

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.25

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ
ОПЕРАТОРА ТИПА ДИРАКА $2m$ -ГО ПОРЯДКА
С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2023 г. Э. Дж. Ибадов

Рассматривается оператор типа Дирака с матричными коэффициентами. Устанавливаются оценки для корневых вектор-функций, критерии бesselовости и безусловной базисности в пространстве $L_2^{2m}(G)$, $G = (a, b) \subset \mathbb{R}$ – конечный интервал, систем корневых вектор-функций этого оператора.

DOI: 10.31857/S0374064123100011, EDN: OQXSAB

1. Формулировка основных результатов. В настоящей работе с помощью метода, разработанного В.А. Ильиным [1], исследован одномерный оператор типа Дирака $2m$ -го порядка с суммируемым потенциалом и установлены антиаприорные оценки для корневых вектор-функций, критерий бesselовости и безусловной базисности в $L_2^{2m}(G)$ систем корневых вектор-функций. Будем понимать эти корневые вектор-функции в обобщённой трактовке, т.е. безотносительно к краевым условиям (см. [1]). Антиаприорные оценки впервые были установлены в статье [2] для обыкновенных дифференциальных операторов порядка n с гладкими коэффициентами. В дальнейшем установлению антиаприорных оценок было посвящено много работ (см., например, [3–8]). Эти оценки использовались при исследовании вопросов сходимости спектральных разложений.

Отметим, что при таком обобщённом понимании корневых функций (в смысле В.А. Ильина) [1] установлены необходимые и достаточные условия безусловной базисности в пространстве $L_2(G)$ систем корневых функций оператора

$$Lu = -u'' + q(x)u,$$

где $q(x) \in L_1(G)$. Эти и другие вопросы изучались в [3, 6, 9–13] для обыкновенного дифференциального оператора высокого порядка и были установлены критерии бesselовости, базисности Рисса, безусловной базисности. Для оператора Дирака с потенциалом $P(x) \in L_2(G)$ критерии бesselовости и безусловной базисности сформулированы в работе [14]. Покомпонентная равномерная равносходимость на компакте, равномерная сходимость, базисность Рисса систем корневых вектор-функций, бesselовость, безусловная базисность для оператора типа Дирака изучались в статьях [15–20].

Свойствам базисности и другим спектральным свойствам корневых вектор-функций оператора Дирака (с краевыми условиями) посвящена обширная литература [21–31]. В работе [28], например, установлена базисность Рисса в случае, когда потенциал оператора Дирака принадлежит L_2 и краевые условия разделённые, а в [30] исследован случай с регулярными краевыми условиями и с потенциалом из класса L_2 . Оператор Дирака с потенциалом из L_p , $p \geq 1$, исследован в статьях [26, 27]; для случая сильно регулярных краевых условий была доказана базисность Рисса, а в случае регулярных (но не сильно регулярных) краевых условий – базисность Рисса из подпространств. В [22, 23] исследована 2×2 система типа Дирака с потенциалами из класса L_1 и сильно регулярными краевыми условиями. Для $2m \times 2m$ системы Дирака с краевыми условиями Дирихле и потенциалом из L_2 базисность Рисса из подпространств доказана в работе [31]. В статье [24] показано, что система корневых векторов общей $n \times n$ системы типа Дирака при определённых граничных условиях образует базис Рисса со скобками.

Пусть $L_p^{2m}(G)$, $p \geq 1$, – пространство $2m$ -компонентных вектор-функций

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{2m}(x))^T$$

с нормой

$$\|f\|_{p,2m} = \left[\int_G \left(\sum_{j=1}^{2m} |f_j(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ норма определяется равенством

$$\|f\|_{\infty,2m} = \sup_{x \in \overline{G}} |f(x)|.$$

Очевидно, что для произвольных функций $f(x) \in L_p^{2m}(G)$, $g(x) \in L_q^{2m}(G)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$, определено “скалярное произведение”

$$(f, g) = \int_G \sum_{j=1}^{2m} f_j(x) \overline{g_j(x)} dx.$$

Рассмотрим оператор типа Дирака $2m$ -го порядка

$$D\psi = B \frac{d\psi}{dx} + \Omega(x)\psi, \quad \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{2m}(x))^T,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_m), \quad T_2 = \text{diag}(b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_{2m}),$$

$$(b_1 = b_2 = \dots = b_m > 0, \quad b_{m+1} = \dots = b_{2m} < 0),$$

$\Omega(x) = \text{diag}(p_1(x), p_2(x), \dots, p_{2m}(x))$, $p_i(x)$, $i = \overline{1, 2m}$, – комплекснозначные функции, определённые на произвольном конечном интервале $G = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

Следуя работе [1], под *собственной функцией оператора* D , отвечающей комплексному собственному значению λ , будем понимать любую тождественно не равную нулю комплекснозначную вектор-функцию $\overset{\circ}{\psi}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подынтервале интервала G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D\overset{\circ}{\psi} = \lambda\overset{\circ}{\psi}$.

Аналогично под *присоединённой функцией порядка* $l \geq 1$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{\psi}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную вектор-функцию $\overset{l}{\psi}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подынтервале интервала G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D\overset{l}{\psi} = \lambda\overset{l}{\psi} + \overset{l-1}{\psi}$.

Теорема 1. Пусть функции $p_i(x)$, $i = \overline{1, 2m}$, принадлежат классу $L_1^{\text{loc}}(G)$. Тогда для любого компакта $K \subset G$ существуют константы $C^r(K, l, b_1, b_{m+1})$, $r = 1, 2$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, не зависящие от λ и такие, что справедливы оценки

$$\|\overset{l-1}{\psi}\|_{L_\infty^2(K)} \leq C^1(K, l, b_1, b_{m+1})(1 + |\text{Im } \lambda|) \|\overset{l}{\psi}\|_{L_\infty^2(K)}, \quad (1)$$

$$\|\overset{l}{\psi}\|_{L_\infty^2(K)} \leq C^2(K, l, b_1, b_{m+1})(1 + |\text{Im } \lambda|)^{1/p} \|\overset{l}{\psi}\|_{L_p^2(K)}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (2)$$

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – произвольная система, составленная из собственных и присоединённых вектор-функций оператора D , $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – соответствующая ей система собственных значений. Кроме того, функция $\psi_k(x)$ входит в систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ вместе со всеми соответствующими ей присоединёнными функциями меньшего порядка. Это означает, что $D\psi_k = \lambda_k\psi_k + \theta_k\psi_{k-1}$,

где θ_k равно либо нулю (в этом случае $\psi_k(x)$ – собственная вектор-функция), либо единице (в этом случае $\psi_k(x)$ – присоединённая вектор-функция, причём $\lambda_k = \lambda_{k-1}$).

