(Z)$.

Примеры показывают, что экспоненциальная устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений с последействием по начальным данным наблюдается, как правило, только в случае ограниченного последействия. Поэтому $M_q^\gamma y$ -устойчивость системы (1) будет изучена при дополнительных ограничениях на параметры этой системы.

Предположим, что для системы (1) также выполнено:

– существуют неотрицательные числа τ_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m_i}$, такие, что

$$0 \leq t - h_{ij}(t) \leq \tau_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m_i}, \quad t \geq 0,$$

μ -почти всюду;

– существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1, \dots, m_1\}$, $s = \overline{1, l}$, положительные числа λ_s , $s = \overline{1, l}$, и неотрицательные числа $\bar{a}_{si}^j$, $j = \overline{1, m_1}$, $s, i = \overline{1, l}$, такие, что

$$\sum_{j \in I_s} a_{ss}^{1j}(t) \geq \lambda_s, \quad s = \overline{1, l}, \quad |a_{si}^{1j}(t)| \leq \bar{a}_{si}^j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad s, i = \overline{1, l}, \quad t \geq 0,$$

$P \times \mu$ -почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{si}^j(\beta)$, $d_{s\nu}^j(\beta)$, $s, j = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$, $\nu = \overline{2, m}$, такие, что для любых $u = \text{col}(u^1, \dots, u^l) \in \bar{D}^l$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$ имеют место неравенства

$$\text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2 \bar{C}_1 V_3 u)(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leq \sum_{j=1}^l b_{si}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geq 0} (E|\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)},$$

$$\text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_1 u)(\varsigma))^{s\nu}|^{2p})^{1/(2p)} \leq \sum_{j=1}^l d_{s\nu}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geq 0} (E|\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}$$

при $s = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$, $\nu = \overline{2, m}$;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{si}(\beta)$, $\bar{b}_{si}(\beta)$, $\hat{b}_{si}(\beta)$, $s = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$, такие, что для любых $\varphi \in L_{2p}^n$, $\bar{x}(0) \in k_{2p}^n$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$ выполняются неравенства

$$\text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2 \bar{C}_1 f^h)(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leq b_{si}(\beta) \|\varphi\|_{L_{2p}^n},$$

$$\text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} (E|\gamma(\varsigma)(f^y(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leq \bar{b}_{si}(\beta) \|\varphi\|_{L_{2p}^n},$$

$$\sup_{\varsigma \geq 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2(\bar{H}\bar{h}(0)))(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leq \hat{b}_{si}(\beta) \|\bar{x}(0)\|_{k_{2p}^n}$$

при $s = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$.

В дальнейшем нам также понадобятся следующие соотношения:

$$\left(E \left| \int_0^t f(\varsigma) d\mathcal{B}(\varsigma) \right|^2\right)^{1/(2p)} \leq c_p \left(E \left(\int_0^t |f(\varsigma)|^2 d\varsigma \right)^p\right)^{1/(2p)}, \quad (11)$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(\varsigma) \hat{f}(\varsigma) d\varsigma \right|^2\right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t |g(\varsigma)| d\varsigma \right) \sup_{\varsigma \geq 0} (E |\hat{f}(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}, \quad (12)$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(\varsigma)^2 \hat{f}(\varsigma)^2 d\varsigma \right|^p\right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t g(\varsigma)^2 d\varsigma \right)^{1/2} \sup_{\varsigma \geq 0} (E |\hat{f}(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}, \quad (13)$$

где $f(\varsigma)$ – скалярный прогрессивно измеримый случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $\mathcal{B}(\varsigma)$ на $[0, t]$; c_p – некоторое число, зависящее от $p \geq 1$, но не зависящее от $f(\varsigma)$ и t ; $g(\varsigma)$ – скалярная функция на $[0, \infty)$, квадрат которой локально суммируем; $\hat{f}(\varsigma)$ – скалярный случайный процесс такой, что

$$\sup_{\varsigma \geq 0} (E |\hat{f}(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)} < \infty.$$

Неравенства (12) и (13) доказаны в работе [18], а справедливость неравенства (11) следует из неравенства (4) монографии [19, с. 65]. Оценки на константу c_p также можно найти в монографии [19], где $c_p = 2\sqrt{12}p$, однако они не всегда оптимальны. Например, для $p = 1$ в (11) можно взять $c_p = 1$.

