

УДК 517.977.1+517.922+517.911.5

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. Е. С. Жуковский, И. Д. Серова

Рассматривается дифференциальное включение $F(t, x, \dot{x}) \ni 0$ с ограничением на производную искомой функции $\dot{x}(t) \in B(t)$, $t \in [a, b]$, где F , B – многозначные отображения, $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ суперпозиционно измеримо, $B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измеримо. В терминах свойств упорядоченного накрытия и монотонности многозначных отображений, действующих в конечномерных пространствах, для задачи Коши получены условия существования и оценки решений, условия существования решения с наименьшей производной. На основе этих результатов исследуется управляемая система вида $f(t, x, \dot{x}, u) = 0$, $\dot{x}(t) \in B(t)$, $u(t) \in U(t, x, \dot{x})$, $t \in [a, b]$.

DOI: 10.31857/S0374064123090121, EDN: WPGAZA

Введение. В статье рассматривается управляемая система не разрешённых относительно производной (неявных) нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Многие классические методы исследования “явных” управляемых систем, в частности, использующие редукцию к дифференциальному включению и после аппарат многозначного анализа (подробнее см. [1, 2]), к таким “ неявным ” системам непосредственно применить не удаётся. Кроме того, порождающие уравнения функции в данной статье не предполагаются непрерывными, и тем более гладкими (это вполне естественно для задач управления), что не позволяет использовать для исследования рассматриваемых управляемых систем известные результаты (см. [3–5]) теории неявных дифференциальных уравнений, порождаемых гладкими функциями.

Наше исследование основано на представленных в п. 1 статьи результатах о многозначных накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств. Понятие упорядоченного накрытия отображений (однозначных и многозначных) введено в работах [6, 7]. Оно было предложено в качестве аналога известного для метрических пространств свойства накрытия (называемого также метрической регулярностью [8]), эффективно используемого в исследованиях различных вопросов теории неявных дифференциальных уравнений (см., например, [9–11]). В статьях [12, 13] получены утверждения о точках совпадения двух отображений, одно из которых является упорядоченно накрывающим, а другое – изотонным, а также установлена связь данных утверждений с теоремами А.В. Арутюнова [14, 15] о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств. В [16–18] сформулированы утверждения об анитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений, и на основе этих утверждений найдены условия существования и оценки решений интегральных уравнений и краевых задач для неявных дифференциальных уравнений, аналогичные известным теоремам Чаплыгина о дифференциальном и интегральном неравенствах. В работах [19, 20] ослаблены условия теорем об анитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений, и эти результаты применены к неявным дифференциальным уравнениям высших порядков. В [21] получена теорема об анитонных возмущениях упорядоченно накрывающих многозначных отображений, с использованием которой исследованы вопросы существования решений задачи Коши для дифференциального включения неявного вида.

Здесь мы продолжаем исследование [21], уточняем условия разрешимости рассмотренного в [21] включения и определяем условия существования решения с наименьшей производной, затем применяем эти результаты к управляемой системе неявных нелинейных дифференциальных уравнений. Основными результатами настоящей работы являются условия существования и оценки решений таких систем, представленные в виде аналогов теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

1. Многозначные отображения частично упорядоченных пространств. Пусть заданы частично упорядоченные пространства $(X, \preceq)$, $(Y, \preceq)$. Для элементов $u, v \in X$ и множества $U \subset X$ обозначим

$$[v, u]_X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : v \preceq x \preceq u\}, \quad \mathcal{O}_X(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : x \preceq u\}, \quad \mathcal{O}_X(U) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\forall u \in U} \mathcal{O}_X(u).$$

Для элементов $u, v \in X$ таких, что $u \preceq v$ и $u \neq v$, будем писать $u \prec v$. Элементы $u, v \in X$, $u \neq v$, называются *сравнимыми*, если выполнено $u \prec v$ или $u \succ v$. Множество $S \subset X$, в котором любые два различных элемента сравнимы, называют *линейно упорядоченным* или *цепью*. Если для множества $U \subset X$ существует такой элемент $v \in X$, что $v \preceq x$ ($v \succeq x$) при любом $x \in U$, то множество U называют *ограниченным снизу* (*ограниченным сверху*), а элемент v – его нижней (верхней) границей. Нижнюю (верхнюю) границу $\tilde{v}$ множества U называют точной или *инфимумом* (*супремумом*), если $\tilde{v} \succ v$ ($\tilde{v} \prec v$) для любой другой его нижней (верхней) границы v . Частично упорядоченное пространство называется *нижней полурешёткой* (*верхней полурешёткой*), если в нём любое двухэлементное подмножество имеет точную верхнюю (точную нижнюю) границу. Пространство, являющееся и нижней, и верхней полурешёткой, называют *решёткой*.

Элемент $\tilde{u} \in U$ называют *минимальным* (*максимальным*) в множестве U , если для любого элемента $u \in U$, $u \neq \tilde{u}$, сравнимого с $\tilde{u}$, выполнено $u \succ \tilde{u}$ (соответственно $u \prec \tilde{u}$). Таким образом, в U могут существовать элементы, не сравнимые с минимальным и максимальным. Элемент $\tilde{u} \in U$ называют *наименьшим* (*наибольшим*) в этом множестве, если для любого элемента $u \in U$, $u \neq \tilde{u}$, выполнено $\tilde{u} \prec u$ (соответственно $\tilde{u} \succ u$). Очевидно, что наименьший (наибольший) элемент в U является в этом множестве минимальным (максимальным). Обратное утверждение не верно, но если множество U , рассматриваемое как частично упорядоченное пространство, это нижняя (верхняя) полурешётка, то в нём минимальный (максимальный) элемент является наименьшим (наибольшим).

Рассмотрим многозначное отображение $G : X \rightrightarrows Y$, т.е. отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ непустое множество $G(x) \subset Y$. Если для любого $x \in X$ множество $G(x)$ одноточечное, то отображение G становится “обычным однозначным” (стандартно обозначаем такое отображение соотношением $G : X \rightarrow Y$).

Определение 1. Отображение $G : X \rightrightarrows Y$ называют *изотонным* (*антитонным*) на множестве $U \subset X$, если для любых $x, u \in U$, таких что $x \preceq u$, и для любого $z \in G(u)$ существует $y \in G(x)$, удовлетворяющий неравенству $y \preceq z$ (соответственно $y \succeq z$). Изотонное (*антитонное*) на всём X отображение называют *изотонным* (*антитонным*).

Приведённое определение изотонности (антитонности) для однозначного отображения $G : X \rightarrow Y$ означает, что неравенство $x \preceq u$ влечёт за собой $G(x) \preceq G(u)$ (соответственно $G(x) \succeq G(u)$), т.е. для “обычных отображений” совпадает со стандартным определением этих свойств.