Определение 1. Будем говорить, что для заданной системы функций $h_k(x) \in L_2^{2m}(G)$ выполняется *неравенство Бесселя*, если существует постоянная M такая, что для произвольной вектор-функции $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h_k, f)|^2 \leq M \|f\|_{2,2m}^2,$$

где M – константа, не зависящая от $f(x)$.

Теорема 2 (критерий бесселевости). Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены и существует константа C_0 такая, что

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq C_0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Тогда для того чтобы система функций $\{\psi_k(x) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^{2m}(G)$ удовлетворяла неравенству Бесселя, необходимо и достаточно существование константы M_1 такой, что

$$\sum_{|\operatorname{Re} \lambda_k - \tau| \leq 1} 1 \leq M_1, \quad (4)$$

где τ – произвольное действительное число.

Обозначим через D^* формально сопряжённый оператор к оператору D :

$$D^* = -B^* \frac{d}{dx} + \Omega^*(x),$$

где $\Omega^*(x)$ – сопряжённая матрица к матрице $\Omega(x)$. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – биортогонально сопряжённая к $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^{2m}(G)$ система, состоящая из корневых вектор-функций оператора D^* (т.е. $D^* \varphi_k = \overline{\lambda_k} \varphi_k + \theta_{k+1} \varphi_{k+1}$).

Теорема 3 (о безусловной базисности). Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены, одна из систем $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ или $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2^{2m}(G)$ и выполняется условие (3). Тогда необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2^{2m}(G)$ каждой из этих систем является существование постоянных M_1 и M_2 , обеспечивающих справедливость неравенства (4) и

$$\|\psi_k\|_{2,2m} \|\varphi_k\|_{2,2m} \leq M_2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Замечание 1. Отметим, что при условиях теоремы 3 выполнение неравенств (4) и (5) является необходимым и достаточным условием для базисности Рисса каждой из систем

$$\{\psi_k(x) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{\varphi_k(x) \|\varphi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$$

в пространстве $L_2^{2m}(G)$.

Определение 2. Система $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$ называется *квадратично близкой* в $L_2^{2m}(G)$ к системе $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$, если имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\tau_k - \psi_k\|_{2,2m}^2 < \infty.$$

Теорема 4 (об эквивалентной базисности). Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, выполняются условия (3)–(5) и система $\{\psi_k(x) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ квадратично близка к некоторому базису $\{z_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ пространства $L_2^{2m}(G)$. Тогда системы $\{\psi_k(x) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_k(x) \|\psi_k\|_{2,2m}\}_{k=1}^{\infty}$ являются

базисами в $L_2^{2m}(G)$, причём эквивалентны соответственно базису $\{z_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и его биортонормально сопряжённой системе.

2. Вспомогательные леммы. Для доказательств теорем 1–3 необходимы некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (формула сдвига). Если функции $p_i(x)$, $i = \overline{1, 2m}$, принадлежат классу $L_1^{\text{loc}}(G)$ и точки $x - t$, x , $x + t$ находятся в области G , то справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \psi^l(x+t) &= \left[\cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t I - \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right] \psi^l(x) + \\ &+ B^{-1} \int_x^{x+t} \left(\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi + x) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi + x) I \right) [\Omega(\xi) \psi^l(\xi) - \psi^{l-1}(\xi)] d\xi, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^l(x-t) &= \left[\cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t I + \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right] \psi^l(x) + \\ &+ B^{-1} \int_{x-t}^x \left(\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t + \xi - x) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t + \xi - x) I \right) [\Omega(\xi) \psi^l(\xi) - \psi^{l-1}(\xi)] d\xi, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^l(x+t) + \psi^l(x-t) &= 2\psi^l(x) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t + B^{-1} \int_{x-t}^{x+t} \left(\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \right. \\ &\left. - \text{sign}(\xi - x) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) I \right) [\Omega(\xi) \psi^l(\xi) - \psi^{l-1}(\xi)] d\xi, \quad (8) \end{aligned}$$

где I – единичный оператор в E^{2m} , а E^{2m} является $2m$ -мерным евклидовым пространством.

Доказательство. Для вывода формул (6) и (7) достаточно применить к уравнению

$$D\psi^l(\xi) = \lambda \psi^l(\xi) + \psi^{l-1}$$

оператор

$$\left(\cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) I - \text{sign}(\xi - x) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) \right) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}$$

и проинтегрировать по параметру ξ от x до $x+t$ (от $x-t$ до x), а затем провести интегрирование по частям в выражении

$$\begin{aligned} &\int_x^{x+t} \left(\cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi + x) I - \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi + x) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right) B d\psi^l(\xi) \\ &\left(\int_{x-t}^x \left(\cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t + \xi - x) I + \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t + \xi - x) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right) B d\psi^l(\xi) \right) \end{aligned}$$

и сгруппировать подобные члены. Формула (8) вытекает из формул (6) и (7). Лемма доказана.

Лемма 2. Если $p_i(x)$, $i = \overline{1, 2m}$, – функции из класса $L_1^{\text{loc}}(G)$ и точки $x - t$, x , $x + t$ принадлежат области G , то справедлива формула

$$\frac{2t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \sin \frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \psi^{l-1}(x) = 2 \cos \frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \psi^l(x) - \psi^l(x+t) - \psi^l(x-t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \int_{x-t}^{x+t} \left[\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) I + \operatorname{sign}(\xi - x) \times \right. \\
& \times \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \left. \right] \Omega(\xi) \psi^l(\xi) d\xi + \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \int_{x-t}^{x+t} (t - |x - \xi|) \times \\
& \times \left[\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) I - \operatorname{sign}(\xi - x) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) \times \right. \\
& \times \left. \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right] (\Omega(\xi) \psi^{l-1}(\xi) - \psi^{l-2}(\xi)) d\xi.
\end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Вычитая из (6) равенство (7), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \psi^l(x+t) - \psi^l(x-t) = -2 \sin \frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \psi^l(x) + \\
& + B^{-1} \int_{x-t}^{x+t} \left(\operatorname{sign}(\xi - x) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \right. \\
& \left. - \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) I \right) [\Omega(\xi) \psi^l(\xi) - \psi^{l-1}(\xi)] d\xi.
\end{aligned} \tag{10}$$

Запишем формулу (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \psi^l(x+t) + \psi^l(x-t) = 2 \cos \frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \psi^l(x) + \\
& + B^{-1} \int_{x-t}^{x+t} \left(\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \operatorname{sign}(\xi - x) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) I \right) \Omega(\xi) \psi^l(\xi) d\xi - \\
& - B^{-1} \int_0^t \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-r) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \left\{ \psi^{l-1}(x+r) + \psi^{l-1}(x-r) \right\} dr + \\
& + B^{-1} \int_0^t \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-r) I \left\{ \psi^{l-1}(x+r) - \psi^{l-1}(x-r) \right\} dr.
\end{aligned}$$