Условия устойчивости, приведённые ниже в теореме 3, основном результате этого пункта, сформулированы в терминах $l \times l$ -матрицы C , элементы которой вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{ss} &= \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \left(\tau_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^i \gamma(\tau_{1i}) + b_{s1}^s(0) \right) + c_p \sqrt{\tau_{1j}} \sum_{i=2}^m (d_{si}^s(0) + b_{si}^s(0)) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in 1, \dots, m_1/I_s} \bar{a}_{ss}^j + b_{s1}^s(0) \right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}} \sum_{i=2}^m (b_{si}^s(0) + d_{si}^s(0)), \quad s = \overline{1, l}, \\ c_{s\nu} &= \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \left(\tau_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}_{s\nu}^i + b_{s1}^\nu(0) \right) + c_p \sqrt{\tau_{1j}} \sum_{i=2}^m (d_{si}^\nu(0) + b_{si}^\nu(0)) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{s\nu}^j + b_{s1}^\nu(0) \right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}} \sum_{i=2}^m (b_{si}^\nu(0) + d_{si}^\nu(0)), \quad s, \nu = \overline{1, l}, \quad s \neq \nu. \end{aligned}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar{E} - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет M_{2p}^γ -устойчивой при $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$ для некоторого $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2, где $q = 2p$, а $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, $t \geq 0$, $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$.

В качестве вспомогательного уравнения (8) возьмём систему

$$d\bar{y}(t) = (-B(t)\bar{y}(t) + g_1(t)) dt + \sum_{i=2}^m g_i(t) d\mathcal{B}_i(t), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где $B(t)$ – диагональная матрица размерности $l \times l$ с диагональными элементами $\sum_{j \in I_s} a_{ss}^j(t)$, $s = \overline{1, l}$, а $g_1(t)$, $g_i(t)$, $i = \overline{2, m}$, – l -мерные прогрессивно измеримые случайные процессы на $[0, \infty)$ с п.н. локально суммируемыми и локально суммируемыми с квадратом траекториями соответственно. В этом случае для решения $\bar{y}(t)$ уравнения (14) имеет место представление

$$\bar{y}(t) = U(t, 0)\bar{y}(0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t U(t, \varsigma) g(\varsigma) dZ(\varsigma), \quad t \geq 0,$$

где $U(t, \varsigma)$, $t \geq 0$, $0 \leq \varsigma \leq t$, – диагональная матрица с диагональными элементами

$$\hat{y}_s(t, \varsigma) = \exp \left\{ - \int_{\varsigma}^t \sum_{j \in I_s} a_{ss}^j(\varsigma) d\varsigma \right\}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varsigma \leq t, \quad s = \overline{1, l},$$

g – $l \times l$ -матрица, столбцами которой являются случайные процессы g_i , $i = \overline{1, m}$, соответственно. Тогда систему (6) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \bar{y}^s(t) = & \hat{y}_s(t, 0)\bar{y}^s(0) + \sum_{j \in I_s} \int_0^t \hat{y}_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1j}(\varsigma) \int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar{y}^s(\zeta) - \sum_{j \in \{1, \dots, m_1\}/I_s} \int_0^t \hat{y}_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1j}(\varsigma) \bar{y}^s(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma - \\ & - \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq s}}^l \int_0^t \hat{y}_s(t, \varsigma) a_{s\nu}^{1j}(\varsigma) \bar{y}^\nu(h_{1j}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{i=2}^m \int_0^t \hat{y}_s(t, \varsigma) ((V_1 \bar{y})(\varsigma))^{si} d\mathcal{B}_i(\varsigma) + \\ & + \int_0^t \hat{y}_s(t, \varsigma) (G(\varsigma))^{s1} d\varsigma + \sum_{i=2}^m \int_0^t \hat{y}_s(t, \varsigma) (G(\varsigma))^{si} d\mathcal{B}_i(\varsigma), \quad s = \overline{1, l}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$(G(\varsigma))^{si} = ((V_2 \bar{C}_1 V_3 \bar{y})(\varsigma))^{si} + ((V_2 (\bar{H} \bar{\xi}(0)))(\varsigma))^{si} + ((V_2 \bar{C}_1 f^\xi)(\varsigma))^{si} + (f^y(\varsigma))^{si}, \quad s = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Учитывая обозначение $\bar{y}^{s\gamma}(2p)$, использованное в теореме 2, неравенства (11)–(13), предположения относительно системы (1), соотношения (15), равенства

$$\begin{aligned} d\bar{y}^s(\zeta) = & - \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^l a_{s\nu}^{1i}(\zeta) \bar{y}^\nu(h_{1i}(\zeta)) d\zeta + \sum_{i=2}^m ((V_1 \bar{y})(\zeta))^{si} d\mathcal{B}_i(\zeta) + \\ & + (G(\zeta))^{s1} d\zeta + \sum_{i=2}^m (G(\zeta))^{si} d\mathcal{B}_i(\zeta), \quad s = \overline{1, l}, \end{aligned}$$

