

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.911.5+517.927

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ
С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 г. Д. К. Потапов

Рассматривается непрерывная аппроксимация задачи Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Аппроксимирующая задача получается из исходной малыми возмущениями спектрального параметра и аппроксимацией нелинейности каратеодориевыми функциями. Вариационным методом доказывается теорема о близости решений аппроксимирующей и исходной задач. Полученная теорема применяется к одномерным моделям Гольдштика и Лаврентьева об отрывных течениях.

DOI: 10.31857/S0374064123090042, EDN: WORAIG

Введение. Проблема исследования вопроса близости решений аппроксимирующей задачи с непрерывной нелинейностью и решений исходной задачи с разрывной нелинейностью была поставлена в работе [1] и, безусловно, является актуальной. Для эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями данная проблема изучалась в статьях [2–4]. Аппроксимация основных краевых задач для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью исследовалась в работах [5–8]. Аппроксимация задачи с разрывной нелинейностью последовательностью задач с непрерывной нелинейностью для оператора Лапласа на конкретных примерах склейки вихревых и потенциальных течений рассматривалась в [9]. Непрерывным аппроксимациям задачи Гольдштика об отрывных течениях несжимаемой жидкости посвящены статьи [10, 11]. В данной работе, являющейся продолжением этих исследований, рассматриваются непрерывные аппроксимации задачи Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной нелинейностью.

Проблема существования решений задачи Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью изучалась в работах [12–18], а обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с разрывными правыми частями исследовались в [19–28].

В отличие от работ [2–4], в данной статье изучаемые задачи содержат спектральный параметр, в работах [3, 4] рассматривался другой вид аппроксимаций нелинейности. Кроме того, в отличие от работ [2–10], рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями, а не уравнения с частными производными. По сравнению с работами [12–14, 17] в данной статье ослабляются ограничения на множество точек разрыва нелинейности, изучаются полуправильные решения, исследуется проблема близости решений аппроксимирующей и исходной задач.

1. Постановка задачи. Определения и обозначения. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, кривые $S_i = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], u = \varphi_i(x)\}$, $\varphi_i \in W_q^2((a, b))$, $q > 1$, $i = \overline{1, m}$, попарно не пересекаются. Будем считать, что $\varphi_i(x) < \varphi_{i+1}(x)$ для любого $x \in [a, b]$ и $i = \overline{1, m-1}$. Существует число $d > 0$ такое, что для любого $x \in [a, b]$ отрезки $[\varphi_i(x) - d, \varphi_i(x) + d]$, $i = \overline{1, m}$, попарно не пересекаются.

Кривые S_i , $i = \overline{1, m}$, разбивают область $D = (a, b) \times \mathbb{R}$ на непересекающиеся подобласти $D_0 = \{(x, u) \in D : u < \varphi_1(x)\}$, $D_i = \{(x, u) \in D : \varphi_i(x) < u < \varphi_{i+1}(x)\}$, $i = \overline{1, m-1}$, $D_m = \{(x, u) \in D : u > \varphi_m(x)\}$.

На множествах $\overline{D_i}$ заданы каратеодориевы функции $g_i(x, u)$ такие, что для почти всех (п.в.) $x \in (a, b)$ и любого u верны неравенства

$$|g_i(x, u)| \leq \alpha(x), \quad (x, u) \in \overline{D_i}, \quad (1)$$

где $\alpha \in L_q((a, b))$, $q > 1$, $i = \overline{0, m}$.

Функция $g : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и на D_i совпадает с $g_i(x, u)$, причём для п.в. $x \in (a, b)$, если $(x, u) \in S_i$, $g(x, u)$ принадлежит отрезку с концами $g_{i-1}(x, u)$ и $g_i(x, u)$, $i = \overline{1, m}$. Будем предполагать, что для п.в. $x \in (a, b)$ справедливо равенство

$$g(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и

$$g_{i-1}(x, u) \leq g_i(x, u), \quad \text{если } (x, u) \in S_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Зафиксируем последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}$, сходящуюся к нулю и ограниченную сверху определённым выше числом d .