Подставляя формулы (8) и (10) при $l-1$ в последнее равенство, меняя порядки интегрирования в двойных интегралах и учитывая, что $B^{-1} = -B/|b_1 b_{m+1}|$ и $(B^{-1})^2 = -I/|b_1 b_{m+1}|$, получаем

$$\begin{aligned}
& \psi^l(x+t) + \psi^l(x-t) = 2 \cos \frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \psi^l(x) + \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \int_{x-t}^{x+t} \left[\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) I + \right. \\
& \left. + \operatorname{sign}(\xi - x) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x - \xi|) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right] \Omega(\xi) \psi^l(\xi) d\xi - \frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^t \left[\cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-r) + \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-r) \right] dr \psi^{l-1}(x) - \\
& - \int_{x-t}^{x+t} d\xi \int_{|x-\xi|}^t \left[\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-r) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (r-|x-\xi|) \frac{I}{|b_1 b_{m+1}|} + \right. \\
& + \operatorname{sign}(\xi-x) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-r) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (r-|x-\xi|) \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|^{3/2}} + \\
& + \operatorname{sign}(\xi-x) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-r) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (r-|x-\xi|) \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|^{3/2}} - \\
& \left. - \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-r) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (r-|x-\xi|) \frac{I}{|b_1 b_{m+1}|} \right] (\Omega(\xi) \psi^{l-1}(\xi) - \psi^{l-2}(\xi)) dr.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
& \psi^l(x+t) + \psi^l(x-t) = 2 \cos \frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \psi^l(x) - \frac{2t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \sin \frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \psi^{l-1}(x) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \int_{x-t}^{x+t} \left[\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-|x-\xi|) I + \operatorname{sign}(\xi-x) \times \right. \\
& \times \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-|x-\xi|) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \left. \right] \Omega(\xi) \psi^{l-1}(\xi) d\xi + \int_{x-t}^{x+t} (t-|x-\xi|) \times \\
& \times \left[\cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-|x-\xi|) \frac{I}{|b_1 b_{m+1}|} - \operatorname{sign}(\xi-x) \times \right. \\
& \times \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t-|x-\xi|) \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|^{3/2}} \left. \right] (\Omega(\xi) \psi^{l-1}(\xi) - \psi^{l-2}(\xi)) d\xi.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекает формула (9). Лемма доказана.

Лемма 3. При условиях леммы 2 справедливы следующие формулы:

$$\psi^l(x+t) = \psi^l(x) + \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_x^{x+t} (\Omega(\xi) - \lambda I) \psi^l(\xi) d\xi - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_x^{x+t} \psi^{l-1}(\xi) d\xi, \quad (11)$$

$$\psi^l(x-t) = \psi^l(x) - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_{x-t}^x (\Omega(\xi) - \lambda I) \psi^l(\xi) d\xi - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_{x-t}^x \psi^{l-1}(\xi) d\xi, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& 2t \psi^{l-1}(x) = B \{ \psi^l(x+t) - \psi^l(x-t) \} + \int_{x-t}^{x+t} (\Omega(\xi) - \lambda I) \psi^l(\xi) d\xi - \\
& - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_0^t dr \int_{x-r}^{x+r} \operatorname{sign}(\xi-x) \{ (\Omega(\xi) - \lambda I) \psi^{l-1}(\xi) - \psi^{l-2}(\xi) \} d\xi. \quad (13)
\end{aligned}$$

Доказательство. Проинтегрируем уравнение $D\psi(\xi) = \lambda\psi(\xi) + \psi^{l-1}(\xi)$ по ξ от x до $x+t$:

$$B \int_x^{x+t} d\psi(\xi) + \int_x^{x+t} \Omega(\xi)\psi(\xi) d\xi = \lambda \int_x^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \int_x^{x+t} \psi^{l-1}(\xi) d\xi.$$

После интегрирования по частям в первом интеграле в левой части имеем

$$B[\psi^l(x+t) - \psi^l(x)] = - \int_x^{x+t} (\Omega(\xi) - \lambda I)\psi(\xi) d\xi + \int_x^{x+t} \psi^{l-1}(\xi) d\xi.$$

Отсюда, в свою очередь, следует равенство

$$\psi^l(x+t) - \psi^l(x) = -B^{-1} \int_x^{x+t} (\Omega(\xi) - \lambda I)\psi(\xi) d\xi + B^{-1} \int_x^{x+t} \psi^{l-1}(\xi) d\xi,$$

из которого, учитывая, что $B^{-1} = -B/|b_1 b_{m+1}|$, получаем равенство (11).

Аналогично доказывается формула (12).

Теперь докажем соотношение (13). Для этого (11) представим в виде

$$\psi^l(x+t) = \psi^l(x) + \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_x^{x+t} (\Omega(\xi) - \lambda I)\psi(\xi) d\xi - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_0^t \psi^{l-1}(x+r) dr.$$

Учитывая в последнем интеграле значение $\psi^{l-1}(x+r)$ из (10), получаем

$$\begin{aligned} \psi^l(x+t) &= \psi^l(x) + \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_x^{x+t} (\Omega(\xi) - \lambda I)\psi(\xi) d\xi - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \psi^{l-1}(x)t - \\ &- \frac{B^2}{|b_1 b_{m+1}|^2} \int_0^t dr \int_x^{x+r} (\Omega(\xi) - \lambda I) \psi^{l-1}(\xi) d\xi + \frac{B^2}{|b_1 b_{m+1}|^2} \int_0^t dr \int_x^{x+r} \psi^{l-2}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Так как $B^2 = -|b_1 b_{m+1}|I$, из последнего равенства будем иметь

$$\begin{aligned} \psi^l(x+t) &= \psi^l(x) + \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_x^{x+t} (\Omega(\xi) - \lambda I)\psi(\xi) d\xi - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \psi^{l-1}(x)t + \\ &+ \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_0^t dr \int_x^{x+r} (\Omega(\xi) - \lambda I) \psi^{l-1}(\xi) d\xi - \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_0^t dr \int_x^{x+r} \psi^{l-2}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично находим, что

$$\begin{aligned} \psi^l(x-t) &= \psi^l(x) - \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_{x-t}^x (\Omega(\xi) - \lambda I)\psi(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \psi^{l-1}(x)t + \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_0^t dr \int_{x-r}^x (\Omega(\xi) - \lambda I) \psi^{l-1}(\xi) d\xi - \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_0^t dr \int_{x-r}^x \psi^{l-2}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычитая из (14) равенство (15), получаем

$$\begin{aligned} {}^l\psi(x+t) - {}^l\psi(x-t) &= \frac{B}{|b_1 b_{m+1}|} \int_{x-t}^{x+t} (\Omega(\xi) - \lambda I) {}^l\psi(\xi) d\xi - \frac{2B}{|b_1 b_{m+1}|} {}^{l-1}\psi(x)t + \\ &+ \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_0^t dr \int_{x-r}^{x+r} \text{sign}(\xi - x) \{ (\Omega(\xi) - \lambda I) {}^{l-1}\psi(\xi) - {}^{l-2}\psi(\xi) \} d\xi. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует формула (13). Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $K = [a', b'] \subset G$. Докажем оценку (1) методом математической индукции.