Определение 2. Отображение $G : X \rightrightarrows Y$ будем называть *упорядоченно накрывающим* множество $V \subset Y$, если при любом $u \in X$ справедливо вложение

$$\mathcal{O}_Y(G(u)) \cap V \subset G(\mathcal{O}_X(u)).$$

Отметим, что в случае одноточечного множества $V = \{y_0\}$ свойство упорядоченного накрывания отображения G означает, что для произвольного $u \in X$ такого, что для некоторого $y \in G(u)$ выполнено неравенство $y_0 \preceq y$, существует $x \in X$, удовлетворяющий соотношениям $x \preceq u$ и $G(x) \ni y_0$. Для того чтобы отображение G упорядоченно накрывало произвольное непустое множество $V \subset Y$, необходимо и достаточно, чтобы оно упорядоченно накрывало одноточечное множество $\{y\}$ при любом $y \in V$.

Определение свойства упорядоченного накрывания многозначных отображений введено в работах [7, 13] для случая $V = Y$.

2. Основные обозначения. Будем полагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ задан “обычный” порядок, т.е. для векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ выполнено

$x \leq u$, если $x_i \leq u_i$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим $\mathbb{R}_+^n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$. Символом $h_{\mathbb{R}^n}$ будем обозначать расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $C(\mathbb{R}^n)$ и $K(\mathbb{R}^n)$ множества всех непустых замкнутых и, соответственно, непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Многозначное отображение $G : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ со значениями $G(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, $x \in X$, будем обозначать через $G : X \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$, а если $G(x) \in K(\mathbb{R}^n)$, $x \in X$, то будем писать $G : X \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$.

Пусть заданы действительные числа $a < b$ и определено измеримое многозначное отображение $B : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$. Обозначим множество его измеримых сечений через $\mathbb{W}(B)$; множество его суммируемых сечений – через $\mathbb{L}(B)$; а символом $\mathbb{AC}(B)$ обозначим множество таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in \mathbb{L}(B)$. В случае $B(t) \equiv \mathbb{R}^n$ эти пространства будем обозначать через $\mathbb{W}^n$, $\mathbb{L}^n$ и $\mathbb{AC}^n$ соответственно. В множествах $\mathbb{W}(B)$, $\mathbb{L}(B)$ определим “привычный” порядок, полагая $x \leq u$ тогда и только тогда, когда $x(t) \leq u(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$. Пространство непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначим $\mathbb{C}^n$. Считаем, что пространства $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{L}^n$ наделены стандартными нормами $\|x\|_{\mathbb{C}^n} = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|_{\mathbb{R}^n}$,

$\|v\|_{\mathbb{L}^n} = \int_a^b |v(t)|_{\mathbb{R}^n} dt$. В обозначениях пространств индекс $n = 1$ будем опускать.

Напомним определения некоторых свойств многозначных отображений, используемых в статье (подробнее см. [22, гл. 1; 23, гл. 2]).

Многозначное отображение $B : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ называют *интегрально ограниченным* [22, с. 73], если функция $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\beta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|y|_{\mathbb{R}^n} : y \in B(t)\}$, суммируема (измеримость этой функции прямо следует из [22, следствие 1.5.9]). Очевидно, в случае интегральной ограниченности отображения B для любого $t \in [a, b]$ выполнено $B(t) \in K(\mathbb{R}^n)$, кроме того, всякое измеримое сечение такого отображения является суммируемой функцией, т.е. множества $\mathbb{W}(B)$ и $\mathbb{L}(B)$ совпадают.

Многозначное отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow C(\mathbb{R}^k)$ называют *непрерывным* (в метрике Хаусдорфа) в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, выполнено $h_{\mathbb{R}^k}(G(x_0), G(x)) < \varepsilon$. В случае скалярного аргумента, т.е. при $n = 1$, на многозначное отображение $G : \mathbb{R} \rightarrow C(\mathbb{R}^k)$ распространяются определения свойства односторонней непрерывности “обычных однозначных” отображений (см. [24]), а именно: многозначное отображение $G : \mathbb{R} \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ *непрерывно справа (слева) в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (соответственно для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$) выполнено $h_{\mathbb{R}^k}(G(x_0), G(x)) < \varepsilon$.

3. Неявное дифференциальное включение. Пусть заданы многозначные функции $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$, $B : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ и вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия: при любых $x, v, w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(\cdot, x, v, w) : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ измерима; при п.в. $t \in [a, b]$ и любом $w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, \cdot, \cdot, w) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ непрерывна справа (или при п.в. $t \in [a, b]$ и любом $w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, \cdot, \cdot, w)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1, \dots, x_n$ и $v_1, \dots, v_n$ векторных аргументов $x, v \in \mathbb{R}^n$; при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ непрерывна; функция $B : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ измерима. Отметим, что из приведённых условий на многозначное отображение F следует его суперпозиционная измеримость (см. [24, теорема 2.1]), т.е. для любых измеримых функций $x(\cdot), v(\cdot), w(\cdot) \in \mathbb{W}^n$ функция $F(\cdot, x(\cdot), v(\cdot), w(\cdot))$ также измерима.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$F(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0, \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

при дополнительном ограничении на производную искомой функции

$$\dot{x}(t) \in B(t), \quad t \in [a, b], \quad (2)$$

с начальным условием

$$x(a) = \gamma. \quad (3)$$

Решением системы включений (1), (2) будем называть всякую функцию $x \in \mathbb{AC}(B)$, удовлетворяющую включению $F(t, x(t), \dot{x}(t), \dot{x}(t)) \ni 0$ при п.в. $t \in [a, b]$.

Пусть задана функция $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ такая, что

$$\eta_0(a) \geq \gamma \quad \text{и} \quad F(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t)) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b]. \quad (4)$$

Сформулируем утверждение о существовании решения $x \in \mathbb{AC}(B)$ задачи (1)–(3), производная которого удовлетворяет неравенству $\dot{x} \leq \dot{\eta}_0$.

Определим многозначное отображение $\tilde{B} : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ соотношением

$$\tilde{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in B(t) : w \leq \dot{\eta}_0(t)\}, \quad t \in [a, b] \quad (5)$$

(при п.в. $t \in [a, b]$ множество $\tilde{B}(t)$ не пусто, поскольку $\dot{\eta}_0(t) \in B(t)$). Это отображение измеримо, так как является пересечением двух измеримых отображений: $\tilde{B}(t) = B(t) \cap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(\dot{\eta}_0(t))$. Теперь определим множество

$$\tilde{D}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma + \int_0^t \tilde{B}(s) ds = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \gamma + \int_0^t w(s) ds, \quad w \in \mathbb{L}(\tilde{B}) \right\}, \quad t \in [a, b]. \quad (6)$$

Обозначим через $F|_{\Omega} : \Omega \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ сужение многозначного отображения F на множество

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x, v, w) : t \in [a, b], \quad x \in \tilde{D}(t), \quad v \in \tilde{B}(t), \quad w \in \tilde{B}(t)\}. \quad (7)$$

Следующая теорема несколько уточняет полученные авторами в [21, теорема 4.1] достаточные условия разрешимости задачи (1)–(3). В частности, в отличие от [21, теорема 4.1] соответствующие требования к отображению F предполагаются выполненными не при всех значениях его второго аргумента $x \in \mathbb{R}^n$, а при $x \in \tilde{D}(t)$, $t \in [a, b]$. Это уточнение существенно используется в приводимых ниже утверждениях о двусторонних неравенствах (в частности, в замечании и следствии 2).

