

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

© 2023 г. В. С. Климов

Изучаются интегрально ограниченные решения дифференциального уравнения $\mathcal{A}(x) = z$, где $\mathcal{A}$ – линейный дифференциальный оператор порядка l , определённый на функциях $x: \mathbb{R} \rightarrow H$ ($\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, H – конечномерное евклидово пространство). Правая часть z – интегрально ограниченная функция на $\mathbb{R}$ со значениями в H , удовлетворяющая неравенству $(\psi(t), z(t)) \geq \delta |z(t)|$, $t \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Приводятся условия на оператор $\mathcal{A}$ и функцию $\psi: \mathbb{R} \rightarrow H$, гарантирующие для рассматриваемых решений x обратное неравенство вида

$$\int_{\tau}^{\tau+1} |x^{(l)}(t)| dt \leq c \int_{\tau-1}^{\tau+2} |x(t)| dt,$$

в котором постоянная c не зависит от выбора действительного числа τ и функции x .

DOI: 10.31857/S0374064123090017, EDN: WOMIXW

Введение. В работе изучаются решения дифференциального уравнения $\mathcal{A}(x) = z$ порядка l . При некоторых предположениях относительно дифференциального выражения $\mathcal{A}$ и правой части z рассматриваемого уравнения для решений x устанавливаются обратное неравенство

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \int_{\tau}^{\tau+1} |x^{(l)}(t)| dt \leq c_0 \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \int_{\tau}^{\tau+1} |x(t)| dt$$

и некоторые его модификации, где c – положительная константа.

В п. 1 статьи содержатся определения различных функциональных классов, приводятся сведения о клиньях и конусах, основное внимание при этом уделяется случаю конечномерного пространства. В п. 2 устанавливается основной результат работы – обратные функциональные неравенства, позволяющие оценивать нормы старших производных решений через аналогичные нормы исходных решений. Правая часть z при этом предполагается интегрально ограниченной и удовлетворяющей некоторому неравенству. Обсуждению и модификациям полученных результатов посвящён п. 3.

Основу работы составляют одномерные варианты теорем вложения [1, 2] и конусные методы исследования систем дифференциальных неравенств [3–5]. Используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Через $H = \mathbb{R}^m$ означим m -мерное действительное арифметическое пространство; скалярное произведение двух векторов $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$ из $\mathbb{R}^m$ определено равенством $(u, v) = u_1 v_1 + \dots + u_m v_m$, $|u| = \sqrt{(u, u)}$ – евклидова норма вектора u .

Все банаховы пространства рассматриваются над полем действительных чисел. Если Z – банахово пространство и $v \in E$, то $\|v; Z\|$ – норма элемента v в пространстве Z , Z^* – сопряжённое к Z пространство, $\sigma(Z, Z^*)$ и $\sigma(Z^*, Z)$ – слабые топологии в пространствах Z и Z^* соответственно. Запись $Z_1 \rightarrow Z_2$ означает непрерывность оператора вложения банахова пространства Z_1 в банахово пространство Z_2 ; если же оператор вложения вполне непрерывен, то для этого используется запись $Z_1 \Rightarrow Z_2$. Далее будет применяться следующее утверждение.

Предложение 1 [6, с. 126]. Пусть Z , Z_1 , Z_0 – банаховы пространства, причём $Z_1 \Rightarrow Z$ и $Z \rightarrow Z_0$. Тогда существует такая функция $\chi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, что для каждого элемента $f \in Z_1$ и любого положительного числа η справедливо неравенство Эрлинга

$$\|f; Z\| \leq \eta \|f; Z_1\| + \chi(\eta) \|f; Z_0\|.$$

1. Функциональные пространства и конусы. Пусть $J = [a, b]$ – отрезок на действительной прямой $\mathbb{R}$, H – конечномерное евклидово пространство. Через $L(J, H)$ обозначается пространство измеримых функций на отрезке J со значениями в H , для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u; L_1(J)\| = \int_J |u(t)| dt;$$

как обычно, совпадающие почти всюду (относительно одномерной лебеговой меры mes_1) функции отождествляются; здесь и далее в обозначениях нормы символ H опускается. Наряду с $L_1(J, H)$, далее будут применяться аналогично определяемые пространства Лебега $L_p(J, H)$, а также пространства Орлича $L_\Phi(J, H)$, $E_{\Phi^*}(J, H)$, порождаемые N -функцией Φ и сопряжённой к ней функцией Φ^* [7, гл. 2].

Функцию $g: J \rightarrow H$ называют *абсолютно непрерывной на отрезке $J = [a, b]$* , если

$$g(t) = g(a) + \int_a^t f(s) ds,$$

где $f \in L_1(J, H)$. В этом случае функция $g(t)$ почти всюду на J дифференцируема и $g'(t) = f(t)$. Вместе с тем функция f является производной в смысле Соболева функции g . Класс абсолютно непрерывных функций $g: J \rightarrow H$ образует банахово пространство $W^1(J, H)$ с нормой

$$\|g; W^1(J)\| = \|g; L_1(J)\| + \|g'; L_1(J)\|.$$

Если $k \in \mathbb{N}$ и $k > 1$, то через $W^k(J, H)$ обозначается совокупность всех функций $g: J \rightarrow H$, производные которых (до порядка $k - 1$ включительно) принадлежат классу $W^1(J, H)$. Для каждой функции g из $W^k(J, H)$ имеет смысл и конечна норма

$$\|g; W^k(J)\| = \sum_{i=0}^k \|g^{(i)}; L_1(J)\|,$$

относительно которой $W^k(J, H)$ – банахово пространство, представляющее собой одномерный вариант классических пространств Соболева [1, 2].