Нелинейность $g(x, u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $\{g^k(x, u)\}$ таких, что для п.в. $x \in (a, b)$ выполняются следующие условия:

- (i) $g^k(x, u) = g(x, u)$, если $|u - \varphi_i(x)| > \delta_k$ для любого $i = \overline{1, m}$;
- (ii) для любого $u \in \mathbb{R}$

$$|g^k(x, u)| \leq \alpha(x), \quad (4)$$

где функция α из оценки (1).

Исходная задача Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной u нелинейностью $g(x, u)$ имеет вид

$$Lu(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in (a, b), \quad (5)$$

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (6)$$

Здесь $Lu(x) \equiv -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)$ – дифференциальный оператор с коэффициентами $p \in C_{1,\beta}([a, b])$, $q \in C_{0,\beta}([a, b])$, $0 < \beta \leq 1$, λ – положительный параметр.

Нам потребуются следующие определения.

Определение 1. *Сильным решением* задачи (5), (6) называется функция $u \in W_q^2((a, b))$, $q > 1$, удовлетворяющая для п.в. $x \in (a, b)$ уравнению (5) и граничным условиям (6).

Определение 2. *Полуправильным решением* задачи (5), (6) называется такое сильное её решение u , значение которого $u(x)$ для п.в. $x \in (a, b)$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

Определение 3. *Прыгающим разрывом* функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется такое $u \in \mathbb{R}$, что $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim_{s \rightarrow u\pm} f(s)$.

Отметим, что в силу равенства (2) функция, почти всюду на интервале (a, b) равная нулю, является сильным решением задачи (5), (6), а из неравенства (3) следует, что для п.в. $x \in (a, b)$ точки разрыва функции $g(x, \cdot)$ прыгающие.

Пусть $X = H_0^1((a, b))$. С задачей (5), (6) свяжем функционал J^λ , определённый на функциональном пространстве X , следующим образом: $J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u)$, где

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_a^b p(x)(u'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b q(x)u^2(x) dx, \quad J_2(u) = \int_a^b dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds.$$

Будем предполагать, что выполнено условие

- (iii) найдётся $\hat{u} \in X$, для которого $J_2(\hat{u}) > 0$.

В дальнейшем рассматриваются два случая: коэрцитивный и резонансный.

В коэрцитивном случае ($J_1(u) \geq \gamma \|u\|^2$, $u \in X$, γ – положительная константа, независимая от u) из теоремы в работе [15] следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что $\inf_{v \in X} J^\lambda(v) < 0$

для любого $\lambda > \lambda_0$, найдётся $\hat{u}_0 \in X$, для которого $J^\lambda(\hat{u}_0) = \inf_{v \in X} J^\lambda(v)$, и любое такое $\hat{u}_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (5), (6).

Если ядро дифференциального оператора с соответствующими граничными условиями ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предположим выполнение условия

(iv) линейное пространство $N(L)$ решений задачи

$$Lu = 0, \quad x \in (a, b),$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

одномерно и $\psi(x)$ – базисная функция этого подпространства.

Кроме того, пусть для базисной функции ψ пространства $N(L)$ выполнены условия Ландесмана–Лазера

$$\int_{\psi < 0} g_-(x)\psi(x) dx + \int_{\psi > 0} g_+(x)\psi(x) dx < 0 < \int_{\psi > 0} g_-(x)\psi(x) dx + \int_{\psi < 0} g_+(x)\psi(x) dx, \quad (7)$$

где $g_{\pm}(x) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} g(x, u)$.