которые имеют место в силу системы (6), а также для $\beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, n}\}$ очевидные оценки

$$(E|v_s|^{2p})^{1/(2p)} \leq \|v\|_{k_{2p}^n} \quad \text{при} \quad s = \overline{1, n},$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t \hat{y}_s(t, \varsigma) \gamma(t) \gamma(\varsigma)^{-1} d\varsigma \leq \frac{1}{\lambda_s - \beta} \quad \text{при} \quad s = \overline{1, l},$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t (\hat{y}_s(t, \varsigma) \gamma(t) \gamma(\varsigma)^{-1})^2 d\varsigma \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2(\lambda_s - \beta)}} \quad \text{при} \quad s = \overline{1, l},$$

$$\gamma(t)\gamma(\bar{h}_{ij}(t))^{-1} \leq \gamma(\tau_{ij}), \quad t \geq 0, \quad \text{при } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m_i},$$

$$\sup_{\varsigma \geq 0} \left(\gamma(\varsigma) \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} \gamma(\zeta)^{-1} d\zeta \right) \leq \gamma(\tau_{1j})\tau_{1j} \quad \text{при } j = \overline{1, m_1},$$

$$\sup_{\varsigma \geq 0} \left(\gamma(\varsigma) \left(\int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} \gamma(\zeta)^{-2} d\zeta \right)^{1/2} \right) \leq \gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}} \quad \text{при } j = \overline{1, m_1},$$