Так как ${}^{-1}\psi \equiv 0$, то оценка (1) при $l = 0$ будет справедливой с константой

$$C^1(K, 0, b_1, b_{m+1}) = 1.$$

Предположим, что неравенство (1) справедливо при $l = k$. Так как функции $p_i(x) \in L_1(K)$, $i = \overline{1, 2m}$, то можно выбрать число R_m таким, чтобы для любого множества $E_{2m} \subset K$, $\text{mes } E_{2m} \leq 2 \max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\} R_m$, выполнялось неравенство

$$\max \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \int_{E_{2m}} \left[\sum_{i=1}^{2m} |p_i(\xi)| \right] d\xi, \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_{E_{2m}} \left[\sum_{i=1}^m |b_{m+1} p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m} |b_1 p_i(\xi)| \right] d\xi \right\} \leq \frac{1}{240}. \quad (16)$$

Выберем числа h_m и $h_{k+1,m}$ следующим образом:

$$0 < h_m \leq \frac{1}{\max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\}} \min \left\{ \frac{b' - a'}{4}, R_m, \frac{1}{|\text{Im } \lambda|} \right\},$$

$$0 < h_{k+1,m} = \frac{1}{\max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\}} \times$$

$$\times \min \left\{ \frac{1}{120 C^1(K, k, b_1, b_{m+1}) (1 + |\text{Im } \lambda|)} \left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right)^{-1}, \frac{b' - a'}{4}, R_m, \frac{1}{|\text{Im } \lambda|} \right\}$$

и обозначим $h_m \sqrt{|b_1 b_{m+1}|} = \delta_m$, $h_{k+1,m} \sqrt{|b_1 b_{m+1}|} = \delta_{k+1,m}$.

Записав формулу (8) при $l = k$ в точках x , $x + t$, $x + 2t$, где $t = \delta_m$, $x \in [a', (a' + b')/2]$, в силу неравенств

$$|\sin z| \leq 2, \quad |\cos z| \leq 2, \quad |\text{Im } z| \leq 1 \quad (17)$$

находим, что

$$\begin{aligned} |{}^k\psi(x)| &\leq 5 \max_{x \in [a' + \delta_m, b' - \delta_m]} |{}^k\psi(x)| + 2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \int_x^{x+2\delta_m} \left[\sum_{i=1}^{2m} |p_i(\xi)| \right] d\xi + \right. \\ &+ \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_x^{x+2\delta_m} \left[\sum_{i=1}^m |b_{m+1} p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m} |b_1 p_i(\xi)| \right] d\xi \left. \right\} \|{}^k\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \\ &+ 4\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|{}^{k-1}\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства (16) для любого $x \in [a', (a' + b')/2]$ имеем оценку

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leq 5 \max_{x \in [a' + \delta_m, b' - \delta_m]} |\psi(x)| + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k + \\ &+ 4\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из формулы (8) аналогично получается неравенство (18) при $x \in [(a' + b')/2, b']$. Таким образом, при $x \in K$ справедливо

$$\frac{1}{2} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k - 4\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1} \leq 5 \max_{x \in [a' + \delta_m, b' - \delta_m]} |\psi(x)|^k.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{10} \left[\|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k - 8\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1} \right] \leq \max_{x \in [a' + \delta_m, b' - \delta_m]} |\psi(x)|^k. \quad (19)$$

В силу неравенств (17) из формулы (9) при $t = \delta_m$, $x \in [a' + \delta_m, b' - \delta_m]$, $l = k + 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} 2\delta_m |\sin(\lambda\delta_m)| |\psi(x)| &\leq 6 \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1} + 2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \int_{x-\delta_m}^{x+\delta_m} \left[\sum_{i=1}^{2m} |p_i(\xi)| \right] d\xi + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_{x-\delta_m}^{x+\delta_m} \left[\sum_{i=1}^m |b_{m+1} p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m} |b_1 p_i(\xi)| \right] d\xi \right\} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1} + \\ &+ 2\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \int_{x-\delta_m}^{x+\delta_m} \left[\sum_{i=1}^{2m} |p_i(\xi)| \right] d\xi + \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_{x-\delta_m}^{x+\delta_m} \left[\sum_{i=1}^m |b_{m+1} p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m} |b_1 p_i(\xi)| \right] d\xi \right\} \times \\ &\times \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k + \delta_m^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства (16) и произвольности точки $x \in [a' + \delta_m, b' - \delta_m]$ находим, что

$$\begin{aligned} \delta_m |\sin(\lambda\delta_m)| \max_{x \in [a' + \delta_m, b' - \delta_m]} |\psi(x)| &\leq 7 \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1} + \\ &+ \frac{\delta_m}{60} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k + 4\delta_m^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} |\sin(\lambda\delta_m)| \max_{x \in [a' + \delta_m, b' - \delta_m]} |\psi(x)| &\leq \frac{4}{\delta_m} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1} + \\ &+ \frac{1}{120} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k + 2\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1}. \end{aligned}$$

Объединив последнее неравенство с неравенством (19), получим

$$\frac{|\sin(\lambda\delta_m)|}{10} \left[\|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k - 8\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1} \right] -$$

$$-\frac{1}{120}\|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^k - 2\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^{k-1} \leq \frac{4}{\delta_m} \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^{k+1}.$$

В силу предположения справедливости оценки (1) при $l = k$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{|\sin(\lambda \delta_m)|}{10} \left[1 - 8\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} C^1(K, k, b_1, b_{m+1})(1 + |\operatorname{Im} \lambda|) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{120} - 2\delta_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} C^1(K, k, b_1, b_{m+1})(1 + |\operatorname{Im} \lambda|) \right\} \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^k \leq \\ & \leq \frac{4}{\delta_m} \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^{k+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим случай

$$\begin{aligned} & |\lambda| \geq 2 \max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\} \times \\ & \times \max \left\{ \frac{4}{b' - a'}, \frac{1}{R_m}, 120C^1(K, k, b_1, b_{m+1}) \left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \right\} (1 + |\operatorname{Im} \lambda|). \end{aligned}$$

Тогда из определения числа $\delta_{k+1,m}$ имеем $|\delta_{k+1,m} \lambda| \geq 2$, $|\delta_{k+1,m} \operatorname{Im} \lambda| \leq 1$. Нам понадобится следующее элементарное неравенство: $\sup_{\alpha \in (1/2, 1)} |\sin(\alpha z)| > 1/3$ при $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ и $|z| \geq 2$.