Наряду с $W^k(J, H)$, ниже будет рассматриваться банахово пространство $C^k(J, H)$, состоящее из функций $x: J \rightarrow H$, имеющих на отрезке J непрерывные производные до порядка $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ включительно. Норма в $C^k(J, H)$ определяется стандартным образом:

$$\|g; C^k(J)\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in J} |x^{(i)}(t)|.$$

Для единообразия иногда будут применяться обозначения

$$L(J, H) \equiv W^0(J, H), \quad C(J, H) \equiv C^0(J, H).$$

Предложение 2. Пусть $l \geq 1$. Тогда:

1) пространство $W^l(J, H)$ непрерывно вложено в пространство $C^{l-1}(J, H)$ и компактно вложено в пространство $W^{l-1}(J, H)$;

2) оператор дифференцирования $x \rightarrow x^{(l-1)}$ действует и вполне непрерывен из $W^l(J, H)$ в пространство Орлича $E_{\Phi^*}(J, H)$ для любой N -функции Φ .

Предложение 2 есть одномерный вариант теорем вложения (см., например, [1, с. 74–78; 2, с. 69–78]).

Лемма 1. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $i = \overline{0, l-1}$, $P_i(t)$ – $m \times m$ -матрица, элементы которой при $i < l-1$ суммируемы на отрезке J , а при $i = l-1$ принадлежат некоторому пространству Орлича $L^\Phi(J)$. Тогда имеет место неравенство

$$\|P_i x^{(i)}; L(J)\| \leq \eta \|x; W^l(J)\| + k_0(\eta) \|x; L(J)\|,$$

в котором η – произвольная положительная постоянная, $k_0(\eta)$ – убывающая положительная и не зависящая от x функция.

Равносильное лемме 1 предложение доказано в статье [5]. Там же установлено следующее утверждение.

Предложение 3. Для любого натурального числа k найдётся такое положительное число λ_k , что для произвольной вещественной функции v класса $C^k[a, b]$ имеет место неравенство

$$\min_{t \in [a, b]} |v^{(k)}(t)| \leq \frac{\lambda_k}{(b-a)^k} \int_a^b |v(t)| dt.$$

Перейдём к пространствам векторных функций, определённых на всей действительной оси. Положим $J_\tau = [\tau, \tau+1]$, $\tau \in \mathbb{R}$. Функцию $z: \mathbb{R} \rightarrow H$ назовём *интегрально ограниченной*, если её сужение на любой отрезок J_τ принадлежит пространству $L(J_\tau, H)$ и число

$$\|z; M_1\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|z; L_1(J_\tau)\| < \infty. \quad (1)$$

Совокупность интегрально ограниченных векторных функций с нормой (1) образует банахово пространство $M_1(\mathbb{R})$. Аналогичная конструкция применима и к другим пространствам функций. Например, через $M_1^l(\mathbb{R})$ обозначается пространство функций $x: \mathbb{R} \rightarrow H$, сужения которых на любой отрезок J_τ принадлежит $W^l(J_\tau)$, причём

$$\|x; M_1^l\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|x; W^l(J_\tau)\| < \infty;$$

далее $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, – пространство функций $x: \mathbb{R} \rightarrow H$, сужения которых на любой отрезок J_τ принадлежат $C^l(J_\tau)$, при этом норма

$$\|x; C^k\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|x; C^k(J_\tau)\| < \infty.$$

Через $C_0(\mathbb{R})$ обозначается совокупность ограниченных и равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x: \mathbb{R} \rightarrow H$. Класс $C_0(\mathbb{R})$ составляет замкнутое подпространство пространства $C^0(\mathbb{R})$.

Лемма 2. Пусть $\psi \in C_0(\mathbb{R})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция ψ_1 класса $C_0(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\|\psi - \psi_1; C^0\| < \varepsilon$;
- 2) функция ψ_1 имеет ограниченные производные любого порядка, т.е.

$$|\psi_1^{(i)}(t)| \leq \beta_i < \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Доказательство основано на стандартной процедуре усреднения (см., например, [1, 2]). Пусть $\omega(t)$ – бесконечно дифференцируемая финитная функция на $\mathbb{R}$, $\omega(t) \geq 0$ и $\|\omega; L_1\| = 1$. Положим $\omega_\delta(t) = \delta^{-1} \omega(t/\delta)$, $\delta > 0$. Свёртка

$$(\psi \circ \omega_\delta)(t) = \int_{\mathbb{R}} \omega_\delta(t-s) \psi(s) ds$$

при любом $\delta > 0$ есть бесконечно дифференцируемая функция, производные которой любого порядка равномерно ограничены на $\mathbb{R}$. При малых $\delta > 0$ выполняется условие

$$\|\psi - (\psi \circ \omega_\delta); C^0\| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы.