для решения $\bar{y}(t, v, \varphi) = \bar{y}(t)$ системы (6) получаем

$$\begin{aligned} \bar{y}^{s\gamma}(2p) &\leq \|v\|_{k_{2p}^n} + \frac{1}{\lambda_s - \beta} \sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E \left| \gamma(\varsigma) \int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar{y}^s(\zeta) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} + \\ &+ \frac{1}{\lambda_s - \beta} \sum_{j \in \{1, \dots, m_1\}/I_s} \bar{a}_{ss}^j \gamma(\tau_{1j}) \hat{y}^{s\gamma}(2p) + \frac{1}{\lambda_s - \beta} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq s}}^l \bar{a}_{s\nu}^j \gamma(\tau_{1j}) \hat{y}^{\nu\gamma}(2p) + \\ &+ c_p \sum_{i=2}^m \sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t (\hat{y}_s(t, \varsigma) \gamma(t) \gamma(\varsigma)^{-1} \gamma(\varsigma) ((V_1 \bar{y})(\varsigma))^{si})^2 d\varsigma \right|^p \right)^{1/(2p)} + \\ &+ \sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t \hat{y}_s(t, \varsigma) \gamma(t) \gamma(\varsigma)^{-1} \gamma(\varsigma) (G(\varsigma))^{s1} d\varsigma \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} + \\ &+ c_p \sum_{i=2}^m \sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t (\hat{y}_s(t, \varsigma) \gamma(t) \gamma(\varsigma)^{-1} \gamma(\varsigma) (G(\varsigma))^{si})^2 d\varsigma \right|^p \right)^{1/(2p)} \leq \\ &\leq \|v\|_{k_{2p}^n} + \frac{1}{\lambda_s - \beta} \sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E \left| \gamma(\varsigma) \int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar{y}^s(\zeta) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} + \\ &+ \frac{1}{\lambda_s - \beta} \sum_{j \in \{1, \dots, m_1\}/I_s} \bar{a}_{ss}^j \gamma(\tau_{1j}) \hat{y}^{s\gamma}(2p) + \frac{1}{\lambda_s - \beta} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq s}}^l \bar{a}_{s\nu}^j \gamma(\tau_{1j}) \hat{y}^{\nu\gamma}(2p) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_s - \beta} \left[\sum_{\nu=1}^l b_{s1}^\nu(\beta) \bar{y}^{s\gamma}(2p) + \hat{b}_{s1}(\beta) \|v\|_{k_{2p}} + (b_{s1}(\beta) + \bar{b}_{s1}(\beta)) \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \right] + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s - \beta)}} \times \\ &\times \sum_{i=2}^m \left[\sum_{\nu=1}^l (b_{si}^\nu(\beta) + d_{si}^\nu(\beta)) \bar{y}^{s\gamma}(2p) + \hat{b}_{si}(\beta) \|v\|_{k_{2p}} + (b_{si}(\beta) + \bar{b}_{si}(\beta)) \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \right], \quad s = \overline{1, l}, \quad (16) \\ \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E \left| \gamma(\varsigma) \int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar{y}^s(\zeta) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} &\leq \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^l \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E \left| \gamma(\varsigma) \int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{s\nu}^{1i}(\zeta) \bar{y}^\nu(h_{1j}(\zeta)) d\zeta \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} + \\ &+ c_p \sum_{i=2}^m \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E \left(\int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} (\gamma(\varsigma) ((V_1 \bar{y})(\zeta))^{si})^2 d\zeta \right)^p \right)^{1/(2p)} + \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E \left| \gamma(\varsigma) \int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} (G(\zeta))^{s1} d\zeta \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_p \sum_{i=2}^m \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E \left(\int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} (\gamma(\varsigma)(G(\zeta))^{s_i})^2 d\zeta \right)^p \right)^{1/(2p)} \leq \\
& \leq \left(\sum_{\nu=1}^l \left[\sum_{i=1}^{m_1} \gamma(\tau_{1i}) \bar{a}_{s\nu}^i + b_{s1}^\nu(\beta) \right] \bar{y}^{\nu\gamma}(2p) + \hat{b}_{s1}(\beta) \|v\|_{k_{2p}^n} + (b_{s1}(\beta) + \bar{b}_{s1}(\beta)) \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \right) \gamma(\tau_{1j}) \tau_{1j} + \\
& + c_p \left(\sum_{i=2}^m \left[\sum_{\nu=1}^l \left(d_{si}^\nu(\beta) + b_{si}^\nu(\beta) \right) \bar{y}^{\nu\gamma}(2p) + \hat{b}_{si}(\beta) \|v\|_{k_{2p}^n} + (b_{si}(\beta) + \bar{b}_{si}(\beta)) \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \right] \right) \gamma(\tau_{1j}) \sqrt{\tau_{1j}}, \quad (17)
\end{aligned}$$

где $s = \overline{1, l}$.

Из неравенств (16) и (17) следует, что

$$\bar{y}^{s\gamma}(2p) \leq N_s(\beta) \|v\|_{k_{2p}^n} + \sum_{\nu=1}^l c_{s\nu}(\beta) \bar{y}^{\nu\gamma}(2p) + M_s(\beta) \|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad s = \overline{1, l}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
N_s(\beta) &= 1 + \frac{1}{\lambda_s - \beta} \sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \left(\gamma(\tau_{1j}) \tau_{1j} \hat{b}_{s1}(\beta) + c_p \gamma(\tau_{1j}) \sqrt{\tau_{1j}} \sum_{i=1}^m \hat{b}_{si}(\beta) \right) + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s - \beta)}} \sum_{i=1}^m \hat{b}_{si}(\beta), \\
c_{ss}(\beta) &= \frac{1}{\lambda_s - \beta} \left[\sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \left(\gamma(\tau_{1j}) \tau_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^i \gamma(\tau_{1i}) + b_{s1}^s(\beta) \right) + c_p \gamma(\tau_{1j}) \sqrt{\tau_{1j}} \sum_{i=1}^m (d_{si}^s(\beta) + b_{si}^s(\beta)) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j \in 1, \dots, m_1/I_s} \bar{a}_{ss}^j \gamma(\tau_{1j}) + b_{s1}^s(\beta) \right] + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s - \beta)}} \sum_{i=1}^m (b_{si}^s(\beta) + d_{si}^s(\beta)), \\
c_{s\nu}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda_s - \beta} \left[\sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \left(\gamma(\tau_{1j}) \tau_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}_{s\nu}^i \gamma(\tau_{1i}) + b_{s1}^\nu(\beta) \right) + c_p \gamma(\tau_{1j}) \sqrt{\tau_{1j}} \sum_{i=1}^m (d_{si}^\nu(\beta) + b_{si}^\nu(\beta)) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{s\nu}^j \gamma(\tau_{1j}) + b_{s1}^\nu(\beta) \right] + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s - \beta)}} \sum_{i=1}^m (b_{si}^\nu(\beta) + d_{si}^\nu(\beta)), \quad s, \nu = \overline{1, l}, \quad s \neq \nu, \\
M_s(\beta) &= \frac{1}{\lambda_s - \beta} \sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \left[\gamma(\tau_{1j}) \tau_{1j} (b_{s1}(\beta) + \bar{b}_{s1}(\beta)) + c_p \gamma(\tau_{1j}) \sqrt{\tau_{1j}} \sum_{i=1}^m (b_{si}(\beta) + \bar{b}_{si}(\beta)) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_s - \beta} (b_{s1}(\beta) + \bar{b}_{s1}(\beta)) + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s - \beta)}} \sum_{i=1}^m (b_{si}(\beta) + \bar{b}_{si}(\beta)), \quad s = \overline{1, l}.
\end{aligned}$$

