

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.2

О СУЩЕСТВОВАНИИ БЕСКОНЕЧНОГО СПЕКТРА ЗАТУХАЮЩИХ ВЫТЕКАЮЩИХ ТЕ-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН ОТКРЫТОГО НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА, ПОКРЫТОГО СЛОЕМ ГРАФЕНА

© 2023 г. Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин

Рассматривается задача о вытекающих волнах неоднородной волноведущей структуры, покрытой слоем графена, которая сводится к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Для определения решения используется вариационная формулировка задачи. Вариационная задача сводится к изучению оператор-функции. Исследуются свойства оператор-функции, необходимые для анализа её спектральных свойств. Доказываются теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости.

DOI: 10.31857/S0374064123090054, EDN: WORJJJ

Введение. Появление новых материалов, таких как графен, приводит к необходимости рассмотрения краевых задач электродинамики нового типа, когда условия сопряжения на границе диэлектриков содержат бесконечно тонкий проводящий слой графена [1–4]. При этом требуются как теоретическое исследование свойств задачи, так и разработка численных методов для её решения и проведение практически важных расчётов для конкретных структур.

Нами рассматривается металлодиэлектрический слой кругового поперечного сечения, покрытый слоем графена и расположенный в свободном пространстве. Цель исследования – изучить спектр собственных вытекающих волн, которые могут существовать в структуре. Основным теоретическим результатом в таких задачах обычно является теорема о дискретности спектра [5, 6]. Именно этот результат будет доказан ниже для металлодиэлектрического слоя, покрытого слоем графена. Насколько известно авторам, подобные результаты для этой задачи ранее не были получены.

В статье рассматривается задача о спектре вытекающих волн, которые растут при удалении от волновода. Вариационным методом задача сводится к исследованию оператор-функции в пространстве Соболева. Доказывается дискретность спектра задачи.

Важно отметить, что помимо доказательства теоремы о дискретности спектра получена и изучена система вариационных уравнений, к которой сводится краевая задача на собственные значения. Эта система уже может решаться численно. Некоторые результаты о распространении поляризованных электромагнитных волн в диэлектрической пластине, покрытой графеном, имеются в работах [7–9].

1. Задача о вытекающих волнах. Рассмотрим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$. Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 \equiv \text{const}$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. В $\mathbb{R}^3$ помещён цилиндрический диэлектрический волновод

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

с образующей, параллельной оси Oz , и с круговым поперечным сечением. Волновод неограниченно продолжается в направлении z . Сечение волновода, перпендикулярное его оси, представляет собой кольцо с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r (рисунок). Границы $\rho = r_0$ – проекция поверхности идеально проводящего, бесконечно тонкого экрана, $\rho = r$ – проекция поверхности соприкосновения диэлектриков. Волновод заполнен неоднородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon_0\varepsilon(\rho)$.

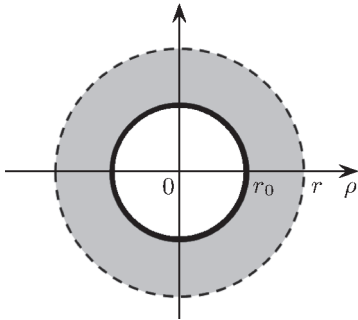


Рисунок. Сечение волновода.

конечном объёме волновода ограничена, на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля

$$E_\varphi|_{\rho=r_0} = 0; \quad (2)$$

для касательных составляющих полей на границе раздела сред

$$E_\varphi|_{r+0} - E_\varphi|_{r-0} = 0, \quad H_z|_{r+0} - H_z|_{r-0} = -\sigma E_\varphi|_{r+0}, \quad (3)$$

здесь σ – проводимость графена (постоянная комплексная величина такая, что $\sigma' = \text{Re } \sigma \geq 0$ и $\sigma'' = \text{Im } \sigma \geq 0$); а также условие излучения на бесконечности для вытекающих волн [6, с. 63].

Система уравнений Максвелла (1) записана в нормированном виде. Перейдём к безразмерным величинам [5]:

$$k_0 \rho \rightarrow \rho, \quad \gamma \rightarrow \frac{\gamma}{k_0}, \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E},$$

где $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$, ω – круговая частота, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума (временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен).