Напомним определения и примеры, относящиеся к теории конусов в действительном банаховом пространстве Z . Далее используется терминология, принятая в [3, 4].

Замкнутое множество K пространства Z называют *клином*, если для любых $x, y \in K$ и неотрицательного числа α $x + y \in K$ и $\alpha x \in K$. Если K – клин, то множество $K \cap (-K)$ называют его *лезвием*. Клин K называют *конусом*, если его лезвие состоит лишь из одной точки. В дальнейших построениях замкнутость клина не используется, поэтому вопрос о замкнутости изучаемых клиньев не обсуждается.

Клин $K \subset Z$ называют *телесным*, если он содержит шар ненулевого радиуса. Линейный функционал Λ на Z называют *положительным*, если $\Lambda(x) \geq 0$ при $x \in K$. Совокупность положительных функционалов образует клин K^* в сопряжённом к Z пространстве Z^* . Если клин K не совпадает со всем пространством Z , то клин K^* содержит ненулевые элементы. Функционал Λ является внутренним элементом K^* в том и только том случае, если при некотором $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\Lambda(x) \geq \delta \|x\|, \quad x \in K. \quad (3)$$

В этой ситуации функционал Λ называют *равномерно положительным*, а клин K^* является телесным. Равномерно положительный функционал есть внутренний элемент клина K^* . Действительно, если выполнено неравенство (3), $\Lambda_1 \in E^*$ и $\|\Lambda_1 - \Lambda; E^*\| < \delta$, то

$$\Lambda_1(x) = \Lambda(x) + (\Lambda_1 - \Lambda)(x) \geq (\delta - \|\Lambda - \Lambda_1; E^*\|)\|x\|, \quad x \in K.$$

Равномерно положительные функционалы на конусе K пространства Z существуют не всегда. Например, если $Z = L_p[0, 1]$, а K – конус неотрицательных почти всюду функций, то равномерно положительные функционалы существуют лишь при $p = 1$. Однако в любом банаховом пространстве Z можно указать такой конус K , относительно которого существуют равномерно положительные функционалы, а сопряжённый конус телесен. Действительно, пусть Λ_0 – ненулевой функционал на Z и $0 < \delta_0 < \|\Lambda_0\|$. Введём в рассмотрение множество

$$K(\Lambda_0, \delta_0) = \{x \in Z : \Lambda_0(x) \geq \delta_0 \|x\|\}.$$

Нетрудно видеть, что множество $K(\Lambda_0, \delta_0)$ есть конус в пространстве Z . Если $\Lambda \in Z^*$ и $\|\Lambda - \Lambda_0; Z^*\| < \delta_0$, то для всех x из конуса $K(\Lambda_0, \delta_0)$ выполнено неравенство

$$\Lambda(x) \geq (\delta_0 - \|\Lambda - \Lambda_0; E^*\|)\|x\|,$$

поэтому Λ – равномерно положительный на $K(\Lambda_0, \delta_0)$ функционал.

Приведём ещё один вариант предшествующей конструкции. Пусть F – замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства Z , не содержащее нуля θ пространства Z . Через $K(F)$ обозначим множество элементов вида αx , где $\alpha \geq 0$ и $x \in F$. Множество $K(F)$ – конус [4, с. 11]. Выпуклое множество D называют [8, с. 35] *базой конуса* K , если каждый ненулевой элемент из K допускает единственное представление $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$, $y \in D$. Например, если Λ – равномерно положительный на конусе K функционал, то при любом $h > 0$ множество $D(\Lambda, h) = \{x \in K : \Lambda(x) = h\}$ образует базу конуса K . Если $K = K(F)$, то существует равномерно положительный на конусе K функционал [4, с. 40; 8, с. 21].

Подробно обсудим этот вопрос в частном случае, когда Z совпадает с конечномерным евклидовым пространством H . В этой ситуации сопряжённое к $Z = H$ пространство Z^* можно отождествить с H . Введём обозначения: $Kv(H)$ – совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств пространства H ; $\mathbb{B} = \{v \in H : |v| \leq 1\}$ – шар единичного радиуса с центром в нуле θ ; если $F_1, F_2 \in Kv(H)$, то $h_0(F_1, F_2) = \min\{t \geq 0 : F_2 \subset F_1 + t\mathbb{B}\}$ –

уклонение множества F_2 от множества F_1 . Вообще говоря, $h_0(F_1, F_2) \neq h_0(F_2, F_1)$. Если $v_0 \in H$, $F \in Kv(H)$, то

$$h_0(v_0, F) = \min_{v \in F} |v - v_0|, \quad h_0(F, v_0) = \max_{v \in F} |v - v_0|.$$

Число $h(F_1, F_2) = \max\{h_0(F_1, F_2), h_0(F_2, F_1)\}$ называют *расстоянием* (по Хаусдорфу) между F_1 , F_2 . Относительно метрики Хаусдорфа $Kv(H)$ есть полное метрическое пространство.