Систему (18) запишем в матричной форме

$$\bar{E} \bar{y}^\gamma(2p) \leq C(\beta) \bar{y}^\gamma(2p) + \bar{c}(\beta) \|v\|_{k_{2p}^n} + \hat{c}(\beta) \|\varphi\|_{L_{2p}^n},$$

где $C(\beta) = (c_{ij}(\beta))_{i,j=1}^l - l \times l$ -матрица, а $\bar{c}(\beta) = \text{col}(N_1(\beta), \dots, M_l(\beta))$, $\hat{c}(\beta) = \text{col}(M_1(\beta), \dots, M_l(\beta)) - l$ -мерные векторы-столбцы.

Очевидно, что $C(0) = C$, где C - матрица из условия теоремы 3. Поскольку $\bar{E} - C$ является положительно обратимой матрицей, а это свойство устойчиво относительно малых возмущений, то при достаточно малых $\beta > 0$ матрица $\bar{E} - C(\beta)$ также будет неотрицательно обратимой. Следовательно, в силу теоремы 2 система (1) будет M_{2p}^γ -устойчивой для некоторого $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$. Теорема доказана.

4. Достаточные условия устойчивости. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями из предыдущих пунктов и на основе теоремы 3 получим достаточные условия устойчивости по части переменных решений для некоторых классов систем вида (1) в терминах их параметров.

Будем считать $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, где β – некоторое нефиксированное положительное число.

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{1j} , $j = \overline{2, m_1}$, A_{ij} , $i = \overline{2, m}$, $j = \overline{1, m_i}$, равны нулю $P \times \mu$ -почти всюду, а элементы матрицы A_{11} являются локально суммируемыми функциями, $h_{11}(t) = t$, $t \geq 0$, μ -почти всюду. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае условие (1a) лишнее и в условии (1b) v_i , $i = \overline{1, n}$, – действительные числа. Кроме того, $f^y \equiv 0$, $f^x \equiv 0$.

Рассмотрим случай $l = n - 1$. Тогда $y = \text{col}(x^1, \dots, x^{n-1})$, $\xi = x^n$, $(A_{11}(t))^1$ есть $(n - 1) \times (n - 1)$ -матрица, полученная из матрицы $A_{11}(t)$ зачеркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{11}(t))^2 = \text{col}(a_{1n}^{11}(t), \dots, a_{n-1n}^{11}(t)), \quad (A_{11}(t))^3 = (a_{n1}^{11}(t), \dots, a_{n-1n-1}^{11}(t)), \quad (A_{11}(t))^4 = a_{nn}^{11}(t),$$

$$H(t) = \exp \left\{ - \int_0^t a_{nn}^{11}(\zeta) d\zeta \right\}, \quad (C_1 g)(t) = \int_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1} g(\zeta) d\zeta.$$

Пусть:

– существуют положительные числа λ_s , $s = \overline{1, l}$, и неотрицательные числа $\bar{a}_{si}^1$, $s, i = \overline{1, l}$, такие, что

$$a_{ss}^{11}(t) \geq \lambda_s, \quad s = \overline{1, l}, \quad |a_{si}^{11}(t)| \leq \bar{a}_{si}^1, \quad s, i = \overline{1, l}, \quad t \geq 0,$$