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве равна

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon(\rho), & r_0 \leq \rho \leq r, \\ 1, & \rho > r. \end{cases}$$

Среда предполагается изотропной и немагнитной. Пусть также $\varepsilon(\rho)$ – вещественная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[r_0, r]$.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$i\gamma H_\rho - H'_z = -i\tilde{\varepsilon} E_\varphi, \quad -i\gamma E_\varphi = iH_\rho, \quad \frac{1}{\rho}(\rho E_\varphi)' = iH_z. \quad (4)$$

Выразим функции H_ρ и H_z через E_φ из второго и третьего уравнений системы (4) и получим

$$H_\rho = -\gamma E_\varphi, \quad H_z = -i \frac{(\rho E_\varphi)'}{\rho},$$

откуда следует, что поле ТЕ-волны может быть представлено в виде скалярной функции

$$u := iE_\varphi(\rho).$$

Тем самым задача сводится к нахождению функции u . Всюду $(\cdot)'$ обозначает дифференцирование по переменной ρ .

Из первого уравнения системы (4) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$u'' + \frac{1}{\rho}u' - \frac{1}{\rho^2}u + (\tilde{\varepsilon} - \gamma^2)u = 0. \quad (5)$$

Граничные условия (2) и условия сопряжения (3) примут вид

$$u(r-0) = u(r+0), \quad u'(r-0) = u'(r+0) + i\sigma u(r+0), \quad (6)$$

где $[f]|_{\rho_0} = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0-0} f(\rho) - \lim_{\rho \rightarrow \rho_0+0} f(\rho)$.

При $\rho > r$ имеем $\tilde{\varepsilon} = 1$, тогда из (5) получаем

$$u'' + \frac{1}{\rho}u' - \frac{1}{\rho^2}u - \lambda^2 u = 0,$$

где $\lambda^2 = \gamma^2 - 1$.

Учитывая условие на бесконечности для вытекающих волн, выберем решение последнего уравнения в виде

$$u(\rho; \gamma) = CI_1(\lambda\rho), \quad (7)$$

где I_1 – модифицированная функция Бесселя (функция Инфеляда) [10], C – некоторая постоянная.

При $r_0 \leq \rho \leq r$ имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(\rho)$, и из (5) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$Lu := (\rho u')' - \frac{1}{\rho}u + \rho(\varepsilon - 1 - \lambda^2)u = 0. \quad (8)$$

Определение. Если существует нетривиальная функция u , отвечающая некоторому $\lambda \in \mathbb{C}$ и удовлетворяющая условиям (6), которая при $\rho > r$ определяется формулой (7), а при $r_0 \leq \rho \leq r$ является решением уравнения (8), то λ называется *характеристическим числом* задачи (6)–(8).

Задача о вытекающих волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра λ .

2. Задача о спектре оператор-функции. Будем искать решения u задачи в пространстве Соболева [11] $H_0^1(r_0, r; \rho)$ со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_1 = \int_{r_0}^r \rho(f' \bar{g}' + f \bar{g}) d\rho, \quad \|f\|_1^2 = (f, f)_1 = \int_{r_0}^r \rho(|f'|^2 + |f|^2) d\rho.$$

Замечание. Здесь использовано обозначение пространства Соболева $H_0^1(r_0, r; \rho)$, не совпадающее со стандартным (в нашем случае $f|_{r_0} = 0$, но, вообще говоря, $f|_r \neq 0$).

Дадим вариационную формулировку задачи. Умножим уравнение (8) на произвольную пробную функцию v , считая её пока непрерывно дифференцируемой на отрезке $[r_0, r]$. Используя формулу Грина для уравнения (8) на отрезке $[r_0, r]$, получим

$$\lambda^2 \int_{r_0}^r \rho u \bar{v} d\rho + \int_{r_0}^r \rho u' \bar{v}' d\rho + \int_{r_0}^r \rho \left(\frac{1}{\rho^2} - \varepsilon - 1 \right) u \bar{v} d\rho - ru'(r-0)\bar{v}(r-0) = 0. \quad (9)$$

Зная решение (7), выразим из формул (6) значения производной в точке $\rho = r$ следующим образом:

$$u'(r+0) = \lambda \frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)} u(r+0). \quad (10)$$

Из (9) с учётом (10) имеем

$$\lambda^2 \int_{r_0}^r \rho u \bar{v} d\rho + \int_{r_0}^r \rho(u' \bar{v}' + u \bar{v}) d\rho + \int_{r_0}^r \left(\frac{1}{\rho} - \rho \varepsilon \right) u \bar{v} d\rho - \lambda \frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)} u(r) \bar{v}(r) - i\sigma ru(r) \bar{v}(r) = 0. \quad (11)$$

Вариационное соотношение (11) получено для гладких функций v и распространяется на любые функции $v \in H_0^1(r_0, r; \rho)$ по непрерывности.