Известно [29], что условия Ландесмана–Лазера влекут за собой равенство

$$\lim_{u \in N(L), \|u\| \rightarrow +\infty} J_2(u) = -\infty.$$

Поэтому если дополнительно потребовать неотрицательность $J_1(u)$ на X , то из теоремы 4 в работе [30] следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что $\inf_{v \in X} J^\lambda(v) < 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$, найдётся $\hat{u}_0 \in X$, для которого $J^\lambda(\hat{u}_0) = \inf_{v \in X} J^\lambda(v)$, и любое такое $\hat{u}_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (5), (6).

Зафиксируем $\lambda > \lambda_0$, и пусть числовая последовательность $\{\lambda_k\}$ сходится к λ , $\lambda_k > 0$. Рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$Lu(x) = \lambda_k g^k(x, u(x)), \quad x \in (a, b), \quad (8)$$

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (9)$$

где аппроксимирующая последовательность каратеодориевых функций $\{g^k(x, u)\}$ определена выше.

Положим

$$J^k(u) = J_1(u) - \lambda_k \int_a^b dx \int_0^{u(x)} g^k(x, s) ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

По построению функция $g^k(x, u)$ каратеодориева и для неё при п.в. $x \in (a, b)$ верна оценка (4) с функцией α из (1).

Согласно теореме из [15] (коэрцитивный случай) и теореме 4 из [30] (резонансный случай) для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $u_k \in X$ такое, что $J^k(u_k) = \inf_{v \in X} J^k(v)$, причём любое такое $u_k \in W_q^2((a, b))$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей краевой задачи.

2. Основной результат. Теорема о близости решений аппроксимирующей задачи (8), (9) к решениям исходной задачи (5), (6) является основным результатом данной работы.

Теорема. Пусть выполнены оценка (1), равенство (2), неравенство (3), оценка (4), условие (iii) и дополнительно коэффициент $q(x)$ оператора L неотрицателен на (a, b) (в коэрцитивном случае), функционал $J_1(u)$ неотрицателен на X , выполнены условия (iv) и (7) (в резонансном случае). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) последовательность $\{u_k\}$ решений аппроксимирующих задач (8), (9), построенная выше, является минимизирующей последовательностью для функционала J^λ на X ;

2) последовательность $\{u_k\}$ содержит подпоследовательность $\{u_{k_l}\}$, сходящуюся в равномерной метрике $C_1([a, b])$ к полуправильному решению u_0 предельной задачи (5), (6), для которого $J^\lambda(u_0) = \inf_{v \in X} J^\lambda(v)$;

3) если инфимум J^λ на X достигается в единственной точке u_0 , то $u_k \rightarrow u_0$ в $C_1([a, b])$.

Доказательство. Пусть $|\lambda_k - \lambda| < \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$. Для $u \in X$ и $k \in \mathbb{N}$ имеем соотношения

$$\begin{aligned} |J^k(u) - J^\lambda(u)| &= \left| \int_a^b dx \int_0^{u(x)} (-\lambda_k g^k(x, s) + \lambda g(x, s)) ds \right| \leq \int_a^b dx \int_0^{u(x)} |\lambda_k g^k(x, s) - \lambda g(x, s)| ds \leq \\ &\leq \int_a^b dx \int_0^{u(x)} (|\lambda_k - \lambda| |g^k(x, s)| + |\lambda| |g^k(x, s) - g(x, s)|) ds \leq \\ &\leq \varepsilon_k \int_a^b dx \int_0^{u(x)} |g^k(x, s)| ds + |\lambda| \int_a^b dx \int_0^{u(x)} |g^k(x, s) - g(x, s)| ds \leq \\ &\leq \varepsilon_k \int_a^b dx \int_0^{u(x)} \alpha(x) ds + |\lambda| \sum_{i=1}^m \int_a^b dx \int_{\varphi_i(x) - \delta_k}^{\varphi_i(x) + \delta_k} |g^k(x, s) - g(x, s)| ds \leq \\ &\leq \varepsilon_k \int_a^b \alpha(x) |u(x)| dx + |\lambda| \sum_{i=1}^m \int_a^b dx \int_{\varphi_i(x) - \delta_k}^{\varphi_i(x) + \delta_k} (\alpha(x) + \alpha(x)) ds = \\ &= \varepsilon_k \int_a^b \alpha(x) |u(x)| dx + 4|\lambda| m \delta_k \int_a^b \alpha(x) dx. \end{aligned}$$