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) многозначное отображение $\tilde{B} : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ интегрально ограничено (и поэтому $\tilde{B}(t) \in K(\mathbb{R}^n)$ для п.в. $t \in [a, b]$);

2) при п.в. $t \in [a, b]$, любых значениях $x \in \tilde{D}(t)$ и $v \in \tilde{B}(t)$ многозначное отображение $F|_{\Omega}(t, x, v, \cdot) : \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ упорядоченно покрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$;

3) при п.в. $t \in [a, b]$ и любых значениях $w \in \tilde{B}(t)$ многозначное отображение $F|_{\Omega}(t, \cdot, \cdot, w) : \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ является антитонным.

Тогда существует решение $x \in \mathbb{AC}(B)$ задачи (1)–(3) такое, что $\dot{x} \leq \dot{\eta}_0$.

Доказательство теоремы 1 по сути не отличается от доказательства теоремы 4.1 в статье [21] и поэтому здесь не приводится.

Отметим, что отображение $\tilde{B}$, если $n \geq 2$, может быть интегрально ограниченным даже в случае, когда исходное отображение B имеет неограниченные значения. Например, при $n = 2$ для отображения $B : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^2)$, имеющего значениями неограниченный конус $B(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{(v_1, v_2) : -v_1 \leq v_2 \leq v_1, \quad v_1 \geq 0\}$, $t \in [a, b]$, и любой функции $\eta_0 = (\eta_{01}, \eta_{02}) \in \mathbb{AC}(B)$ получаем $\tilde{B}(t) = \{(v_1, v_2) : -\dot{\eta}_{01}(t) \leq v_2 \leq \dot{\eta}_{02}(t), \quad v_1 = \dot{\eta}_{01}(t)\}$, $t \in [a, b]$. А такое отображение $\tilde{B} : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^2)$, очевидно, интегрально ограничено.

Обозначим через $\text{Sol}_F(B) \subset \mathbb{AC}(B)$ и $\text{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ множество решений задачи (1)–(3) и множество их производных соответственно. Рассмотрим вопрос о существовании минимального и наименьшего элементов в множестве $\text{DSol}_F(B)$.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 в множестве $\text{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ существует минимальный элемент $\underline{\dot{x}}$ и для него выполнено неравенство $\underline{\dot{x}} \leq \dot{\eta}_0$.

Доказательство. Согласно теореме 1 множество $\text{DSol}_F(B) \cap \mathcal{O}_{\mathbb{L}(B)}(\dot{\eta}_0) \subset \mathbb{L}(\tilde{B})$ не пусто. Ввиду теоремы Хаусдорфа (см., например, [25, гл. 1]) в этом множестве существует максимальная цепь, обозначим её через S . Вследствие ограниченности и замкнутости множества $\mathbb{L}(\tilde{B}) \subset \mathbb{L}^n$ существует $\underline{\dot{x}} = \inf S \in \mathbb{L}(\tilde{B})$.

Так как порядок в $\mathbb{L}^n$ порождается правильным конусом неотрицательных функций, из цепи S может быть выбрана невозрастающая последовательность $\{\dot{x}^i\}_{i=1}^\infty \subset S$ такая, что (см. [12, предложение 7])

$$\underline{\dot{x}} = \inf S = \inf\{\dot{x}^i\} = \lim_{i \rightarrow \infty} \dot{x}^i.$$

Из сходимости невозрастающей последовательности $\{\dot{x}^i\}$ по норме $\mathbb{L}^n$ следует сходимость $\dot{x}^i(t) \rightarrow \underline{\dot{x}}(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$, а также очевидное неравенство $\underline{\dot{x}} \leq \dot{x}^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Поскольку $x^i \in \text{Sol}_F(B)$, $i \in \mathbb{N}$, выполнено включение

$$F(t, x^i(t), \dot{x}^i(t), \dot{x}^i(t)) \ni 0, \quad t \in [a, b], \quad i \in \mathbb{N},$$

из которого в силу антитонности при п.в. t отображения $F(t, \cdot, \cdot, \dot{x}^i(t)) : \mathbb{R}^n \times B(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ следует соотношение

$$F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \dot{x}^i(t)) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset, \quad t \in [a, b], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Так как отображение $F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ непрерывно, получаем

$$F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \underline{\dot{x}}(t)) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset, \quad t \in [a, b].$$

В силу этого соотношения из теоремы 1 следует существование решения $x \in \mathbb{AC}(\tilde{B})$ задачи (1)–(3) такого, что $\dot{x} \leq \underline{\dot{x}}$. Но так как цепь S максимальная в $\text{DSol}_F(B) \cap \mathcal{O}_{\mathbb{L}(B)}(\dot{\eta}_0)$, полученное неравенство возможно, только если $\underline{x} = x \in \text{Sol}_F(B)$, и это означает, что $\underline{\dot{x}}$ – минимальный элемент в множестве $\text{DSol}_F(B)$. Теорема доказана.

В теореме 2 утверждается не существование решения с наименьшей производной, а лишь существование такого решения $\underline{x}$, что для любого решения x либо $\underline{\dot{x}} \leq \dot{x}$, либо $\underline{\dot{x}}$ и $\dot{x}$ не сравнимы. Следующий пример показывает, что решения с наименьшей производной действительно может не существовать, причём не только для включения, но и даже для уравнения.

Пример 1. Рассмотрим при $t \in [0, 1]$ задачу Коши

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0, \tag{8}$$

$$\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t) \in [-1, 1], \tag{9}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0. \tag{10}$$

Определим соответствующие данной задаче отображения $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и $B : [0, 1] \rightarrow C(\mathbb{R}^2)$ соотношениями

$$F(t, x, v, w) \stackrel{\text{def}}{=} w_1 + w_2, \quad B(t) \stackrel{\text{def}}{=} [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Покажем, что для этих отображений выполнены условия теоремы 2 (а значит, и теоремы 1).