μ -почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{s1}^j(\beta)$, $s, j = \overline{1, l}$, такие, что для любой непрерывной функции $u(\varsigma) = \text{col}(u^1(\varsigma), \dots, u^l(\varsigma))$, $\varsigma \geq 0$, и любого β , $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$, имеют место неравенства

$$\text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} \left| \gamma(\varsigma) a_{sn}^{11}(\varsigma) \int_0^\varsigma H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1} \sum_{j=1}^l a_{nj}^{11}(\zeta) u^j(\zeta) d\zeta \right| \leq \sum_{j=1}^l b_{s1}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geq 0} |\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|, \quad s = \overline{1, l};$$

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat{b}_{s1}(\beta)$, $s = \overline{1, l}$, такие, что для любых $x(0) = (x^1(0), \dots, x^n(0)) \in \mathbb{R}^n$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$ выполняются неравенства

$$\text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} |\gamma(\varsigma) a_{sn}^{11}(\varsigma) H(\varsigma) x^n(0)| \leq \hat{b}_{s1}(\beta) |x(0)|, \quad s = \overline{1, l};$$

– элементы $l \times l$ -матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{b_{s1}^s(0)}{\lambda_s}, \quad s = \overline{1, l}, \quad c_{s\nu} = \frac{\bar{a}_{s\nu}^1 + b_{s1}^\nu(0)}{\lambda_s}, \quad s, \nu = \overline{1, l}, \quad s \neq \nu.$$

В силу теоремы 3 справедливо

Утверждение 1. Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $E - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально устойчивой относительно первых $n - 1$ компонент.

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{ij} , $i = \overline{2, m}$, $j = \overline{1, m_i}$, равны нулю $P \times \mu$ -почти всюду, а элементами матриц A_{1j} , $j = \overline{1, m_1}$, являются локально суммируемые функции. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Рассмотрим случай $l = n - 1$. Тогда $y = \text{col}(x^1, \dots, x^{n-1})$, $\xi = x^n$, $(A_{1j}(t))^1$ является $(n-1) \times (n-1)$ -матрицей, полученной из матрицы $A_{1j}(t)$ зачёркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{1j}(t))^2 = \text{col}(a_{1n}^{1j}(t), \dots, a_{n-1n}^{1j}(t)), \quad (A_{1j}(t))^3 = (a_{n1}^{1j}(t), \dots, a_{n-1n-1}^{1j}(t)), \quad (A_{1j}(t))^4 = a_{nn}^{1j}(t)$$

при $j = \overline{1, m_1}$. Предположим, что $h_{11}(t) = t$, $t \geq 0$, μ -почти всюду и элементы матриц $(A_{1j}(t))^2$, $(A_{1j}(t))^3$, $(A_{1j}(t))^4$, $t \geq 0$, равны нулю μ -почти всюду при $j = \overline{2, m_1}$. Тогда

$$H(t) = \exp \left\{ - \int_0^t a_{nn}^{11}(\zeta) d\zeta \right\}, \quad (C_1 g)(t) = \int_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1} g(\zeta) d\zeta.$$

Пусть:

– существуют неотрицательные числа τ_{1j} , $j = \overline{2, m_1}$, такие, что

$$0 \leq t - h_{1j}(t) \leq \tau_{1j}, \quad j = \overline{2, m_1}, \quad t \geq 0,$$

μ -почти всюду;

– существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1, \dots, m_1\}$, $s = \overline{1, l}$, положительные числа λ_s , $s = \overline{1, l}$, и неотрицательные числа $\bar{a}_{si}^j$, $j = \overline{1, m_1}$, $s, i = \overline{1, l}$, такие, что

$$\sum_{j \in I_s} a_{ss}^{1j}(t) \geq \lambda_s, \quad s = \overline{1, l}, \quad |a_{si}^{1j}(t)| \leq \bar{a}_{si}^j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad s, i = \overline{1, l}, \quad t \geq 0,$$

$P \times \mu$ -почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{s1}^j(\beta)$, $s, j = \overline{1, l}$, такие, что для любой непрерывной функции $u(\varsigma) = \text{col}(u^1(\varsigma), \dots, u^l(\varsigma))$, $\varsigma \geq 0$, и любого β , $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$, имеют место неравенства

$$\text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} \left| \gamma(\varsigma) a_{sn}^{11}(\varsigma) \int_0^\varsigma H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1} \sum_{j=1}^l a_{nj}^{11}(\zeta) u^j(\zeta) d\zeta \right| \leq \sum_{j=1}^l b_{s1}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geq 0} |\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|, \quad s = \overline{1, l};$$