Выбираем число $\alpha \in (1/2, 1)$ таким, чтобы выполнялось $|\sin(\alpha \lambda \delta_{k+1,m})| \geq 1/3$. Тогда из неравенства (20), $\delta_m = \alpha \delta_{k+1,m}$, получим

$$\left\{ \frac{1}{30} \left[1 - \frac{8}{120} \right] - \frac{1}{120} - \frac{1}{60} \right\} \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^k \leq \frac{4}{\delta_m} \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^{k+1}.$$

Следовательно,

$$\|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^k \leq \frac{1400}{\delta_{k+1,m}} \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^{k+1}.$$

С учётом определения числа $\delta_{k+1,m}$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^k & \leq 1400 \max \left\{ \frac{4}{b' - a'}, \frac{1}{R_m}, 120C^1(K, k, b_1, b_{m+1}) \left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \right\} \times \\ & \times (1 + |\operatorname{Im} \lambda|) \|\psi\|_{L_{\infty}^{2m}(K)}^{k+1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим случай

$$\begin{aligned} & |\lambda| < 2 \max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\} \times \\ & \times \max \left\{ \frac{4}{b' - a'}, \frac{1}{R_m}, 120C^1(K, k, b_1, b_{m+1}) \left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \right\} (1 + |\operatorname{Im} \lambda|). \end{aligned}$$

Выберем число

$$S_k \geq 2 \max\{1, \sqrt{|b_1 b_{m+1}|}\} \max \left\{ \frac{4}{b' - a'}, \frac{1}{R_m}, 120C^1(K, k, b_1, b_{m+1}) \left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \right\}$$

таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_{E_{2m}} \left\{ \left[\sum_{i=1}^m |b_{m+1} p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m} |b_1 p_i(\xi)| \right] + m|\lambda|(|b_1| + |b_{m+1}|) \right\} d\xi < \frac{1}{8}$$

для любого $E_{2m} \subset K$, $\text{mes } E_{2m} \leq 1/(S_k(1 + |\text{Im } \lambda|))$. Это возможно в силу суммируемости функций $p_i(\xi)$, $i = \overline{1, 2m}$, на компакте K . Определим число

$$\delta_m^{k+1} = \frac{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}{2S_k(1 + |\text{Im } \lambda|)}.$$

Тогда из формул (11) и (12) при $l = k$ находим, что

$$\|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k \leq 2 \max_{x \in [a' + \delta_m^{k+1}, b' - \delta_m^{k+1}]} |\psi(x)| + \frac{1}{8} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k + 2m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \delta_m^{k+1} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{7}{16} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k - m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \delta_m^{k+1} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1} \leq \max_{x \in [a' + \delta_m^{k+1}, b' - \delta_m^{k+1}]} |\psi(x)|. \quad (22)$$

Из формулы (13) при $t = \delta_m^{k+1}$ и $l = k + 1$ следует оценка

$$\begin{aligned} 2\delta_m^{k+1} \max_{x \in [a' + \delta_m^{k+1}, b' - \delta_m^{k+1}]} |\psi(x)| &\leq 2m(|b_1| + |b_{m+1}|) \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1} + \\ &+ \frac{1}{8} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1} + \frac{1}{8} \delta_m^{k+1} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} (\delta_m^{k+1})^2 \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a' + \delta_m^{k+1}, b' - \delta_m^{k+1}]} |\psi(x)| &\leq \frac{m(|b_1| + |b_{m+1}|) + 1/16}{\delta_m^{k+1}} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1} + \\ &+ \frac{1}{16} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k + \frac{m}{2} \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \delta_m^{k+1} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая (22), из последнего соотношения имеем

$$\frac{3}{8} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k \leq \frac{3m}{2} \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \delta_m^{k+1} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k-1} + \left(m(|b_1| + |b_{m+1}|) + \frac{1}{16} \right) \frac{1}{\delta_m^{k+1}} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1}.$$

В силу определений чисел δ_m^{k+1} и S_k получим оценку

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^k &\leq 16S_k \left[m(|b_1| + |b_{m+1}|) + \frac{1}{16} \right] \left(3\sqrt{|b_1 b_{m+1}|} - 6m(|b_1| + |b_{m+1}|) \frac{1}{S_k} C^1(K, k, b_1, b_{m+1}) \right)^{-1} \times \\ &\times (1 + |\text{Im } \lambda|) \|\psi\|_{L_\infty^{2m}(K)}^{k+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из неравенств (21) и (23) следует оценка (1) при $l = k + 1$.

Теперь докажем оценку (2). Запишем формулу (7) в точках x , $x + t$, $x \in [a', (a' + b')/2]$, $t \in [0, \delta_{l+1, m}]$, в виде

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left[\cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t I + \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right]^l \psi(x + t) + \\ &+ B^{-1} \int_x^{x+t} \left(\sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (\xi - x) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \cos \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (\xi - x) I \right) (\Omega(\xi) \psi(\xi) - \psi(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее равенство по t от 0 до $\delta_{l+1,m}$ и используя неравенство (17), найдём

$$\begin{aligned} \delta_{l+1,m} |\psi^l(x)| &\leq \left(2 + \frac{2m(|b_1| + |b_{m+1}|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\right) \int_0^{\delta_{l+1,m}} |\psi^l(x+t)| dt + 2\delta_{l+1,m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \times \right. \\ &\times \int_x^{x+\delta_{l+1,m}} \left(\sum_{i=1}^{2m} |p_i(\xi)| \right) d\xi + \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|} \int_x^{x+\delta_{l+1,m}} \left(\sum_{i=1}^m |b_{m+1} p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m} |b_1 p_i(\xi)| \right) d\xi \Big\} \|\psi^l\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \delta_{l+1,m}^2 \|\psi^{l-1}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + 2m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \delta_{l+1,m}^2 \|\psi^{l-1}\|_{L_\infty^{2m}(K)}. \end{aligned}$$

С помощью неравенства Гёльдера и оценки (1) из этого соотношения в силу (16) получим

$$\begin{aligned} \delta_{l+1,m} |\psi^l(x)| &\leq \left(2 + 2m \frac{(|b_1| + |b_{m+1}|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\right) \delta_{l+1,m}^{1-1/p} \|\psi^l\|_{L_p^{2m}(K)} + \frac{1}{60} \delta_{l+1,m} \|\psi^l\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \\ &+ 2\delta_{l+1,m}^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right\} C^1(K, l, b_1, b_{m+1}) (1 + |\operatorname{Im} \lambda|) \|\psi^l\|_{L_\infty^{2m}(K)}. \end{aligned}$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\begin{aligned} |\psi^l(x)| &\leq 2 \left(1 + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\right) \delta_{l+1,m}^{-1/p} \|\psi^l\|_{L_p^{2m}(K)} + \left[\frac{1}{60} + 2\delta_{l+1,m} \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right\} C^1(K, l, b_1, b_{m+1}) (1 + |\operatorname{Im} \lambda|) \right] \|\psi^l\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leq \\ &\leq 2 \left(1 + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\right) \delta_{l+1,m}^{-1/p} \|\psi^l\|_{L_p^{2m}(K)} + \frac{1}{30} \|\psi^l\|_{L_\infty^{2m}(K)}. \end{aligned}$$

С учётом формулы (6) такое же неравенство получаем и при $x \in [(a' + b')/2, b']$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\psi^l\|_{L_\infty^{2m}(K)} &\leq 3 \left(1 + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\right) \left[\max \left\{ \frac{4}{b' - a'}, \frac{1}{R_m}, 120 C^1(K, k, b_1, b_{m+1}) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \right\} \right]^{1/p} (1 + |\operatorname{Im} \lambda|)^{1/p} \|\psi^l\|_{L_p^{2m}(K)}. \end{aligned}$$

Справедливость оценки (2) установлена. Теорема 1 доказана.