Прежде всего, отображение $B : [0, 1] \rightarrow C(\mathbb{R}^2)$, очевидно, интегрально ограниченное. Далее положим $\eta_0 \stackrel{\text{def}}{=} (t, t)$, $t \in [0, 1]$. Для такой функции выполнено

$$\dot{\eta}_0(t) \equiv (1, 1), \quad F(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t)) \equiv 1 + 1 \geq 0,$$

$$\tilde{B}(t) = B(t), \quad \tilde{D}(t) = [0, t] \times [0, t], \quad t \in [0, 1].$$

Рассмотрим свойства отображения F как функции второго, третьего и четвёртого аргументов. Отображение $F(t, x, v, \cdot) : \tilde{B}(t) \rightarrow \mathbb{R}$ накрывает множество $\{0\}$. Действительно, для $w_1, w_2 \in [-1, 1]$ из того, что $w_1 + w_2 \geq 0$, следует существование $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in [-1, 1]$ таких, что $\tilde{w}_1 \leq w_1$, $\tilde{w}_2 \leq w_2$ и $\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = 0$ (например, можно положить $\tilde{w}_1 = w_1$, $\tilde{w}_2 = -w_1$, тогда $\tilde{w}_2 = w_2 - (w_1 + w_2) \leq w_2$). Отображение $F(t, \cdot, \cdot, w) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ постоянное, следовательно, антитонное.

Итак, все условия теоремы 2 (и теоремы 1) выполнены. Множество производных решений рассматриваемой задачи Коши определяется соотношением

$$\text{DSol}_F(B) = \{(z(t), -z(t)) : z \in \mathbb{L}, \|z(t)\| \leq 1 \text{ при п.в. } t \in [0, 1]\}.$$

Это множество бесконечно, и любые два его различных элемента $z, \tilde{z}$ не упорядочены. Действительно, пусть $\tilde{z} > z$, тогда $\tilde{z}_1(t) > z_1(t)$ на некотором множестве $E \subset [a, b]$ положительной меры, следовательно, $\tilde{z}_2(t) = -\tilde{z}_1(t) < -z_1(t) = z_2(t)$ на E . Итак, $\tilde{z} \not\geq z$, и тем самым доказано, что в множестве $\text{DSol}_F(B)$ все элементы минимальные, но нет наименьшего элемента.

Получим дополнительные условия к условиям теоремы 1, при выполнении которых в множестве $\text{DSol}_F(B)$ существует наименьший элемент, т.е. среди решений задачи (1)–(3) есть решение с наименьшей производной.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения теоремы 1 и, кроме того, каждая i -я компонента F_i , $i = \overline{1, n}$, многозначного отображения F может быть записана в виде

$$F_i(t, x, v, w) = \tilde{F}_i(t, x, v, w_i), \quad (11)$$

где $\tilde{F}_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R})$ (F_i не зависит от переменных $w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n$), а множество $\tilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a, b]$ является нижней полурешёткой. Тогда в множестве $\text{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ существует наименьший элемент.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что в множестве $\text{DSol}_F(B)$ существует минимальный элемент $\dot{x}$. Докажем, что этот элемент будет наименьшим. Предположим, что утверждение не верно и существует также элемент $\dot{x} \in \text{DSol}_F(B)$, не сравнимый с $\dot{x}$. Определим измеримую функцию $z = (z_1, \dots, z_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с компонентами $z_i(t) = \min\{\dot{x}_i(t), \dot{x}_i(t)\}$, $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$. Так как при п.в. $t \in [a, b]$ множество $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ является нижней полурешёткой, а $z(t) = \min\{\dot{x}(t), \dot{x}(t)\}$, где $\dot{x}(t), \dot{x}(t) \in B(t)$, то $z(t) \in B(t)$. Очевидно, что функция z суммируема, таким образом, $z \in \mathbb{L}(B)$. Определим функцию $\varsigma = (\varsigma_1, \dots, \varsigma_n) \in \mathbb{AC}(B)$ соотношением

$$\varsigma_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_i + \int_a^t z_i(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}.$$

Для любого $i = \overline{1, n}$ обозначим

$$\underline{E}_i = \{t \in [a, b] : z_i(t) = \dot{x}_i(t)\}, \quad E_i = [a, b] \setminus \underline{E}_i.$$

Вследствие этого определения $z_i(t) = \dot{x}_i(t)$ при п.в. $t \in E_i$.

Рассмотрим отображение $\tilde{F}_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R})$. При п.в. $t \in \underline{E}_i$ выполнено равенство $\tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t)) = \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), \dot{x}_i(t))$. А поскольку почти всюду на $[a, b] \supset \supset \underline{E}_i$ имеет место включение $0 \in \tilde{F}_i(t, \underline{x}(t), \underline{x}_i(t), \underline{x}_i(t))$, то в силу антитонности отображения $\tilde{F}_i(t, \cdot, \cdot, \dot{x}_i(t))$ при п.в. $t \in \underline{E}_i$ существует $y \geq 0$ такой, что $y \in \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), \dot{x}_i(t)) = \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t))$. Аналогично доказывается, что при п.в. $t \in E_i$ существует $y \geq 0$, удовлетворяющий включению $y \in \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), \dot{x}_i(t)) = \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t)) = \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), \dot{\varsigma}(t), \dot{\varsigma}_i(t))$. Таким образом, при любом i почти всюду на $[a, b]$ имеет место соотношение

$$F_i(t, \varsigma(t), \dot{\varsigma}(t), \dot{\varsigma}_i(t)) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset,$$

а значит,

$$F(t, \varsigma(t), \dot{\varsigma}(t), \dot{\varsigma}(t)) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset, \quad t \in [a, b].$$

Из этого соотношения согласно теореме 1 следует существование решения $\zeta \in \text{Sol}_F(B)$ задачи (1)–(3) такого, что $\dot{\zeta} \leq z < \dot{x}$. Но это неравенство противоречит тому, что $\dot{x}$ является минимальным элементом в множестве $\text{DSol}_F(B)$. Теорема доказана.

Заметим, что порождаемая дифференциальным уравнением из примера 1 функция F не представима в виде (11), т.е. не удовлетворяет предположению теоремы 3, и в множестве решений задачи Коши из примера 1 нет решения с наименьшей производной. Рассмотрим некоторые классы дифференциальных включений, для которых соответствующее отображение F представимо в виде (11).

Сначала рассмотрим задачу Коши (1)–(3) в скалярном случае, т.е. будем полагать, что $n = k = 1$. Итак, пусть заданы многозначные функции $F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R})$, $B : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R})$ и число γ . Для такой скалярной многозначной функции F , очевидно, имеет место представление (11), и это позволяет вывести из теорем 1, 3 утверждение о разрешимости скалярной задачи Коши и о существовании решения с наименьшей производной.

Пусть задана функция $\eta_0 \in AC(B)$ такая, что

$$\eta_0(a) \geq \gamma \quad \text{и} \quad F(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t)) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b].$$

Пусть при п.в. $t \in [a, b]$ множество $B(t)$ ограничено снизу. Введём $\beta(t) = \min B(t)$, $t \in [a, b]$. Полученная функция $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима (согласно [22, следствие 1.5.9]). Определим множества $\tilde{B}(t), \tilde{D}(t) \subset \mathbb{R}$, $t \in [a, b]$, и множество $\Omega \subset [a, b] \times \mathbb{R}^3$ формулами (5), (6) и (7), соответственно.