Метрической проекцией нуля θ на множество F класса $Kv(H)$ называют такой элемент $v = \text{Pr}(F)$ из F , что $|v| = \min\{|y| : y \in F\}$. Проекция определяется однозначно и непрерывно зависит от F . Более точно, справедливо неравенство

$$|\text{Pr}(F_1) - \text{Pr}(F_2)| \leq 2\sqrt{2R}(h(F_1, F_2))^{1/2},$$

где $R = \max\{h_0(F_1, \theta), h_0(F_2, \theta)\}$ [9, с. 186, 187]. Таким образом, проекция $\text{Pr}(F)$ удовлетворяет локальному условию Гёльдера порядка $1/2$.

Лемма 3. Пусть $F \in Kv(H)$, $\theta \notin F$, $\psi = \text{Pr}(F)$, $r = |\psi|$, $R = h_0(F, \theta) = \max\{|v| : v \in F\}$. Тогда имеет место неравенство

$$(\psi, z) \geq \frac{r^2}{R}|z|, \quad z \in K(F).$$

Доказательство. Поскольку $\psi = \text{Pr}(F)$, то

$$(\psi, v - \psi) \geq 0, \quad v \in F.$$

Следовательно, $(\psi, v) \geq (\psi, \psi) = r^2$, $v \in F$. Если $z \in K(F)$, то $z/t \in F$ при некотором положительном t . Отсюда следуют оценки

$$r \leq \frac{|z|}{t} \leq R, \quad \left(\psi, \frac{z}{t}\right) \geq r^2, \quad (\psi, z) \geq r^2 t \geq \frac{r^2}{R}|z|.$$

Лемма доказана.

В лемме 3 указывается вполне определённый способ построения равномерно положительно-го функционала Λ на конусе $K(F)$. Соответствие $K(F) \rightarrow \Lambda = \text{Pr}(F)$ не только однозначно, но и квалифицированно непрерывно.

Пусть ψ – ненулевой элемент из H , $0 < \delta < |\psi|$, $K(\psi, \delta) = \{z \in H : (\psi, z) \geq \delta|z|\}$. Множество $K(\psi, \delta)$ называют *эллиптическим конусом* в пространстве H . Из леммы 3 следует, что любой конус $K(F)$ принадлежит более широкому эллиптическому конусу. Так как в конечно-мерном пространстве любой конус совпадает с некоторым конусом $K(F)$ (см., например, [4, с. 40; 8, с. 23], то любой конус в H есть часть некоторого эллиптического конуса.

2. Обратные неравенства. Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $l > 1$. Как и выше, $M_1(\mathbb{R})$ и $M_1^l(\mathbb{R})$ – пространства функций $f: \mathbb{R} \rightarrow H$, наделённые соответствующими нормами. Введём в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\mathcal{L}_0(x) = x^{(l)}, \quad \mathcal{L}_1(x) = \sum_{i=0}^{l-1} P_i x^{(i)}, \quad \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_1(x).$$

Здесь P_i , $i = \overline{0, l-1}$, – $m \times m$ -матрицы, удовлетворяющие условиям леммы 1 на каждом отрезке J_τ с константами, не зависящими от τ . Более точно, если v – элемент матрицы P_i , то верны оценки

$$\|v; L_1(I_\tau)\| \leq R_0, \quad i = \overline{0, l-2},$$

$$\|v; L^\Phi(J_\tau)\| \leq R_0, \quad i = l-1,$$

константа R_0 и N -функция Φ не зависят от τ . Предположение относительно матрицы $P_{l-1}(t)$ эквивалентно следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_T \|P_{l-1}(\tau + t)\| dt < \varepsilon$$

для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и всякого измеримого множества $T \subset [0, 1]$, $\text{mes}_1 T < \delta$ (см., например, [10, с. 171])^{*}). Из леммы 1 следует оценка

$$\|\mathcal{L}_1(x); L(J)\| \leq \eta \|x; W^l(J)\| + k(\eta) \|x; L_1(J)\|, \quad (4)$$

константа η может быть любой положительной величиной, функция $k(\eta)$ может зависеть от J , однако для отрезков $J = [a, b]$, длины которых удовлетворяют условиям $0 < d_1 \leq b - a \leq d_2 < \infty$, d_1, d_2 – фиксированные положительные числа, функцию $k(\eta)$ можно взять одной и той же. Из оценки (4) следует неравенство коэрцитивности.

Лемма 4. Для функций x из $M_1^l(R)$ справедливо неравенство

$$c_1(J) \|x; W^l(J)\| \leq \|\mathcal{L}(x); L_1(J)\| + \|x; L_1(J)\|,$$

где положительное число $c_1(J)$ зависит от J , однако для отрезков J , длины которых расположены между двумя положительными числами, это число можно взять постоянным.

Доказательство следует из неравенства треугольника

$$\|\mathcal{L}(x); L_1(J)\| \geq \|x^{(l)}; L_1(J)\| - \|\mathcal{L}_1(x); L(J)\|$$

и вытекающей из (4) оценки

$$\|\mathcal{L}_1(x); L_1(J)\| \leq \frac{1}{2} \|x; W_1^l(J)\| + k\left(\frac{1}{2}\right) \|x; L_1(J)\|.$$

Пусть ниже $\psi(t)$ – функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\psi \in C_0(\mathbb{R})$;
- 2) $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\psi(t)| > 0$.