Для любого $u \in X$ справедливо неравенство

$$\int_a^b \alpha(x) |u(x)| dx \leq M \|u\|,$$

где постоянная M равна произведению $\|\alpha\|_{L_q((a, b))}$ на норму оператора вложения X в пространство $L_p((a, b))$, $p = q/(q - 1)$, $q > 1$. Таким образом,

$$|J^k(u) - J^\lambda(u)| \leq \varepsilon_k M \|u\| + 4|\lambda| m \delta_k \int_a^b \alpha(x) dx, \quad u \in X.$$

Поскольку в коэрцитивном случае коэффициент $q(x)$ оператора L неотрицателен на (a, b) , то для любого решения u задачи (5), (6) имеем

$$\begin{aligned} \chi \|u\|^2 &\leq (Lu, u) = \int_a^b \lambda g(x, u(x)) u(x) dx \leq |\lambda| \left(\int_a^b |g(x, u(x))|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq |\lambda| \|\alpha\|_{L_q((a, b))} \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq |\lambda| M \|u\|, \end{aligned}$$

где χ – положительная константа, независимая от u , $\|u\|$ – норма в пространстве X . Из этого следует, что $\|u\| \leq |\lambda|M/\chi$.

Аналогично доказывается, что

$$\|u_k\| \leq \frac{|\lambda_k|M}{\chi}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где u_k – решение аппроксимирующей задачи (8), (9). В резонансном случае ограниченность последовательности $\{u_k\}$ доказывается от противного по схеме, предложенной в работе [5].

Пусть постоянная $N > 0$ из неравенства $\|u\| \leq N$ (например, в коэрцитивном случае $N = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|M/\chi$). Тогда

$$|J^k(u) - J^\lambda(u)| \leq \varepsilon_k MN + 4|\lambda|m\delta_k \int_a^b \alpha(x) dx = F_k, \quad (10)$$

если u или решение задачи (5), (6), или решение одной из аппроксимирующих задач (8), (9).

Отсюда следует ($d_\lambda = \inf_{v \in X} J^\lambda(v)$, $J^\lambda(\hat{u}_0) = d_\lambda$)

$$d_\lambda - F_k \leq J^\lambda(u_k) - F_k \leq J^k(u_k) \leq J^k(\hat{u}_0) \leq J^\lambda(\hat{u}_0) + F_k = d_\lambda + F_k,$$

что влечёт неравенство $|J^k(u_k) - d_\lambda| \leq F_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда, с учётом (10), имеем

$$|J^\lambda(u_k) - d_\lambda| \leq |J^\lambda(u_k) - J^k(u_k)| + |J^k(u_k) - d_\lambda| \leq 2F_k \quad (11)$$

для любого натурального k .

Из того что $\varepsilon_k \rightarrow +0$, $\delta_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ следует, что $F_k \rightarrow 0$. Поэтому (11) влечёт $\lim_{k \rightarrow \infty} J^\lambda(u_k) = d_\lambda$, и, значит, $\{u_k\}$ – минимизирующая последовательность для функционала J^λ на X .