Следствие 1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функция $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ суммируема;
- 2) при п.в. $t \in [a, b]$, любых значениях $x \in \tilde{D}(t)$ и $v \in \tilde{B}(t)$ многозначное отображение $F_\Omega(t, x, v, \cdot) : \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R})$ упорядоченно покрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}$;
- 3) при п.в. $t \in [a, b]$ и любых значениях $w \in \tilde{B}(t)$ многозначное отображение $F_\Omega(t, \cdot, \cdot, w) : \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R})$ антитонное.

Тогда существует решение $x \in AC(B)$ скалярной задачи (1)–(3) такое, что $\dot{x} \leq \dot{\eta}_0$; кроме того, в множестве $DSol_F(B) \subset L(B)$ существует наименьший элемент.

Доказательство. Из предположений данного утверждения для рассматриваемой скалярной задачи следуют условия теоремы 3 (включая условия теоремы 1). В частности, многозначное отображение $\tilde{B} : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R})$, $\tilde{B}(t) = B(t) \cap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(\dot{\eta}_0(t))$, $t \in [a, b]$, удовлетворяет соотношению $\tilde{B}(t) \subset [\beta(t), \dot{\eta}_0(t)]$, $t \in [a, b]$, и поэтому интегрально ограничено. Кроме того, любое множество на прямой $\mathbb{R}$, в том числе $B(t)$, является и нижней, и верхней полурешёткой (т.е. решёткой). Таким образом, рассматриваемое утверждение следует из теоремы 3.

Замечание. При применении сформулированных утверждений к исследованию конкретных включений наибольшие трудности вызывает проверка условия упорядоченного накрытия множества $\{0\}$ соответствующим непрерывным многозначным отображением $F_\Omega(t, x, v, \cdot)$, определённым на множестве $\tilde{B}(t)$, при $(t, x, v) \in [a, b] \times \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t)$. Для скалярного отображения из следствия 1 это условие выполнено, если для любой точки $\tilde{\omega} = (t, x, v, w) \in \Omega$ её образ $F_\Omega(\tilde{\omega})$ – связное множество и

$$F\left(t, \gamma + \int_0^t \beta(s) ds, \beta(t), \beta(t)\right) \cap \mathbb{R}_- \neq \emptyset \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b].$$

Ещё одним классом дифференциальных включений, для которых соответствующее отображение F представимо в виде (11), является включение вида

$$\dot{x} \in G(t, x, \dot{x}), \quad t \in [a, b], \quad (12)$$

где многозначная функция $G : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям: при любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ функция $G(\cdot, x, v) : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ измерима; при п.в. $t \in [a, b]$ функция $G(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ непрерывна справа (или при п.в. $t \in [a, b]$ функция $G(t, \cdot, \cdot)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1, \dots, x_n$ и $v_1, \dots, v_n$ векторных аргументов

$x, v \in \mathbb{R}^n$. Включение (12) – частный случай включения (1), в котором $k = n$, а отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ определено формулой

$$F(t, x, v, w) = -G(t, x, v) + w, \quad t \in [a, b], \quad x, v, w \in \mathbb{R}^n. \quad (13)$$

Для компонент этого отображения, очевидно, имеет место представление (11), где

$$\tilde{F}_i(t, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n, w_i) = -G_i(t, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) + w_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сформулируем утверждение о разрешимости задачи Коши для включения (12). Будем здесь предполагать, что при п.в. $t \in [a, b]$ множество $B(t)$ задано соотношением

$$B(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathbb{R}^n : w \geq \beta(t)\},$$

в котором функция $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ суммируема. Далее, пусть задана функция $\eta_0 \in AC(B)$ с начальным значением $\eta_0(a) \geq \gamma$ такая, что при п.в. $t \in [a, b]$ существует элемент $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий соотношениям

$$z \in G(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)), \quad z \leq \dot{\eta}_0(t).$$

Определённое соотношением (5) измеримое многозначное отображение $\tilde{B} : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ в данном случае принимает вид

$$\tilde{B}(t) = [\beta(t), \dot{\eta}_0(t)]_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [a, b]. \quad (14)$$

Соответственно из (6) получаем $\tilde{D}(t) = [\gamma + \int_a^t \beta(s) ds, \gamma - \eta_0(a) + \eta_0(t)]_{\mathbb{R}^n}$, $t \in [a, b]$. Определим сужение $G|_{\Theta} : \Theta \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ многозначного отображения G на множество

$$\Theta = \{(t, x, v) : t \in [a, b], \quad x \in \tilde{D}(t), \quad v \in \tilde{B}(t)\}.$$

Следствие 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) для функции $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a, b]$ существует $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$y \in G\left(t, \gamma + \int_a^t \beta(s) ds, \beta(t)\right), \quad y \geq \beta(t); \quad (15)$$

2) для любой точки $\theta = (t, x, v) \in \Theta$ её образ $G|_{\Theta}(\theta)$ – связное множество и при п.в. $t \in [a, b]$ многозначное отображение $G|_{\Theta}(t, \cdot, \cdot) : \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ изотонное.

Тогда существует решение $x \in AC(B)$ задачи Коши для включения (12) с условиями (2), (3) такое, что $\dot{x} \leq \dot{\eta}_0$; кроме того, в множестве $DSol_F(B) \in L(B)$ существует наименьший элемент.

Доказательство. Сначала заметим, что множество $\tilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$, определяемое формулой (14), это n -мерный куб, который относительно “обычного покомпонентного” порядка в $\mathbb{R}^n$ является решёткой.

Покажем, что определённое формулой (13) отображение F как функция последнего аргумента $F(t, x, v, \cdot) : \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ упорядоченно покрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $(x, v) \in \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t)$. Зададим произвольный вектор $w \in B(t)$, для которого существует $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ такой, что для его компонент справедливы соотношения

$$\bar{y}_i \in -G_i(t, x, v) + w_i, \quad \bar{y}_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

В силу (15) выполнено $\beta(t) - y \in -G(t, \gamma + \int_a^t \beta(s) ds, \beta(t)) + \beta(t)$, и в этом включении левая часть $\beta(t) - y \in \mathbb{R}^n$. Для $x \in \tilde{D}(t)$ и $v \in \tilde{B}(t)$ имеем $x \geq \gamma + \int_a^t \beta(s) ds$, $v \geq \beta(t)$. Из этих

неравенств, вследствие антитонности отображения $-G(t, \cdot, \cdot)$, заключаем, что существует $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ такой, что его компоненты удовлетворяют соотношениям

$$\underline{y}_i \in -G_i(t, x, v) + \beta_i(t), \quad \underline{y}_i \leq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Вследствие связности значений отображения G , согласно [22, теорема 1.2.37], при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $(x, v) \in \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t)$ множество

$$F_i(t, x, v, [\beta_i(t), w_i]) = \bigcup_{z \in [\beta_i(t), w_i]} (-G_i(t, x, v) + z)$$

связно в $\mathbb{R}$. Этому множеству, согласно (16), (17), принадлежат числа $\bar{y}_i \geq 0$, $\underline{y}_i \leq 0$, а следовательно, и число 0. Таким образом, при любом $i = \overline{1, n}$ для некоторого $z_i \in [\beta_i(t), w_i]$ выполнено $0 \in -G_i(t, x, v) + z_i$, и значит $F(t, x, v, \cdot) : \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ упорядоченно покрывает $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3. Утверждение доказано.