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat{b}_{s1}(\beta)$, $s = \overline{1, l}$, такие, что для любых $x(0) = (x^1(0), \dots, x^n(0)) \in \mathbb{R}^n$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$ выполняются неравенства

$$\text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} |\gamma(\varsigma) a_{sn}^{11}(\varsigma) H(\varsigma) x^n(0)| \leq \hat{b}_{s1}(\beta) |x(0)|, \quad s = \overline{1, l};$$

– элементы $l \times l$ -матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \tau_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^i \gamma(\tau_{1i}) + b_{s1}^s(0) \right) + \sum_{j \in \overline{1, \dots, m_1} / I_s} \bar{a}_{ss}^j + b_{s1}^s(0) \right], \quad s = \overline{1, l},$$

$$c_{s\nu} = \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j \in I_s} \bar{a}_{ss}^j \tau_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}_{s\nu}^i + b_{s1}^\nu(0) \right) + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{s\nu}^j \right], \quad s, \nu = \overline{1, l}, \quad s \neq \mu,$$

где $\tau_{11} = 0$.

Утверждение 2. Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar{E} - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально устойчивой относительно первых $n - 1$ компонент.

Справедливость утверждения 2 также следует из теоремы 3. При проверке выполнения всех условий теоремы 3 нужно учесть, что $f^\xi \equiv 0$, а в выполнении условий для f^y можно убедиться непосредственной проверкой.

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{2, m_i}$, равны нулю $P \times \mu$ -почти всюду, $h_{i1}(t) = t$, $i = \overline{1, m}$, $t \geq 0$, μ -почти всюду. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Ито. В этом случае условие (1a) лишнее. Кроме того, $f^y \equiv 0$, $f^\xi \equiv 0$.

Рассмотрим случай $l = n - 1$. Тогда $y = \text{col}(x^1, \dots, x^{n-1})$, $\xi = x^n$, $(A_{i1}(t))^1$ является $(n-1) \times (n-1)$ -матрицей, полученной из матрицы $A_{i1}(t)$ зачеркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{i1}(t))^2 = \text{col}(a_{1n}^{i1}(t), \dots, a_{n-1n}^{i1}(t)), \quad (A_{i1}(t))^3 = (a_{n1}^{i1}(t), \dots, a_{n-1n-1}^{i1}(t)), \quad (A_{i1}(t))^4 = a_{nn}^{i1}(t)$$

при $i = \overline{1, m}$. Тогда

$$H(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \left[a_{nn}^{11}(\zeta) + (1/2) \sum_{i=2}^m (a_{nn}^{i1}(\zeta))^2 \right] d\zeta + \sum_{i=2}^m \int_0^t a_{nn}^{i1}(\zeta) d\mathcal{B}_i(\zeta) \right\},$$

$$(C_1 g)(t) = \int_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1} g(\zeta) dZ(\zeta).$$

Пусть:

– существуют положительные числа λ_s , $s = \overline{1, l}$, и неотрицательные числа $\bar{a}_{si}^1$, $s, i = \overline{1, l}$, такие, что

$$a_{ss}^{11}(t) \geq \lambda_s, \quad s = \overline{1, l}, \quad |a_{si}^{11}(t)| \leq \bar{a}_{si}^1, \quad s, i = \overline{1, l}, \quad t \geq 0,$$

$P \times \mu$ -почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{si}^j(\beta)$, $d_{s\nu}^j(\beta)$, $s, j = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$, $\nu = \overline{2, m}$, такие, что для любых $u = \text{col}(u^1, \dots, u^l) \in \bar{D}^l$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & \text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} \left(E \left| \gamma(\varsigma) \gamma(\varsigma) a_{sn}^{i1}(\varsigma) \int_0^\varsigma H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1} \left(\sum_{j=1}^l a_{nj}^{11}(\zeta) u^j(\zeta), \dots \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \dots, \sum_{j=1}^l a_{nj}^{m1}(\zeta) u^j(\zeta) \right) dZ(\zeta) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} \leq \sum_{j=1}^l b_{si}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E |\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|^{2p} \right)^{1/(2p)}, \\ & \text{vrai sup}_{\varsigma \geq 0} \left(E \left| \gamma(\varsigma) \sum_{j=1}^l a_{sj}^{\nu 1}(\varsigma) u^j(\varsigma) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} \leq \sum_{j=1}^l d_{s\nu}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geq 0} \left(E |\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|^{2p} \right)^{1/(2p)} \end{aligned}$$