Отметим, что оценки (1) и (2) в работе [14] ранее были получены для случая $m = 1$, $b_1 = -b_2 = 1$.

4. Доказательство критерия бесселевости. Необходимость. Пусть $G = (0, 2\pi)$ и τ — произвольное действительное число. Введём множество индексов

$$I_\tau = \{k : |\operatorname{Re} \lambda_k - \tau| \leq 1, \quad |\operatorname{Im} \lambda_k| \leq C_0\},$$

где C_0 — постоянная из условия (3). Выберем положительные числа R^* и R такие, что $R \leq R^*$ и для любого множества $E \subset \overline{G}$, $\operatorname{mes} E \leq 2R^*$, выполняется неравенство

$$\omega(R) = \sup_{E \subset \overline{G}} \{\|\Omega\|_{1,E}\} \leq L^{-1},$$

где $\|\Omega\|_{1,E} = \int_E (\sum_{i=1}^{2m} |p_i(x)|) dx$, L – положительное число, выбор значения которого будет определён позже.

Пусть $k \in I_\tau$ и $x \in [0, \pi]$. Запишем формулу среднего значения (8) для точек x , $x+t$, $x+2t$ при $t \in [0, R]$:

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= 2\psi_k(x+t) \cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t - \psi_k(x+2t) + \\ &+ B^{-1} \int_x^{x+2t} \left\{ \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x+t-\xi|) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \operatorname{sign}(\xi - x - t) \times \right. \\ &\times \left. \cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x+t-\xi|) I \right\} [\Omega(\xi) \psi_k(\xi) - \theta_k \psi_{k-1}(\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Добавляя и вычитая $2\psi_k(x+t) \cos(\tau t / \sqrt{|b_1 b_{m+1}|})$ в правой части этого равенства, проинтегрируем полученное соотношение по t от 0 до R и получим

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= 2R^{-1} \int_0^R \psi_k(x+t) \cos \frac{\tau}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt - R^{-1} \int_0^R \psi_k(x+2t) dt + \\ &+ 4R^{-1} \int_0^R \psi_k(x+t) \sin \frac{\lambda_k + \tau}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t \sin \frac{\tau - \lambda_k}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt + \\ &+ R^{-1} B^{-1} \int_0^R \int_x^{x+2t} \left\{ \sin \left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x+t-\xi|) \right) \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \right. \\ &- \left. \operatorname{sign}(\xi - x - t) \cos \left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x+t-\xi|) \right) I \right\} [\Omega(\xi) \psi_k(\xi) - \theta_k \psi_{k-1}(\xi)] d\xi dt. \end{aligned}$$

Применив формулу (6) в третьем слагаемом, будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= R^{-1} \int_0^{2\pi} \psi_k(t) \chi(t) dt + \\ &+ 4R^{-1} \int_0^R \left(\cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t I - \sin \frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right) \sin \frac{\lambda_k + \tau}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t \times \\ &\times \sin \frac{\tau - \lambda_k}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \psi_k(x) + 4R^{-1} B^{-1} \int_0^R \int_x^{x+t} \left\{ \left(\sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |\xi - x|) \right) \times \right. \\ &\times \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \left(\cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |\xi - x|) I \right) \left. \right\} [\Omega(\xi) \psi_k(\xi) - \theta_k \psi_{k-1}(\xi)] d\xi \times \\ &\times \sin \frac{\tau + \lambda_k}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t \sin \frac{\tau - \lambda_k}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt + R^{-1} B^{-1} \int_0^R \int_x^{x+2t} \left\{ \left(\sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x+t-\xi|) \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \left(\cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - |x + t - \xi|) \right) I \Big\} [\Omega(\xi) \psi_k(\xi) - \theta_k \psi_{k-1}(\xi)] d\xi dt = \\
& = R^{-1} \int_0^{2\pi} \psi_k(t) \chi(t) dt + J_1 + J_2 + J_3,
\end{aligned} \tag{24}$$

где $\chi(t) = 2 \cos(\tau(x-t)/\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}) - 1/2$ при $x \leq t \leq x+R$, $\chi(t) = -1/2$ при $x+R < t \leq x+2R$ и $\chi(t) = 0$ при $t \notin [x, x+2R]$.

Учитывая $k \in I_\tau$ и используя неравенства $|\sin z| \leq 2$, $|\cos z| \leq 2$ и $|\sin z| \leq 2|z|$ при $|\operatorname{Im} z| \leq 1$, получаем для слагаемых J_1 , J_2 , J_3 оценки

$$\begin{aligned}
|J_1| & \leq 8Rm \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) |\tau - \lambda_k| |\psi_k(x)| \leq \\
& \leq 8Rm \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) (1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|) |\psi_k(x)| \leq \\
& \leq 8Rm \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) (1 + C_0) \|\psi_k\|_{\infty, 2m}, \\
|J_2| & \leq 32m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \left(\omega(R) \|\psi_k\|_{\infty, 2m} + \frac{R}{2} \|\theta_k \psi_{k-1}\|_{\infty, 2m} \right), \\
|J_3| & \leq 2m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) (\omega(R) \|\psi_k\|_{\infty, 2m} + R \|\theta_k \psi_{k-1}\|_{\infty, 2m}),
\end{aligned}$$

с учётом которых в равенстве (24) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
|\psi_k(x)| & \leq R^{-1} \left| \int_0^{2\pi} \psi_k(t) \chi(t) dt \right| + 8m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) (R(1 + C_0) + 5\omega(R)) \|\psi_k\|_{\infty, 2m} + \\
& + 18Rm \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \|\theta_k \psi_{k-1}\|_{\infty, 2m}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Аналогично доказывается (25) в случае $x \in [\pi, 2\pi]$. При этом функция $\chi(t)$ определяется следующим образом: $\chi(t) = -1/2$ при $x - 2R \leq t < x - R$, $\chi(t) = 2 \cos(\tau(x-t)/\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}) - 1/2$ при $x - R \leq t \leq x$, $\chi(t) = 0$ при $t \notin [x - 2R, x]$. Следовательно, неравенство (25) верно при любом $x \in [0, 2\pi]$.