4. Задача управления. Приведённые выше результаты о дифференциальном включении (1) здесь применяются к исследованию управляемой системы не разрешённых относительно производной (неявных) нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть заданы вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$, функция $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ и многозначное отображение $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие следующим условиям: при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ функция $f(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна; при любом $u \in \mathbb{R}^m$ функция $f(\cdot, \cdot, \cdot, u) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ суперпозиционно измерима (т.е. для любых измеримых функций $x(\cdot)$, $v(\cdot)$ функция $f(\cdot, x(\cdot), v(\cdot), u)$ измерима); многозначное отображение $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ суперпозиционно измеримо.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ управляемую систему

$$f(t, x, \dot{x}, u) = 0 \quad (18)$$

с обратной связью

$$u(t) \in U(t, x(t), \dot{x}(t)). \quad (19)$$

Решением системы (18), (19) будем называть удовлетворяющую обоим соотношениям (18), (19) при п.в. $t \in [a, b]$ пару (x, u) , в которой первая компонента, называемая *траекторией*, это абсолютно непрерывная функция $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, а вторая компонента, называемая *управлением*, – измеримая функция $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Обозначим через $\text{Sol}_f^U \subset \mathbb{AC}^n \times \mathbb{W}^m$ и $\text{DSol}_f^U \subset \mathbb{L}^n \times \mathbb{W}^m$ множество решений (x, u) задачи (18), (19) и, соответственно, множество пар $(\dot{x}, u)$, где $\dot{x}$ – производная траектории.

Определим многозначное отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ формулой

$$F(t, x, v) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x, v, U(t, x, v)), \quad (t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (20)$$

Заметим, что из непрерывности функции $f(t, x, v, \cdot)$ и компактности множества $U(t, x, v)$ следует, что отображение F имеет компактные значения. Кроме того, F суперпозиционно измеримо. Рассмотрим включение

$$0 \in F(t, x, \dot{x}), \quad t \in [a, b]. \quad (21)$$

Сформулируем утверждение, позволяющее “переходить” от рассматриваемой здесь “неявной” управляемой системы (18), (19) к дифференциальному включению (21). Это утверждение аналогично известной теореме (см., например, [22, теорема 3.4.1]) о равносильности управляемой дифференциальной системы, разрешённой относительно производной, соответствующему дифференциальному включению.

Лемма. Управляемая система (18), (19) равносильна включению (21), т.е. если пара $(x, u) \in \mathbb{AC}^n \times \mathbb{W}^m$ – решение управляемой системы (18), (19), то $x \in \mathbb{AC}^n$ является решением включения (21), и обратно, если $x \in \mathbb{AC}^n$ – решение включения (21), то существует функция $u \in \mathbb{W}^m$ такая, что пара (x, u) является решением системы (18), (19).

Доказательство. Пусть пара (x, u) является решением управляемой системы (18), (19), тогда $u(\cdot) \in \mathbb{W}^m$ – измеримое сечение измеримого многозначного отображения $U(\cdot, x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$, а $x(\cdot) \in \mathbb{AC}^n$ – соответствующее решение уравнения (18). Имеем

$$0 = f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) \in f(t, x(t), \dot{x}(t), U(t, x(t), \dot{x}(t))) \quad \text{при п.в. } t \in [a, b],$$

следовательно, $x(\cdot) \in \mathbb{AC}^n$ – решение включения (21).

Обратно, пусть функция $x(\cdot) \in \mathbb{AC}^n$ является решением включения (21). Определим функцию $g : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ формулой $g(t, u) = f(t, x(t), \dot{x}(t), u)$ для всех $t \in [a, b]$ и $u \in \mathbb{R}^m$. Так как функция $f(\cdot, \cdot, \cdot, u) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ суперпозиционно измерима, то при любом $u \in \mathbb{R}^m$ функция $g(\cdot, u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ измерима, а в силу непрерывности $f(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ при п.в. $t \in [a, b]$ функция $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна. Обозначим через $V : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ многозначную функцию, определяемую формулой $V(t) = U(t, x(t), \dot{x}(t))$, $t \in [a, b]$. Так как отображение $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ суперпозиционно измеримо, то функция V измерима. Включение (21) записывается в виде $0 \in g(t, V(t))$. По лемме Филиппова об измеримом выборе (см., например, [22, теорема 1.5.15]) существует измеримое сечение u отображения V , для которого при п.в. $t \in [a, b]$ выполнено равенство $0 = g(t, u(t))$ или, что то же самое, $0 = f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))$. Лемма доказана.

Для произведения $\mathbb{V} = \mathbb{AC}^n \times \mathbb{W}^m$ определим операторы проектирования $\pi_1 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{AC}^n$, $\pi_2 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}^m$ для любой пары $v = (x, u) \in \mathbb{V}$ соотношениями

$$\pi_1 v = x, \quad \pi_2 v = u.$$

Сформулированная выше лемма означает, что для управляемой системы (18), (19) выполнено $\pi_1(\text{Sol}_f^U) = \text{Sol}_F$, где отображение F задано формулой (20).

Далее с использованием этой леммы исследуем управляемую систему (18), (19), которую для удобства формулировок условий разрешимости запишем в несколько ином виде.

Пусть заданы вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$, функция $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ и многозначные отображения $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$, $B : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие следующим условиям: при любых $x, v, w \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ функция $f(\cdot, x, v, w, u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ измерима; при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x, v \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ функция $f(t, x, v, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна; при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $w \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ функция $f(t, \cdot, \cdot, w, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна справа (или при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $w \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ функция $f(t, \cdot, \cdot, w, u)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1, \dots, x_n$ и $v_1, \dots, v_n$ векторных аргументов $x, v \in \mathbb{R}^n$; при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x, v, w \in \mathbb{R}^n$ функция $f(t, x, v, w, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна; при любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ отображение $U(\cdot, x, v) : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ измеримо; при п.в. $t \in [a, b]$ отображение $U(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ непрерывно справа (или при п.в. $t \in [a, b]$ отображение $U(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно слева) по каждой компоненте $x_1, \dots, x_n$ и $v_1, \dots, v_n$ векторных аргументов $x, v \in \mathbb{R}^n$; функция $B : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ измерима.

Рассмотрим на $[a, b]$ задачу Коши с начальным условием (3) для управляемой системы

$$f(t, x, \dot{x}, \dot{x}, u) = 0 \tag{22}$$

с обратной связью, определяемой включением (19) и ограничением (2). Множество решений этой задачи обозначим через $\text{Sol}_f^U(B) \subset \mathbb{AC}(B) \times \mathbb{W}^m$. Будем рассматривать также множество $\text{DSol}_f^U(B) \subset \mathbb{L}(B) \times \mathbb{W}^m$ пар $(\dot{x}, u)$ таких, что $(x, u) \in \text{Sol}_f^U(B)$.