при $s = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$, $\nu = \overline{2, m}$;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat{b}_{si}(\beta)$, $s = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$, такие, что для любых $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1, l}\}$, $\bar{x}(0) \in k_{2p}^n$ выполняются неравенства

$$\sup_{\varsigma \geq 0} \left(E |\gamma(\varsigma) a_{sn}^{i1}(\varsigma) H(\varsigma) \bar{h}(0)|^{2p} \right)^{1/(2p)} \leq \hat{b}_{si}(\beta) \|\bar{x}(0)\|_{k_{2p}^n}$$

при $s = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$;

– элементы $l \times l$ -матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{b_{s1}^s(0)}{\lambda_s} + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}} \sum_{i=1}^m (b_{si}^s(0) + d_{si}^s(0)), \quad s = \overline{1, l},$$

$$c_{s\nu} = \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{s\nu}^j + b_{s1}^\nu(0) \right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}} \sum_{i=1}^m (b_{si}^\nu(0) + d_{si}^\nu(0)), \quad s, \nu = \overline{1, l}, \quad s \neq \nu.$$

Утверждение 3. Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar{E} - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально $2p$ -устойчивой относительно первых $n - 1$ компонент.

Справедливость утверждения 3 также следует из теоремы 3.

Замечание 3. В предыдущих утверждениях признаки устойчивости сформулированы в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам уравнений. В случае конкретных значений параметров положительная обратимость матрицы проверяется прямым вычислением обратной матрицы.

Заключение. В статье получены признаки моментной экспоненциальной устойчивости решений по части переменных линейных уравнений Ито с запаздыванием и приведены конкретные примеры, иллюстрирующие эффективность этих признаков. Основная схема доказательств, использованная в статье, основана на стохастической разновидности метода вспомогательных уравнений (W -метода) в комбинации с теорией неотрицательно обратимых матриц и методом покомпонентных оценок решений.

В дальнейшем автор планирует распространить этот подход на другие виды устойчивости (например, асимптотическую устойчивость), а также рассмотреть другие классы уравнений Ито с последствием, особенно те, где метод функционалов Ляпунова не работает или работает недостаточно эффективно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. М., 1981.
2. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига, 1989.
3. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. Chichester, 1997.
4. Mohammed S.-E.F. Stochastic functional differential equations with memory. Theory, examples and applications // Proc. of the Sixth on Stochastic Analysis. Geilo, 1996. P. 1–91.
5. Azbelev N.V., Simonov P.M. Stability of Differential Equations with Aftereffect. London, 2002.
6. Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М., 2001.
7. Кадиев Р.И. Достаточные условия устойчивости по части переменных линейных стохастических систем с последствием // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С. 75–79.
8. Кадиев Р.И. Допустимость пар пространств по части переменных для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1994. № 4. С. 1–9.
9. Kadiev R.I., Ponosov A.V. Partial Lyapunov stability of linear stochastic functional differential equations with to initial values // Int. J. of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Anal. 2008. V. 15. № 5. P. 727–754.
10. Kadiev R., Ponosov A. Partial stability of stochastic functional differential equations and the W -transform // Int. J. of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Anal. 2014. V. 21. № 1. P. 1–35.
11. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2019. № 5. С. 86–98.
12. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2021. № 9. С. 116–132.
13. Кадиев Р.И., Поносков А.В. Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 53. № 5. С. 579–590.

14. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и экспоненциальная устойчивость импульсных систем линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2020. № 10. С. 3–8.
15. *Кадиев Р.И.* Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 35–40.
16. *Кадиев Р.И.* Исследование вопросов устойчивости для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений методом вспомогательных уравнений // Дагестанские электрон. мат. изв. 2014. Вып. 2. С. 45–67.
17. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
18. *Kadiev R., Ponosov A.* The W -transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Math. Analysis and Appl. 2012. V. 389. № 2. P. 1239–1250.
19. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М., 1986.

Дагестанский федеральный исследовательский
центр РАН, г. Махачкала,
Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала

Поступила в редакцию 23.03.2023 г.
После доработки 27.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.