Таким образом, функция $\psi: \mathbb{R} \rightarrow H$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и равномерно ограничена от 0 и ∞ :

$$0 < r_0 \leq |\psi(t)| \leq R_0 < \infty.$$

Сопоставим функции $\psi(t)$ и постоянной $\delta \in (0, r_0)$ переменный эллиптический конус

$$K(\psi(t), \delta) = \{v \in H : (\psi(t), v) \geq \delta |v|\}.$$

Функцию $\psi(t)$ для дальнейшего удобно считать достаточно гладкой. Это позволяет сделать следующая

Лемма 5. Для любого переменного эллиптического конуса $K(\psi(t), \delta)$ существует содержащий его переменный эллиптический конус $K(\psi_1(t), \delta_1)$, для которого $\psi_1 \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ и справедливы оценки (2).

Лемма 5 следует из леммы 2.

Сопоставим переменному эллиптическому конусу $K(\psi, \delta)$ множество $\tilde{K}(\psi, \delta)$ функций z класса $M_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих почти при всех t неравенству

$$(\psi(t), z(t)) \geq \delta |z(t)|. \quad (5)$$

Условие (5) означает, что $z(t) \in K(\psi(t), \delta)$ почти при всех t .

^{*}) Норма $\|P\|$ матрицы P размерности $m \times m$ определяется равенством $\|P\| = \max\{|Pv| : v \in H, |v| \leq 1\}$.

Через $K(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathcal{L}(x) \in \tilde{K}(\psi, \delta)$. Множество $K(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ верны обратные неравенства.

Теорема 1. *Существует такая постоянная $c = c(\mathcal{L}, \psi, \delta)$, что для всех функций x класса $K(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ верно неравенство*

$$\|x; M_1^l\| \leq c(\mathcal{L}, \psi, \delta) \|x; M_1\|. \quad (6)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что функция ψ бесконечно дифференцируема и выполнены аналогичные (2) условия ограниченности производных

$$|\psi^{(i)}(t)| \leq \beta_i < \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Если $x \in K(\mathcal{L}, \psi, \delta)$, то сужение функции $v(t) = (x(t), \psi(t))$ на любой отрезок J принадлежит классу $C^{l-1}(J)$. Зафиксируем действительное число τ . Применяя к функции $v(t)$ и отрезкам $[\tau-1, \tau]$ и $[\tau+1, \tau+2]$ предложение 3, получим соотношения

$$\min_{t \in [\tau-1, \tau]} |v^{(l-1)}(t)| \leq \lambda_{l-1} \int_{\tau-1}^{\tau} |v(t)| dt, \quad \min_{t \in [\tau+1, \tau+2]} |v^{(l-1)}(t)| \leq \lambda_{l-1} \int_{\tau+1}^{\tau+2} |v(t)| dt. \quad (8)$$

Ввиду (8) существуют такие числа $t_0 \in [\tau-1, \tau]$ и $t_1 \in [\tau+1, \tau+2]$, что выполнены неравенства

$$|v^{(l-1)}(t_0)| \leq \lambda_{l-1} \int_{\tau-1}^{\tau} |v(t)| dt, \quad |v^{(l-1)}(t_1)| \leq \lambda_{l-1} \int_{\tau+1}^{\tau+2} |v(t)| dt. \quad (9)$$

Введём отрезок $J = [t_0, t_1]$, длина $t_1 - t_0$ которого $1 \leq t_1 - t_0 \leq 3$. Поскольку $x \in K(\mathcal{L}, \psi, \delta)$, то почти при всех t справедлива оценка

$$(\psi(t), \mathcal{L}(x)(t)) \geq \delta |\mathcal{L}(x)(t)|. \quad (10)$$

Интегрируя (10) по отрезку J , приходим к соотношению

$$Q := \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), \mathcal{L}(x)(t)) dt \geq \delta \|\mathcal{L}(x); L_1(J)\|. \quad (11)$$

Из неравенства коэрцитивности следует оценка

$$\|x; W^l(J)\| \leq c_1(Q + \|x; L_1(J)\|). \quad (12)$$

Теперь оценим правую часть (12) сверху. Очевидно, что

$$\|x; L_1(J)\| \leq \|x; L_1(\tau_1, \tau+2)\|.$$

Более трудно оценить сверху определяемое из (11) число Q . Поскольку $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_1(x)$, то $Q = Q_0 + Q_1$, где

$$Q_0 := \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), x^{(l)}(t)) dt, \quad Q_1 := \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), \mathcal{L}_1(x)(t)) dt.$$

Интегрирование по частям влечёт за собой равенство

$$Q_0 = \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), x^{(l)}(t)) dt = Q_{01} - Q_{02},$$

в котором

$$Q_{01} = (\psi(t), x^{(l-1)}(t))|_{t_0}^{t_1}, \quad Q_{0,2} = \int_{t_0}^{t_1} (\psi'(t), x^{(l-1)}(t)) dt.$$