Пусть задана функция $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$. Определим многозначное отображение

$$U_0 : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^m), \quad U_0(t) = U(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)), \quad t \in [a, b].$$

Согласно [24, теорема 2.1] отображение U_0 измеримо. Пусть $u_0 \in \mathbb{W}(U_0)$ – его измеримое сечение. Будем предполагать, что справедливы неравенства

$$\eta_0(a) \geq \gamma \quad \text{и} \quad f(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t), u_0(t)) \geq 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b]. \quad (23)$$

Определим измеримое многозначное отображение $\tilde{B} : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ соотношением (5), затем для каждого $t \in [a, b]$ определим множество $\tilde{D}(t) \subset \mathbb{R}^n$ соотношением (6) и множество $\tilde{U}(t) = U(t, \tilde{D}(t), \tilde{B}(t)) \subset \mathbb{R}^m$.

Через $f|_{\Xi} : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^k$ обозначим сужение функции f на множество

$$\Xi \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x, v, w, u) : t \in [a, b], \quad x \in \tilde{D}(t), \quad v \in \tilde{B}(t), \quad w \in \tilde{B}(t), \quad u \in \tilde{U}(t)\},$$

а через $U|_{\Theta} : \Theta \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ – сужение многозначного отображения U на множество

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x, v) : t \in [a, b], \quad x \in \tilde{D}(t), \quad v \in \tilde{B}(t)\}.$$

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

1) многозначное отображение $\tilde{B} : [a, b] \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ интегрально ограничено (и поэтому $\tilde{B}(t) \in K(\mathbb{R}^n)$ для п.в. $t \in [a, b]$);

2) функция $f|_{\Xi}(t, x, v, \cdot, u) : \tilde{B}(t) \rightarrow \mathbb{R}^k$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x \in \tilde{D}(t)$, $v \in \tilde{B}(t)$, $u \in \tilde{U}(t)$ упорядоченно покрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^k$;

3) функция $f|_{\Xi}(t, \cdot, \cdot, w, \cdot) : \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t) \times \tilde{U}(t) \rightarrow \mathbb{R}^k$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $w \in \tilde{B}(t)$ по каждой компоненте $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n$ и $u_1, \dots, u_n$ соответствующих векторных аргументов x, v, u убывает (не строго);

4) отображение $U|_{\Theta}(t, \cdot, \cdot) : \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ при п.в. $t \in [a, b]$ изотонно.

Тогда существует решение (x, u) задачи Коши с начальным условием (3) для управляемой системы (22) с обратной связью (19) и ограничением (2) такое, что $\dot{x} \leq \dot{\eta}_0$ и $u \leq u_0$. Кроме того, в множестве $\text{DSol}_f^U(B)$ существует пара $(\underline{x}, \underline{u})$ такая, что $\underline{x}$ – минимальный элемент в $\pi_1(\text{DSol}_f^U(B))$ и выполнено $\underline{\dot{x}} \leq \dot{\eta}_0$ и $\underline{u} \leq u_0$.

Доказательство. Введём многозначное отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ по формуле

$$F(t, x, v, w) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x, v, w, U(t, x, v)), \quad (t, x, v, w) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (24)$$

Рассмотрим включение (1) с отображением F , определённым формулой (24). В силу принятых здесь предположений это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1 (соответственно теоремы 2). В частности, из неравенств (23) следует, что для функции $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ выполнены соотношения (4). Согласно теоремам 1, 2 множество $\text{Sol}_F(B)$ решений задачи Коши (1)–(3) не пусто, а в множестве $\text{DSol}_F(B)$ производных решений есть минимальный элемент $\underline{x}$ и для него выполнено неравенство $\underline{\dot{x}} \leq \dot{\eta}_0$.

Согласно лемме 1 рассматриваемая задача управления также разрешима и для её множества решений $\text{Sol}_f^U(B)$ выполнено равенство $\pi_1(\text{Sol}_f^U(B)) = \text{Sol}_F(B)$, а следовательно, и равенство $\pi_1(\text{DSol}_f^U(B)) = \text{DSol}_F(B)$. Поэтому элемент $\underline{x}$ является минимальным в множестве $\pi_1(\text{DSol}_f^U(B))$.

Управление, соответствующее траектории $\underline{x}$, удовлетворяет при п.в. $t \in [a, b]$ включению $u(t) \in U(t, \underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))$. Вследствие изотонности отображения $U|_{\Theta}(t, \cdot, \cdot) : \tilde{D}(t) \times \tilde{B}(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ при п.в. $t \in [a, b]$ множество $\underline{U}(t) = U(t, \underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \cap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$ не пусто, соответствующее многозначное отображение $\underline{U} : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ является пересечением измеримых отображений, поэтому само измеримо. Для любого измеримого сечения $\underline{u}$ отображения $\underline{U}$ пара $(\underline{x}, \underline{u})$ – решение рассматриваемой задачи управления и $\underline{u} \leq u_0$. Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 4 в множестве $\pi_1(\text{DSol}_f^U(B))$ производных от траекторий управляемой системы есть минимальный элемент, но в множестве $\pi_2(\text{Sol}_f^U(B))$ управлений этой системы минимального элемента может не быть. Приведём соответствующий пример.

Пример 2. Рассмотрим уравнение (8) из примера 1 как тривиальную управляемую систему вида (22), в которой функция f не зависит от последнего аргумента – управления (т.е. $f(t, x, v, w, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – постоянная функция). Начальное условие и ограничение на производную траектории зададим теми же соотношениями (9), (10), что и в примере 1.

Для рассматриваемой функции $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, x, v, w, u) = w_1 + w_2$, и отображения $B : [0, 1] \rightarrow C(\mathbb{R}^2)$, $B(t) = [-1, 1] \times [-1, 1]$, справедливы предположения теоремы 1 (см. пример 1), где $\eta_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\eta_0 = (t, t)$, $t \in [0, 1]$.

Функцию обратной связи U будем здесь полагать однозначной, зададим её следующим образом. Разобьём плоскость $\mathbb{R}^2$ на два непересекающихся множества

$$V = \{v = (v_1, v_2) : v_2 < 1\}, \quad \bar{V} = \mathbb{R}^2 \setminus V = \{v = (v_1, v_2) : v_2 \geq 1\}$$

и положим $U : [-1, 1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$U(t, x, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v_1, & \text{если } v \in V, \\ 1, & \text{если } v \in \bar{V}. \end{cases}$$

Функция $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ постоянна по первым двум аргументам t , x , а как функция третьего аргумента $v = (v_1, v_2)$ непрерывна по компоненте v_1 этого аргумента и терпит разрывы по компоненте v_2 только в точках прямой $v_2 = 1$, причём непрерывна в этих точках справа (кроме одной точки $(1, 1)$, в которой непрерывна по v_2). В силу определения функции U , так как $\dot{\eta}_0(t) \equiv (1, 1) \in \bar{V}$, имеем $u_0(t) = U(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)) = 1$.