В коэрцитивном случае имеем

$$\|Lu_k\|_{L_q((a,b))} = \left(\int_a^b |\lambda_k g^k(x, u_k(x))|^q dx \right)^{1/q} \leq |\lambda_k| \|\alpha\|_{L_q((a,b))} < (\varepsilon_k + \lambda) \|\alpha\|_{L_q((a,b))}$$

в силу оценки (4). Поскольку $\varepsilon_k \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$, то существует константа $K > 0$ такая, что для произвольного k справедливо неравенство $\varepsilon_k < K$ и, значит, верна оценка

$$\|Lu_k\|_{L_q((a,b))} \leq (K + \lambda) \|\alpha\|_{L_q((a,b))}, \quad k \in \mathbb{N},$$

что приводит к ограниченности последовательности $\{u_k\}$ в пространстве $W_q^2((a,b))$ при сделанных выше предположениях относительно оператора L . В резонансном случае ограниченность последовательности $\{u_k\}$ в $W_q^2((a,b))$ доказана в статье [5].

Пространство $W_q^2((a,b))$ рефлексивно, значит последовательность $\{u_k\}$ содержит слабо сходящуюся к некоторому u_0 в $W_q^2((a,b))$ подпоследовательность $\{u_{k_l}\}$. Учитывая компактность вложения $W_q^2((a,b))$ в $C_1([a,b])$, получаем, что $\{u_{k_l}\}$ сильно сходится к u_0 в X и $C_1([a,b])$.

Функционал J^λ непрерывен на X , поэтому $J^\lambda(u_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} J^\lambda(u_{k_l})$. С другой стороны, $\lim_{l \rightarrow \infty} J^\lambda(u_{k_l}) = d_\lambda$. Следовательно, $J^\lambda(u_0) = d_\lambda$. Из этого и теоремы из [15] (коэрцитивный случай), теоремы 4 из [30] (резонансный случай) заключаем, что u_0 – полуправильное решение задачи (5), (6).

Если инфимум J^λ на X достигается в единственной точке $u_0 \in X$, то $u_k \rightarrow u_0$ в $C_1([a, b])$, поскольку в этом случае из любой подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сильно сходится к u_0 в равномерной метрике $C_1([a, b])$. Теорема доказана.

3. Приложения. В качестве приложения установленной теоремы можно рассматривать, например, непрерывные аппроксимации одномерного аналога математической модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости [11]. Действительно, одномерная задача Гольдштика имеет вид

$$-u'' = \omega g(x, u(x)), \quad x \in (0, 1), \quad (12)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (13)$$

Здесь параметр $\omega > 0$ – завихрённость, а нелинейность

$$g(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < x - 1, \\ 0, & \text{если } u \geq x - 1. \end{cases}$$

Прямая

$$S = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \quad u = x - 1\}$$

разбивает область $D = (0, 1) \times \mathbb{R}$ на непересекающиеся подобласти

$$D_0 = \{(x, u) \in D : u < x - 1\}, \quad D_1 = \{(x, u) \in D : u > x - 1\}.$$

На $\overline{D_i}$, $i = 0, 1$, заданы каратеодориевы функции $g_i(x, u)$, функция $g : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и на D_i совпадает с $g_i(x, u)$, причём для п.в. $x \in (0, 1)$, если $(x, u) \in S$, $g(x, u)$ принадлежит отрезку с концами $g_0(x, u)$ и $g_1(x, u)$. Положим $g_0(x, u) = -1$, $g_1(x, u) = 0$.

Краевой задаче (12), (13) сопоставим заданный на пространстве $H_0^1((0, 1))$ функционал $J^\omega(u) = J_1(u) - \omega J_2(u)$, где

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 dx, \quad J_2(u) = \int_0^1 dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds.$$

В статье [15] отмечено, что существует $\omega_0 > 0$ такое, что $\inf_{v \in H_0^1((0, 1))} J^\omega(v) < 0$ для любого $\omega > \omega_0$, найдётся $\hat{u}_0 \in H_0^1((0, 1))$, для которого $J^\omega(\hat{u}_0) = \inf_{v \in H_0^1((0, 1))} J^\omega(v)$, и любое такое $\hat{u}_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (12), (13).