Таким образом,

$$Q = Q_{01} - Q_{02} + Q_1.$$

Правило дифференцирования произведения приводит к равенству

$$Q_{01} = (\psi(t), x(t))^{(l-1)}|_{t_0}^{t_1} - \sum_{i=0}^{l-2} \binom{l-1}{i} (\psi^{(l-1-i)}(t), x^{(i)}(t))|_{t_0}^{t_1} = I_1 + I_2. \quad (13)$$

Для оценки первого слагаемого I_1 в правой части (13) применим соотношения (9), связанные со специальным выбором чисел t_0 , t_1 , и получим

$$|I_1| = |(\psi(t), x(t))^{(l-1)}|_{t_0}^{t_1}| \leq c_1 \int_{\tau-1}^{\tau+2} |x(t)| dt, \quad (14)$$

где c_1 – некоторая постоянная. Второе слагаемое I_2 оценивается следующим образом:

$$|I_2| \leq \eta \|x; W^l(J)\| + k_1(\eta) \|x; L_1(J)\|. \quad (15)$$

Для доказательства (15) достаточно учесть неравенства (7) и полную непрерывность оператора вложения пространства $W^l(J)$ в пространство $C^k(J)$ при $k < l-1$. Постоянная η может быть взята сколь угодно малой в силу неравенства Эрлинга. Аналогичными рассуждениями устанавливается оценка интегрального слагаемого $-Q_{02} + Q_1$:

$$|-Q_{02} + Q_1| \leq \eta \|x; W^l\| + k_2(\eta) \|x; L_1(J)\|,$$

из которой и неравенств (14), (15) следует соотношение

$$|Q| \leq 2\eta \|x; W^l(J)\| + k(\eta) \|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

где постоянная $k(\eta)$ не зависит от x и τ .

Объединив (12) с полученной выше оценкой сверху числа $|Q|$, имеем неравенство

$$\|x; W^l(J)\| \leq \varepsilon \|x; W^l(J)\| + C(\varepsilon) \|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

где $\varepsilon = 2c_1\eta$. Постоянная ε за счёт малости η может быть сделана сколь угодно малой. Положив $\varepsilon = 0,5$, приходим к неравенству

$$\|x; W^l(J)\| \leq 2C(1/2) \|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

которое (так как $J_\tau \subset J = [t_0, t_1]$) влечёт за собой оценку

$$\|x; W^l(J_\tau)\| \leq 2C(1/2) \|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|. \quad (16)$$

Ввиду произвольности τ из оценки (16) следует неравенство (6). Теорема доказана.

В определённом смысле оценка (16) более информативна, чем вытекающее из неё неравенство (6).

3. Модификации и обобщения. Обсудим модификации теоремы 1 для случая, когда вместо дифференциального оператора $\mathcal{L}$ рассматривается дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{i=0}^l P_i x^{(i)}.$$

Коэффициенты P_i при $i < l$ – квадратные матрицы размеров $m \times m$, элементы которых удовлетворяют требованиям теоремы 1. Квадратная матрица $P_l(t)$ при каждом t обратима, причём $P_l(t)$ и обратная к ней матрица $P_l^{-1}(t)$ равномерно непрерывны и равномерно ограничены на $\mathbb{R}$, т.е.

$$\|P_l(t)\| + \|P_l^{-1}(t)\| < a_1 < \infty.$$

Пусть $K(\psi(t), \delta)$ – переменный эллиптический конус в пространстве H . Сопоставим конусу $K(\psi(t), \delta)$ множество $\tilde{K}(\psi, \delta)$ функций z класса $M_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих почти при всех t неравенству (5). Через $K(\mathcal{A}, \psi, \delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathcal{A}(x) \in \tilde{K}(\psi, \delta)$. Множество $K(\mathcal{A}, \psi, \delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K(\mathcal{A}, \psi, \delta)$ верны обратные неравенства.

Теорема 2. *Существует такая постоянная $c = c(\mathcal{A}, \psi, \delta)$, что для всех функций x класса $K(\mathcal{A}, \psi, \delta)$ верно неравенство*

$$\|x; M_1^l\| \leq c(\mathcal{A}, \psi, \delta) \|x; M_1\|.$$

Доказательство. Пусть $x \in K(\mathcal{A}, \psi, \delta)$. Тогда $\mathcal{A}(x) = z$, где $z \in \tilde{K}(\psi, \delta)$. Это равносильно равенству $\mathcal{A}_1(x) = z_1$, где

$$\mathcal{A}_1(x) = x^{(l)} + \sum_{i=0}^{l-1} P_l^{-1} P_i x^{(i)}, \quad z_1 = P_l^{-1} z.$$

Положим $\psi_1(t) = P_l^*(t)\psi(t)$. Из определения ψ_1 вытекает, что функция $\psi_1(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и равномерно ограничена от нуля и ∞ . Верны соотношения

$$(\psi_1(t), z_1(t)) = (\psi(t), z(t)) \geq \delta |z(t)|.$$

Проведённые рассуждения влекут за собой равенство $K(\mathcal{A}, \psi, \delta) = K(\mathcal{A}_1, \psi_1, \delta)$. Следовательно, справедливо доказываемое обратное неравенство, в котором $c(\mathcal{A}, \psi, \delta) = c(\mathcal{A}_1, \psi_1, \delta)$. Теорема доказана.