Применив оценки (1) и (2), с учётом $1 + |\operatorname{Im} \lambda_k| \leq 1 + C_0$ из (25) получим

$$\begin{aligned}
|\psi_k(x)| & \leq R^{-1} \left| \int_0^{2\pi} \psi_k(t) \chi(t) dt \right| + m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \times \\
& \times \{ 40\omega(R) C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1}) (1 + C_0)^{1/2} + 8RC^2(G, n_k, b_1, b_{m+1}) (1 + C_0)^{3/2} + \\
& + 18RC^1(G, n_k, b_1, b_{m+1}) C^2(n_k, G, b_1, b_{m+1}) \theta_k (1 + C_0)^{3/2} \} \|\psi_k\|_{2, 2m}.
\end{aligned}$$

В силу равномерной ограниченности длин цепочек корневых вектор-функций выполняются неравенства

$$\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1}) \leq \gamma_1 = \text{const},$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) C^1(G, n_k, b_1, b_{m+1}) C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1}) \leq \gamma_2 = \text{const.}$$

Следовательно,

$$|\psi_k(x)| \leq R^{-1} \left| \int_0^{2\pi} \psi_k(t) \chi(t) dt \right| + \{40m\omega(R)\gamma_1(1+C_0)^{1/2} + \\ + 8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2} + 18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\} \|\psi_k\|_{2,2m}.$$

Умножим обе части этого неравенства на $\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}$, возведём в квадрат и применим неравенство $|\sum_{j=1}^p a_j|^2 \leq p \sum_{j=1}^p |a_j|^2$. В результате получим

$$|\psi_k(x)|^2 \|\psi_k\|_{2,2m}^{-2} \leq (2m+1)R^{-2} \left\{ \sum_{i=1}^{2m} \left| \int_0^{2\pi} \psi_k^i(t) \chi(t) dt \right|^2 \|\psi_k\|_{2,2m}^{-2} \right\} + \\ + (2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2} + 8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2} + 18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2,$$

где $\psi_k(t) = (\psi_k^1(t), \psi_k^2(t), \dots, \psi_k^{2m}(t))^T$.

Ввиду неравенства Бесселя для любого конечного множества $J \subset I_\tau$ выполняется соотношение

$$\sum_{k \in J} |\psi_k(x)| \|\psi_k\|_2^{-2} \leq 2m(2m+1)MR^{-2} \|\chi\|_{2m}^2 + (2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2} + \\ + 8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2} + 18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2 \sum_{k \in J} 1. \quad (26)$$

Сначала учитываем здесь равенство $\|\chi\|_2^2 = O(R)$, а затем выбираем число R настолько малым (соответственно и число L^{-1}), чтобы выполнялось условие

$$(2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2} + 8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2} + 18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2 \leq \frac{1}{4\pi}.$$

Проинтегрировав неравенство (26), получим

$$\sum_{k \in J} 1 \leq \text{const} R^{-1} = \text{const.}$$

Отсюда, в силу произвольности множества $J \subset I_\tau$, следует (4). Необходимость неравенства (4) доказана.

Достаточность. Для определённости возьмём интервал $G = (0, 2\pi)$. Записав формулу (6) для $\psi_k(x+t)$ при $x=0$ и умножив затем скалярно на вектор-функцию

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_{2m}(t))^T \in L_2^{2m}(0, 2\pi),$$

придём к выводу, что для выполнения неравенства Бесселя для системы

$$\varphi_k(t) = \psi_k(t) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

достаточно установить справедливость следующих неравенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \right|^2 |\varphi_k^i(0)|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (27)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \right|^2 |\varphi_k^{2m+1-i}(0)|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (28)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t p_i(\xi) \varphi_k^i(\xi) \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi) d\xi dt \right|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (29)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t p_{2m+1-i}(\xi) \varphi_k^{2m+1-i}(\xi) \cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi) d\xi dt \right|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (30)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \theta_k \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t \frac{\psi_{k-1}^i(\xi)}{\|\psi_k\|_{2,2m}} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi) d\xi dt \right|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (31)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \theta_k \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t \frac{\psi_{k-1}^{2m+1-i}(\xi)}{\|\psi_k\|_{2,2m}} \cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi) d\xi dt \right|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (32)$$

где $\varphi_k^i(\xi) = \psi_k^i(\xi) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}$.

Докажем оценку (27). В силу (2) и условий (3), (4)

$$\begin{aligned} |\varphi_k^i(0)| &= |\psi_k^i(0)| \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} \leq \|\psi_k\|_{\infty,2m} \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} \leq C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1})(1 + C_0)^{1/2} \times \\ &\times \|\psi_k\|_{2,2m} \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} \leq C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1})(1 + C_0)^{1/2} \leq \text{const}, \end{aligned}$$

так как последовательность $C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1})$ ограничена. Поэтому для справедливости (27) достаточно выполнения неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \cos \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \right|^2 \leq C \|f_i\|_2^2, \quad i = \overline{1, 2m}. \quad (33)$$

При выполнении условий (3) и (4), $\tau \geq 1$, справедливость неравенства (33) установлена в работе [1]. Отсюда следует неравенство (33) при $\text{Re } \lambda_k \in (-\infty, +\infty)$, $|\text{Im } \lambda_k| \leq C_0$, так как по условию теоремы 2 выполняется условие (4) при любом $\tau \in (-\infty, +\infty)$. Точно также доказывается неравенство (28).

Убедимся в справедливости неравенства (29). Неравенство (30) доказывается аналогично. Обозначим

$$g_i(t, \xi) = \begin{cases} f_i(t + \xi), & 0 \leq t \leq 2\pi - \xi, \\ 0, & 2\pi - \xi < t \leq 2\pi, \end{cases}$$

где $\xi \in [0, 2\pi]$, $i = \overline{1, 2m}$. Тогда в силу оценки (2) и условий (3), (4) получим

$$\begin{aligned} J_k &= \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t p_i(\xi) \varphi_k^i(\xi) \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi) d\xi dt \right|^2 = \\ &= \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t p_i(\xi) \varphi_k^i(\xi) \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi) d\xi dt \int_0^{2\pi} f_i(t) \int_0^t p_i(\xi) \varphi_k^i(\xi) \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} (t - \xi) d\xi dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} p_i(\xi) \varphi_k^i(\xi) \int_0^{2\pi} \overline{g_i(t, \xi)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt d\xi \int_0^{2\pi} \overline{p_i(\tau) \varphi_k^i(\tau)} \int_0^{2\pi} \overline{g_i(r, \tau)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r dr d\tau = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p_i(\xi) \overline{p_i(\tau)} \varphi_k^i(\xi) \overline{\varphi_k^i(\tau)} \int_0^{2\pi} \overline{g_i(t, \xi)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \times \\
&\quad \times \int_0^{2\pi} \overline{g_i(r, \tau)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r dr d\xi d\tau \leq [C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1})]^2 (1 + C_0) \times \\
&\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_i(\xi)| |p_i(\tau)| \left| \int_0^{2\pi} \overline{g_i(t, \xi)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \right| \left| \int_0^{2\pi} \overline{g_i(r, \tau)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r dr \right| d\xi d\tau \leq \\
&\leq \text{const} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_i(\xi)| |p_i(\tau)| \left| \int_0^{2\pi} \overline{g_i(t, \xi)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \right| \left| \int_0^{2\pi} \overline{g_i(r, \tau)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r dr \right| d\xi d\tau,
\end{aligned}$$