Зафиксируем $\omega > \omega_0$ и пусть числовая последовательность $\{\omega_k\}$, $\omega_k > 0$, сходится к ω . Нелинейность $g(x, u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $\{g^k(x, u)\}$. Имеем

$$-u'' = \omega_k g^k(x, u(x)), \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

где

$$g^k(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\varepsilon + x - 1, \\ (u + 1 - x)/\varepsilon, & \text{если } -\varepsilon + x - 1 \leq u \leq x - 1, \\ 0, & \text{если } u \geq x - 1. \end{cases}$$

Функция $g^k(x, u)$ непрерывная и зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$, в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ получается разрывная нелинейность $g(x, u)$.

Проверим, что для одномерной задачи Гольдштика выполнены все условия полученной в данной работе теоремы.

Для п.в. $x \in (0, 1)$ выполнена оценка $|g_i(x, u)| \leq 1$ для любого u с $(x, u) \in \overline{D_i}$, где $1 \in L_q((0, 1))$, $q > 1$, $i = 0, 1$; верны равенство $g(x, 0) = 0$ и неравенство $g_0(x, u) \leq g_1(x, u)$, если $(x, u) \in S$; справедлива оценка $|g^k(x, u)| \leq 1$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $1 \in L_q((0, 1))$, $q > 1$. Покажем, что выполнено условие (iii). Возьмём отрезок $F \subset (0, 1)$. Тогда существует интервал $G \supset F$ такой, что $\overline{G} \subset (0, 1)$. Пусть функция $h \in C_\infty([0, 1])$ равна единице на F , нулю вне G и $0 \leq h(x) \leq 1$ на $G \setminus F$. Имеем

$$J_2(u) = \int_0^1 dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds = \int_{\{x \in (0, 1): u(x) < x-1\}} (x-1-u(x)) dx.$$

Положим $u(x) = \hat{u}(x) = 2(x-1)h(x)$. Тогда

$$J_2(\hat{u}) = \int_{\{x \in (0, 1): \hat{u}(x) < x-1\}} (x-1-\hat{u}(x)) dx = \int_{\{x \in (0, 1): h(x) > 1/2\}} (x-1)(1-2h(x)) dx > 0.$$

Таким образом, найдётся $\hat{u} \in H^1_\circ((0, 1))$, для которого $J_2(\hat{u}) > 0$. Условие (iii) выполняется. Далее имеем

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 dx = \frac{1}{2} \|u\|^2.$$

Существует постоянная $\gamma \in (0, 1/2]$ (например, $\gamma = 1/4$), для которой $J_1(u) \geq \gamma \|u\|^2$ для всех $u \in H^1_\circ((0, 1))$, т.е. имеет место коэрцитивный случай. Коэффициент $q(x) \equiv 0$ (функция при $u(x)$ в дифференциальном операторе $Lu = -u''$) неотрицателен.

Итак, для одномерной задачи Гольдштика выполнены все условия теоремы и, значит, справедливы её утверждения.

Совершенно аналогично в качестве приложения можно рассмотреть одномерную модель Лаврентьева об отрывных течениях [31], для которой также будут выполнены условия доказанной теоремы. Поэтому утверждения теоремы будут справедливы и для одномерной задачи Лаврентьева.

Установленная теорема проиллюстрирована прикладными задачами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Уравнения с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 5. С. 1056–1059.
2. Павленко В.Н., Исаков Р.С. Непрерывные аппроксимации разрывных нелинейностей полулинейных уравнений эллиптического типа // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51. № 2. С. 224–233.
3. Лепчинский М.Г., Павленко В.Н. Аппроксимация резонансных краевых задач эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 1. С. 139–148.
4. Лепчинский М.Г., Павленко В.Н. Правильные решения эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 3. С. 124–138.
5. Павленко В.Н., Потапов Д.К. Аппроксимация краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. 2005. № 4. С. 49–55.
6. Потапов Д.К. Устойчивость основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2005. Т. 9. № 1–2. С. 159–165.
7. Потапов Д.К. Аппроксимация задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 1002–1003.