Приведём более “геометричный” вариант теоремы 2. Обозначим через $F(t)$ мультиотображение $F: \mathbb{R} \rightarrow Kv(H)$, удовлетворяющее условиям: f_1) отображение F из $\mathbb{R}$ в $Kv(H)$ равномерно непрерывно; f_2) справедливы неравенства

$$0 < r \leq h_0(\theta, F(t)), \quad h_0(F(t), \theta) \leq R < \infty, \quad (17)$$

постоянные r и R не зависят от t .

В силу (17) при любом t компакт $F(t)$ отстоит от θ на расстояние не меньшее, чем $r > 0$. Вместе с тем $F(t)$ содержится в шаре $R\mathbb{B} = \{v \in H : |v| \leq R\}$. Введём в рассмотрение функцию $\psi(t) = \text{Pr}(F(t))$ – метрическую проекцию θ на $F(t)$. Функция $\psi(t)$ равномерно ограничена от θ и ∞ : $0 < r \leq |\psi(t)| \leq R < \infty$. Отсюда вытекает оценка

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq 2\sqrt{2R}(h(F(t_1), F(t_2)))^{1/2},$$

из которой в силу условия f_1) следует равномерная непрерывность функции $\psi(t)$.

Пусть $K(F(t))$ – переменный конус в пространстве H , порождаемый множеством $F(t)$. Из леммы 2 следует неравенство

$$(\psi(t), z) \geq \frac{r^2}{R} |z|, \quad z \in K(F(t)),$$

которое эквивалентно включению

$$K(F(t)) \subset K\left(\psi(t), \frac{r^2}{R}\right).$$

Таким образом, при выполнении условий $f_1)$ и $f_2)$ переменный конус $K(F(t))$ составляет часть переменного эллиптического конуса вида $K(\psi(t), \delta)$.

Обозначим через $K(\mathcal{A}, K(F(t)))$ совокупность функций x класса $M^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathcal{A}(x)(t) \in K(F(t))$ почти при всех действительных t . Из проведённых выше рассуждений следует включение

$$K(\mathcal{A}, K(F(t))) \subset K(\mathcal{A}, \psi, \delta)$$

при $\delta = r^2/R$.

Теорема 3. Пусть мультиотображение $F(t)$ удовлетворяет условиям $f_1)$, $f_2)$. Тогда существует такая постоянная $c = c(\mathcal{A}, F(t))$, что для функций x класса $K(\mathcal{A}, K(F(t)))$ имеет место неравенство

$$\|x; M_1^l\| \leq c(\mathcal{A}, F(t)) \|x; M_1\|.$$

Доказательство следует из включения $K(\mathcal{A}, K(F(t))) \subset K(\mathcal{A}, \psi, \delta)$ при $\delta = r^2/R$ и теоремы 2.

Теоремой 3 удобно пользоваться в тех случаях, когда переменный конус $K(t)$, фигурирующий в теоремах 1–3, порождается множеством $F(t)$. Такого рода построение часто используется (см., например, [3]) и, по существу, является универсальным в конечномерном пространстве H .

Остановимся на обобщениях теоремы 1, относящихся к случаю, когда $z = \mathcal{L}(x)$ есть векторная мера. С этой целью заменим локальное условие типа $z(t) \in K(\psi(t), \delta)$ его интегральным вариантом. Вместо конуса $K(\psi(t), \delta)$ рассмотрим конус

$$K_1(\psi(t), \delta) := \left\{ z \in M_1(\mathbb{R}) : \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), z(t)) dt \geq \delta \|z; L_1[t_0, t_1]\| \right\}. \quad (18)$$

В равенстве (18) t_0, t_1 – произвольные действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $1 \leq t_1 - t_0 \leq 3$, функция $\psi(t)$ и постоянная $\delta > 0$ не зависят от t_0, t_1 . Через $K_1(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathcal{L}(x) \in K_1(\psi(t), \delta)$. Множество $K_1(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K_1(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ верны обратные неравенства (6), (16). Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что они сохраняют силу при замене клина $K(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ клином $K_1(\mathcal{L}, \psi, \delta)$. Сформулируем вариант оценки (16).