где $i = \overline{1, 2m}$. Отсюда для произвольного натурального числа N имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^N J_k \leq \text{const} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_i(\xi)| |p_i(\tau)| \times \\
&\quad \times \left(\sum_{k=1}^N \left| \int_0^{2\pi} \overline{g_i(t, \xi)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \right| \left| \int_0^{2\pi} \overline{g_i(r, \tau)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r dr \right| \right) d\xi d\tau \leq \\
&\leq \text{const} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_i(\xi)| |p_i(\tau)| \|g_i(\cdot, \xi)\|_2 \|g_i(\cdot, \tau)\|_2 d\xi d\tau, \quad i = \overline{1, 2m}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что для любого фиксированного $\xi \in [0, 2\pi]$ имеет место неравенство $\|g_i(\cdot, \xi)\|_2 \leq \|f_i\|_2$, получаем

$$\sum_{k=1}^N J_k \leq \text{const} \|p_i\|_1^2 \|f_i\|_2^2 \leq \text{const} \|f\|_{2, 2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}.$$

Отсюда, в силу произвольности числа N , следует справедливость неравенства (28).

Теперь докажем неравенство (31). В силу оценок (1), (2) и условий (3), (4)

$$\begin{aligned}
\theta_k |\psi_{k-1}^i(\xi)| \|\psi_k\|_{2, 2m}^{-1} &\leq \theta_k C^1(G, n_k, b_1, b_{m+1}) C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1}) (1 + C_0)^{3/2} \|\psi_k\|_{2, 2m} \|\psi_k\|_{2, 2m}^{-1} = \\
&= \theta_k C^1(G, n_k, b_1, b_{m+1}) C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1}) (1 + C_0)^{3/2} \leq C = \text{const}, \quad i = \overline{1, 2m}.
\end{aligned}$$

После изменения порядка интегрирования левые части неравенства (31) мажорируются рядом

$$C \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \overline{g_i(t, \xi)} \sin \frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t dt \right|^2 d\xi.$$

Этот ряд сходится в силу бесселевости системы $\{\sin(\lambda_k t / \sqrt{|b_1 b_{m+1}|})\}_{k=1}^{\infty}$, и его сумма ограничена сверху величиной $\text{const} \|f\|_{2,2m}^2$. Неравенство (31) доказано. Неравенство (32) устанавливается аналогично. Теорема 2 доказана.

Теоремы 3 и 4 доказываются аналогично соответствующим теоремам в статьях [15, 20].

Автор выражает глубокую благодарность проф. В.М. Курбанову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединённых функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1048–1053.
2. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 771–794.
3. Будаев В.Д. Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов. I // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2033–2044.
4. Ломов И.С. Оценки собственных и присоединённых функций обыкновенных дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 903–906.
5. Керимов Н.Б. Некоторые свойства собственных и присоединённых функций обыкновенных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1986. Т. 201. № 5. С. 1054–1056.
6. Курбанов В.М. О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. I // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 4. С. 464–478.
7. Крицков Л.В. Равномерная оценка порядка присоединённых функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шрёдингера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1121–1129.
8. Тихомиров В.В. Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шрёдингера со спектральным параметром // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 807–810.
9. Будаев В.Д. Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов. II // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 23–33.
10. Ломов И.С. Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 5. С. 42–52.
11. Керимов Н.Б. О безусловной базисности системы собственных и присоединённых функций дифференциального оператора четвёртого порядка // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 803–806.
12. Курбанов В.М. О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 623–631.
13. Kritskov L.V., Sersenbi A.M. Basicity in of root functions for differential equations with involution // Electron J. Differ. Equat. 2015. V. 278. P. 1–9.
14. Курбанов В.М. О бесселевости и безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 12. С. 1608–1617.
15. Курбанов В.М., Гаджиева Г.Р. Неравенство Бесселя и базисность для $2m \times 2m$ системы типа Дирака с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 584–594.
16. Курбанов В.М., Исмаилова А.И. Покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака с тригонометрическим разложением // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 648–662.
17. Курбанов В.М., Исмаилова А.И. Абсолютная и равномерная сходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 4. С. 380–383.
18. Курбанов В.М., Исмаилова А.И. Неравенство Рисса для систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 334–340.
19. Курбанов В.М., Исмаилова А.И. Двусторонние оценки для корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 487–497.
20. Kurbanov V.M., Abdullayeva A.M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // Operators and Matrices. 2018. V. 12. № 4. P. 943–954.
21. Хасси С., Оридорога Л.Л. Полнота и базисность Рисса ССПФ операторов Дирака с граничными условиями, зависящими от спектрального параметра // Мат. заметки. 2006. Т. 79. Вып. 4. С. 636–640.

22. *Лунев А.А., Маламуд М.М.* О базисном свойстве системы корневых векторов Рисса для системы типа 2×2 Дирака // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 3. Р. 255–260.
23. *Lunyv A.A., Malamud M.M.* On the Riesz basis property of the root vector system for Dirac-type systems // J. Math. Anal. and Appl. 2016. V. 441. № 1. P. 57–103.
24. *Lunyv A.A., Malamud M.M.* On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications // J. Spectr. Theory. 2015. V. 5. P. 17–70.
25. *Лунев А.А., Маламуд М.М.* О характеристических определителях граничных задач для системы типа Дирака // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2022. Т. 516. С. 69–120.
26. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. V. 96. № 5. P. 777–810.
27. *Савчук А.М., Садовнича Я.В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Соврем. математика. Фундам. направления. 2015. Т. 58. С. 128–152.
28. *Trooshin I., Yamamoto M.* Riesz basis of root vector of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems // Appl. Anal. 2001. V. 80. № 1–2. P. 19–51.
29. *Djakov P., Mityagin B.* Criteria for existence of Riesz basis consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators // J. Funct. Anal. 2012. V. 263. P. 2300–2332.
30. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // Indiana Univ. Math. J. 2012. V. 61. № 1. P. 359–398.
31. *Mykytnyk Ya.V., Puyda D.V.* Bari–Markus property of Dirac operators // Matematychni Studii. 2013. V. 40. № 2. P. 165–171.

Азербайджанский государственный
педагогический университет, г. Баку

Поступила в редакцию 24.05.2023 г.
После доработки 22.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.