8. *Потапов Д.К.* Аппроксимация однопараметрического семейства задач Дирихле для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями в резонансном случае // *Мат. заметки.* 2011. Т. 90. Вып. 3. С. 467–469.
9. *Вайнштейн И.И., Юровский В.К.* Об одной задаче сопряжения вихревых течений идеальной жидкости // *Журн. прикл. механики и техн. физики.* 1976. № 5. С. 98–100.
10. *Потапов Д.К.* Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // *Мат. заметки.* 2010. Т. 87. Вып. 2. С. 262–266.
11. *Потапов Д.К.* Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости // *Сиб. журн. вычислит. математики.* 2011. Т. 14. № 3. С. 291–296.
12. *Carl S., Heikkilä S.* On the existence of minimal and maximal solutions of discontinuous functional Sturm–Liouville boundary value problems // *J. Inequal. Appl.* 2005. № 4. P. 403–412.
13. *Bonanno G., Bisci G.M.* Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities // *Bound. Value Probl.* 2009. Art. 670675.
14. *Bonanno G., Buccellato S.M.* Two point boundary value problems for the Sturm–Liouville equation with highly discontinuous nonlinearities // *Taiwanese J. Math.* 2010. V. 14. № 5. P. 2059–2072.
15. *Потапов Д.К.* Задача Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // *Дифференц. уравнения.* 2014. Т. 50. № 9. С. 1284–1286.
16. *Потапов Д.К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и “разделяющее” множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // *Дифференц. уравнения.* 2015. Т. 51. № 7. С. 970–974.
17. *Bonanno G., D’Agui G., Winkert P.* Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // *Minimax Theory Appl.* 2016. V. 1. № 1. P. 125–143.
18. *Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.* Задача Штурма–Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью // *Челябинский физ.-мат. журн.* 2019. Т. 4. Вып. 2. С. 142–154.
19. *Нижник И.Л., Краснеева А.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью // *Нелин. колебания.* 2012. Т. 15. № 3. С. 381–389.
20. *Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous second order differential equations with discontinuous right-hand side // *Phys. D: Nonlin. Phenom.* 2012. V. 241. № 22. P. 2003–2009.
21. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // *Electron. J. Differ. Equat.* 2014. № 221. P. 1–6.
22. *Llibre J., Teixeira M.A.* Periodic solutions of discontinuous second order differential systems // *J. Singularities.* 2014. V. 10. P. 183–190.
23. *Самойленко А.М., Нижник И.Л.* Дифференциальные уравнения с биустойчивой нелинейностью // *Укр. мат. журн.* 2015. Т. 67. № 4. С. 517–554.
24. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // *Electron. J. Differ. Equat.* 2016. № 4. P. 1–8.
25. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // *Electron. J. Differ. Equat.* 2016. № 124. P. 1–9.
26. *Bensid S., Diaz J.I.* Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions // *Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* 2017. V. 22. № 5. P. 1757–1778.
27. *Da Silva C.E.L., da Silva P.R., Jacquemard A.* Sliding solutions of second-order differential equations with discontinuous right-hand side // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2017. V. 40. № 14. P. 5295–5306.
28. *Da Silva C.E.L., Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations // *J. Dyn. Contr. Syst.* 2020. V. 26. № 1. P. 17–44.
29. *Павленко В.Н., Винокур В.В.* Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // *Изв. вузов. Математика.* 2001. № 5. С. 43–58.
30. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // *Сиб. мат. журн.* 2001. Т. 42. № 4. С. 911–919.
31. *Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Lavrent’ev problem for separated flows with an external perturbation // *Electron. J. Differ. Equat.* 2013. № 255. P. 1–6.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 15.01.2023 г.

После доработки 15.01.2023 г.

Принята к публикации 21.08.2023 г.