Интегралы, входящие в (11), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$, заданные на $H_0^1(r_0, r; \rho)$, от аргументов u, v . Эти формы определяют [12] некоторые линейные ограниченные операторы $T : H_0^1(r_0, r; \rho) \rightarrow H_0^1(r_0, r; \rho)$ по формуле

$$t(u, v) = (Tu, v), \quad v \in \tilde{H}_0^1,$$

при условии, что сами формы ограничены: $|t(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность – из оценок

$$\|Tu\|^2 = t(u, Tu) \leq C \|u\| \|Tu\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$\begin{aligned} k(u, v) &:= \int_{r_0}^r \rho u \bar{v} d\rho = (Ku, v), \quad \tilde{k}(u, v) := \int_{r_0}^r \left(\frac{1}{\rho} - \rho \varepsilon \right) u \bar{v} d\rho = (\tilde{K}u, v), \\ a(u, v) &:= \int_{r_0}^r \rho (u' \bar{v}' + u \bar{v}) d\rho = (Iu, v), \quad s(u, v) := u(r) \bar{v}(r) = (Su, v), \end{aligned}$$

где $v \in H_0^1(r_0, r; \rho)$.

Ограниченность формы $a(u, v)$ очевидна. Ограниченность форм $k(u, v)$ и $\tilde{k}(u, v)$ следует из теоремы Соболева–Кондрашева [11, с. 44]. Ограниченность формы $s(u, v)$ показана в статье [13].

Теперь вариационную задачу (11) можно записать в операторном виде

$$(N(\lambda)u, v) = 0, \quad u \in \tilde{H}_0^1,$$

или в эквивалентном

$$N(\lambda)u := (\lambda^2 K + I + \tilde{K} - s(\lambda)S - i\sigma S)u = 0, \quad (12)$$

где

$$s(\lambda) = \lambda \frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)}.$$

Уравнение (12) – операторная запись вариационного соотношения (11).

3. Свойства оператор-функции. Справедливы следующие свойства операторов [13].

Лемма 1. Ограниченные операторы $Ku\tilde{K} : H_0^1(r_0, r; \rho) \rightarrow H_0^1(r_0, r; \rho)$ являются компактными и $K > 0$.

Лемма 2. Оператор $S : H_0^1(r_0, r; \rho) \rightarrow H_0^1(r_0, r; \rho)$ является компактным конечномерным оператором.

Лемма 3. Функция $s(\lambda)$ является мероморфной функцией с полюсами в точках из множества $\Lambda_0 := \{\lambda : I_1(\lambda r) = 0\}$.

Доказательство мероморфности заключается в проверке свойств указанной функции. Согласно [14, с. 191] функция $s(\lambda)$ имеет только простые полюсы в качестве особых точек, лежащие на мнимой оси. Совокупность всех полюсов функции $s(\lambda)$ совпадает с Λ_0 .

Теорема 1. Оператор-функция $N(\gamma) : H_0^1(r_0, r; \rho) \rightarrow H_0^1(r_0, r; \rho)$ является конечно-мероморфной и фредгольмовой в поле $\mathbb{C}$.

Доказательство. В $\mathbb{C}$ функция $N(\lambda)$ является конечно-мероморфной [15] (как функция от λ) в силу леммы 3. Из лемм 1 и 2 следует, что оператор-функция $N(\lambda)$ является фредгольмовой, как сумма обратимого I и компактных K , $\tilde{K}$ и S операторов. Теорема доказана.

Лемма 4. Существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $N(\lambda)$ непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество $\varrho(N) := \{\lambda : \text{существует } N^{-1}(\lambda) : H_0^1(r_0, r; \rho) \rightarrow H_0^1(r_0, r; \rho)\}$ оператор-функции $N(\lambda)$ не пусто; $\varrho(N) \neq \emptyset$.