Из определений множеств $\tilde{B}(t)$, $\tilde{D}(t)$ и Θ получаем

$$\tilde{B}(t) = B(t) = [-1, 1] \times [-1, 1], \quad \tilde{D}(t) = [0, t] \times [0, t], \quad t \in [0, 1],$$

$$\Theta = \{(t, x, v) : t \in [0, 1], \quad x \in [0, t] \times [0, t], \quad v \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}.$$

Сужение $U|_{\Theta} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ функции U на множество Θ постоянно по первым двум аргументам t , x и возрастает (не строго) по каждой компоненте v_1 , v_2 последнего аргумента v .

Итак, выполнены все предположения теоремы 4. Для рассматриваемой задачи управления множество $\text{DSol}_f^U(B)$ содержит все пары $(\dot{x}, u)$ функций вида

$$\dot{x}(t) = (z(t), -z(t)), \quad u(t) = \begin{cases} z(t), & -1 < z(t) \leq 1, \\ 1, & z(t) = -1, \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

где $z \in \mathbb{L}$ – произвольная функция, удовлетворяющая почти всюду на $[0, 1]$ неравенству $|z(t)| \leq 1$. Любой элемент в множестве $\pi_1(\text{DSol}_f^U(B)) = \{(z, -z) : z \in \mathbb{L}, \quad \|z(t)\| \leq 1, \text{ при п.в. } t \in [0, 1]\}$ является минимальным. Множество $\pi_2(\text{DSol}_f^U(B))$ состоит из всевозможных функций $z \in \mathbb{L}$ таких, что $-1 < z(t) \leq 1$, $t \in [0, 1]$, и в этом множестве нет минимального элемента.

С использованием теоремы 4 получим условия существования наименьшей траектории и наименьшего допустимого управления.

Теорема 5. Пусть выполнены предположения теоремы 4 и, кроме того, каждая i -я компонента f_i , $i = \overline{1, n}$, функции f может быть записана в виде

$$f_i(t, x, v, w, u) = \tilde{f}_i(t, x, v, w_i, u), \quad (25)$$

где $\tilde{f}_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (f_i не зависит от переменных $w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n$), а множество $\tilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a, b]$ является нижней полурешёткой.

Тогда среди траекторий управляемой системы (22), (2), отвечающих условиям (3), (19), существует траектория с наименьшей производной.

Если кроме перечисленных условий при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x \in \tilde{D}(t)$, $v \in \tilde{B}(t)$ множество $U(t, x, v) \subset \mathbb{R}^k$ является нижней полурешёткой, то в множестве $\text{DSol}_f^U(B)$ существует наименьший элемент, т.е. такая пара $(\underline{\dot{x}}, \underline{u})$, что её первая компонента $\underline{\dot{x}}$ – это наименьший элемент в множестве $\pi_1(\text{DSol}_f^U(B))$, а вторая компонента $\underline{u}$ – наименьший элемент в $\pi_2(\text{DSol}_f^U(B))$.

Доказательство. При выполнении условия (25) дифференциальное включение, равносильное рассматриваемой управляемой системе, порождается многозначным отображением (24), компоненты которого могут быть представлены в виде (11). А так как ещё и $\tilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. t является нижней полурешёткой и выполняются условия теоремы 4, то справедливы все предположения теоремы 3. Согласно теореме 3 среди решений этого включения (т.е. траекторий управляемой системы) имеется функция $\underline{x} \in \mathbb{AC}(B)$ с наименьшей производной.

Пусть теперь в дополнение к рассмотренным условиям при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x \in \tilde{D}(t)$, $v \in \tilde{B}(t)$ множество $U(t, x, v) \subset \mathbb{R}^k$ является нижней полурешёткой. Тогда при п.в. $t \in [a, b]$ в компактном непустом множестве $\underline{U}(t) = U(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t)) \cap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$ имеется наименьший элемент $\underline{u}(t)$. Согласно [22, следствие 1.5.9] функция $\underline{u}(\cdot)$ измерима. Для произвольной траектории x выполнены неравенства $\underline{\dot{x}} \leq \dot{x}$ и $\underline{x} \leq x$, из которых вследствие антитонности отображения $U(t, \cdot, \cdot)$ для любого измеримого сечения u многозначного отображения $U(\cdot, x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$ справедливо неравенство $\underline{u}(t) \leq u(t)$, $t \in [a, b]$. Таким образом, пара $(\underline{\dot{x}}, \underline{u})$ является наименьшей в множестве $\text{DSol}_f^U(B)$. Теорема доказана.

Отметим, что представление компонент f_i , $i = \overline{1, n}$, функции f в виде (25) имеет место для управляемой системы в скалярном случае, т.е. при $n = k = 1$, а также для управляемой системы

$$\dot{x} = g(t, x, \dot{x}, u), \quad t \in [a, b],$$

с функцией $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для таких управляемых систем из теоремы 5 несложно вывести условия существования траектории с наименьшей производной и наименьшего управления.

Результаты пп. 1 и 3 получены первым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, <https://rscf.ru/project/23-11-45014/>). Результаты пп. 2 и 4 получены вторым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В., Асеев С.М., Благодатских В.И. Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 3–23.
2. Mordukhovich B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation II. Application. Berlin, 2006.
3. Давыдов А.А. Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешённого относительно производной в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 2. С. 1–10.
4. Davydov A., Ishikawa G., Izumiya S., Sun W.-Z. Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane // Japanese J. of Math. 2008. V. 3. № 1. P. 93–120.
5. Ремизов А.О. Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 11. С. 105–124.
6. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.
7. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.
8. Иоффе А.Д. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55. № 3. С. 103–162.
9. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешённым относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

10. Жуковский Е.С., Мерчела В. О накрывающих отображениях в обобщённых метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений // Уфимский мат. журн. 2020. Т. 12. № 4. С. 42–55.
11. Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е. Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 205–213.
12. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Appl. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
13. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Appl. 2016. V. 201. P. 330–343.
14. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
15. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Точки совпадения и обобщённые точки совпадения двух многозначных отображений // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2020. Т. 308. С. 42–49.
16. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.
17. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.
18. Бенараб С., Жуковская З.Т., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1471–1482.
19. Бенараб С. Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 216–220.
20. Бенараб С. О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n -го порядка // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 225–233.
21. Zhukovskiy E.S., Serova I.D., Panasenکو E.A., Burlakov E.O. On order covering set-valued mappings and their applications to the investigation of implicit differential inclusions and dynamic models of economic processes // Adv. in Systems Sci. and Appl. 2022. V. 22. № 1. P. 176–191.
22. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М., 2016.
23. Арутюнов А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М., 2014.
24. Серова И.Д. Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщённых условиях Каратеодори // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 305–314.
25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.

Тамбовский государственный университет
имени Г.Р. Державина,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.
После доработки 18.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.