Доказательство. Для доказательства непустоты резольвентного множества $\varrho(N)$ оператор-функции $N(\lambda)$ достаточно найти такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что из $N(\lambda_0)u = 0$ будет следовать $u = 0$. Тогда из альтернативы Фредгольма получим, что оператор $N(\lambda)$ непрерывно обратим. Рассмотрим следующую форму:

$$\operatorname{Im} (N(\lambda)u, u) = 2\lambda'\lambda'' \int_{r_0}^r \rho |u|^2 d\rho - \operatorname{Im} s(\lambda) |u(r)|^2 - \sigma'' |u(r)|^2, \quad (13)$$

где $\lambda_0 = \lambda' + i\lambda''$. Учтём, что функции $I_0(\lambda r)$ и $I_1(\lambda r)$ вещественнозначные на мнимой оси, все нули функций $I_0(\lambda r)$ и $I_1(\lambda r)$ перемежаются [14, с. 191]. Выберем $\lambda_0 = i\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\beta} > 0$, так, что $I_0(\lambda_0 r) = 0$. Тогда в окрестности точки λ_0 найдутся такие $\lambda_1 = i\beta_1$ и $\lambda_2 = i\beta_2$, что $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \beta_1 < \tilde{\beta} < \beta_2$ и

$$\frac{I_0(\lambda_1 r) I_0(\lambda_2 r)}{I_1(\lambda_1 r) I_1(\lambda_2 r)} < 0.$$

Следовательно, выражения $\operatorname{Im} s(\lambda_1)$ и $\operatorname{Im} s(\lambda_2)$ имеют разные знаки. Пусть для определённости $\operatorname{Im} s(\lambda_1) > 0$. Функция $s(\lambda)$ непрерывна в окрестности λ_1 . Поэтому в δ -окрестности точки λ_1 она сохраняет знак при достаточно малом $\delta > 0$ (при $|\lambda - \lambda_1| < \delta$). Выберем $\lambda_0 = \lambda' + i\lambda''$ так, что $\lambda'' = \beta_1 > 0$, $\lambda' < 0$ и $|\lambda_0 - \lambda_1| < \delta$. Получаем, что все слагаемые в правой части (13) неположительны, $\operatorname{Im} (N(\lambda_0)u, u) \leq 0$. Далее, равенство $\operatorname{Im} (N(\lambda_0)u, u) = 0$ необходимо влечёт за собой

$$\int_{r_0}^r \rho |u|^2 d\rho = 0,$$

откуда находим, что $u \equiv 0$ (как элемент пространства $H_0^1(r_0, r; \rho)$). Лемма доказана.

Теорема 2. Спектр оператор-функции $N(\lambda) : H_0^1(r_0, r; \rho) \rightarrow H_0^1(r_0, r; \rho)$ является дискретным в поле $\mathbb{C}$, т.е. имеет конечное число характеристических чисел конечной алгебраической кратности в любом компакте K_0 .

Утверждение теоремы 2 является следствием теоремы 1, леммы 4 и теоремы о конечно-мерном оператор-функции [15].

Заключение. В статье рассмотрена задача на собственные значения о распространении электромагнитных волн в металлодиэлектрическом волноводе кругового поперечного сечения, покрытом графеном. Вариационным методом краевая задача на собственные значения сведена к изучению спектра оператор-функции в пространстве Соболева. Доказаны фредгольмовость и конечно-мерность оператор-функции на комплексной плоскости, а также дискретность спектра оператор-функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Geim A.K., Novoselov K.S. The rise of graphene // Nature Materials. 2007. V. 6. P. 183–191.
2. Hanson G.W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // J. of Appl. Phys. 2008. V. 103. Art. 064302.
3. Falkovsky L.A. Optical properties of graphene // J. of Phys.: Conf. Ser. 2008. V. 129. Art. 012004.
4. Mikhailov S.A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // Phys. Rev. B. 2016. V. 93. Art. 085403.
5. Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, 2009.

6. *Shestopalov Y., Smirnov Y., Smolkin E.* Optical Waveguide Theory. Mathematical Models, Spectral Theory and Numerical Analysis. Springer Ser. in Optical Sciences. V. 237. Singapore, 2022.
7. *Hajian H., Rukhlenko I.D., Leung P.T., Caglayan H., Ozbay E.* Guided plasmon modes of a graphene-coated Kerr slab // *Plasmonics*. 2016. V. 11. P. 735–741.
8. *Smirnov Y., Tikhov S.* The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene // *Photonics*. 2023. V. 10. P. 523.
9. *Смирнов Ю.Г., Тихов С.В., Гусарова Е.В.* О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном // *Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки*. 2022. № 3. С. 11–18.
10. *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М., 1978.
11. *Adams R.* Sobolev Spaces. New York, 1975.
12. *Kato T.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
13. *Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.* О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода // *Дифференц. уравнения*. 2017. Т. 53. № 10. С. 1298–1309.
14. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
15. *Гохберг И.Ц., Сигал Е.И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // *Мат. сб.* 1971. Т. 84 (126). № 4. С. 607–629.

Пензенский государственный университет,
Университет Евле, Швеция

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.
После доработки 02.06.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.