Теорема 4. Существует такая постоянная $c_1 = c_1(\mathcal{L}, \psi, \delta)$, что для функций x класса $K_1(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ верно неравенство

$$\|x; W^l(J_\tau)\| \leq c_1(\mathcal{L}, \psi, \delta) \|x; L_1(\tau - 1, \tau + 2)\|.$$

Вариацией вектор-функции $g: J \rightarrow H$ на отрезке $J = [a, b]$ называется число

$$V_a^b g = \sup \sum_{i=1}^n |g(s_i) - g(s_{i-1})|,$$

где точная верхняя грань берётся по всем возможным разбиениям отрезка J точками

$$s_0 = a < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = b.$$

Совокупность вектор-функций $g: J \rightarrow H$ с ограниченной вариацией на отрезке J образует линейное пространство, обозначаемое символом $BV(J, H)$. Абсолютно непрерывная на отрезке J функция g принадлежит классу $BV(J, H)$. Имеет место равенство

$$V_a^b g = \|g'; L(J)\|.$$

Если $g(t)$ – первообразная функции $z(t)$ класса $M_1(\mathbb{R})$, то неравенство, фигурирующее в (18), эквивалентно оценке

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), dg(t)) \geq \delta V_{t_0}^{t_1} g. \quad (19)$$

В левой части (19) находится интеграл от функции $\psi(t)$ по векторной мере $dg(t)$, в правой части (19) фигурирует вариация абсолютно непрерывной функции $g(t)$ по отрезку $[t_0, t_1]$. От абсолютной непрерывности функции $g(t)$ можно отказаться, однако при этом придётся рассматривать дифференциальные неравенства и уравнения в некотором обобщённом смысле.

Согласно теореме Ф. Рисса любой линейный функционал Λ на пространстве $E = C(J, H)$ допускает интегральное представление

$$\Lambda(\varphi) = \int_J \varphi(t) dg(t), \quad \varphi \in C(J, H), \quad (20)$$

где g – функция класса $BV(J, H)$. Будем предполагать, что функция g непрерывна справа; в этом случае функционал Λ определяет функцию g с точностью до постоянной. Пространство $E^* = (C(J))^*$, сопряжённое к $E = C(J, H)$, можно отождествить с пространством $BV(J)$. В пространстве E^* можно обычным образом ввести сильную и слабую топологии. Справедливо равенство

$$\|\Lambda; E^*\| = V_a^b g,$$

где функционал Λ и функция g связаны равенством (20). Сходимость $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$ в слабой топологии $\sigma(E^*, E)$ означает равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(\varphi) = \Lambda(\varphi), \quad \varphi \in E = C(J, H).$$

Каждая функция z класса $L(J, H)$ порождает линейный функционал

$$\Lambda(\varphi) = \int_J (\varphi(t), z(t)) dt$$

класса E^* . Подобный функционал Λ будем называть *абсолютно непрерывным*, а функцию z , определяемую им с точностью до эквивалентности, *плотностью* Λ . Это позволяет идентифицировать пространство $L(J, H)$ с некоторым подпространством пространства E^* .

Пространство $L(J, H)$ составляет собственную часть пространства E^* . Вместе с тем имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. Для любого функционала Λ класса E^* существует такая слабо сходящаяся к Λ последовательность абсолютно непрерывных функционалов Λ_n , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda_n; E^*\| = \|\Lambda; E^*\|.$$

Предложение 4 установлено в работе [5].

Введём некоторые функциональные пространства. Пусть l – натуральное число. Если функция $x(t)$ класса $L(J, H)$ такова, что для некоторого функционала Λ класса E^* и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(J, H)$ справедливо соотношение

$$\int_J (x(t) \varphi^{(l)}(t)) dt = (-1)^l \Lambda(\varphi),$$

то будем говорить, что l -я обобщённая производная функции $x(t)$ есть функционал Λ (или соответствующая векторная мера Радона): $x^{(l)} = \Lambda$. Через $V^l(J, H)$ обозначим совокупность

суммируемых по отрезку J функций $x \in L_1(J, H)$, для которых $x^{(l)} \in E^*$. Линейное пространство $V^l(J, H)$ есть дифференциальная надстройка над $E^*(J)$. Равенство

$$\|x; V^l(J)\| = \|x; L(J)\| + \|x^{(l)}; E^*\| \quad (21)$$

определяет норму в $V^l(J, H)$, относительно которой $V^l(J, H)$ – банахово пространство. Справедливо строгое вложение $W^l(J) \subset V^l(J, H)$, позволяющее идентифицировать множество $W^l(J)$ с некоторым собственным подпространством пространства $V^l(J, H)$.

Разумеется, в пространстве $V^l(J, H)$ можно ввести нормы, отличные от (21). Вопрос об эквивалентности различных норм связан с теоремами вложения. Пространство $V^1(J, H)$ совпадает с пространством $BV(J, H)$ функций $x: J \rightarrow H$, имеющих ограниченное изменение на отрезке $J = [a, b]$. Норму в $BV(J)$ можно определить равенством

$$\|x; BV\| = \|x; L(J)\| + V_a^b x.$$

Отсюда вытекает непрерывность оператора вложения $V^1(J, H)$ в пространство $L_\infty(J, H)$ и компактность вложения $V^1(J, H)$ в пространство $L(J, H)$. Функция x класса $V^1(J, H)$ имеет конечное или счётное число точек разрыва, а в каждой точке $\tau \in [a, b]$ (соответственно $(a, b]$) существуют односторонние пределы

$$x(\tau + 0) = \lim_{t \rightarrow \tau + 0} x(t), \quad x(\tau - 0) = \lim_{t \rightarrow \tau - 0} x(t).$$

Если $x \in V^l(J, H)$ и $1 \leq k < l$, то $x^{(k)} \in V^{l-k}(J, H)$ и оператор дифференцирования $D^k = x^{(k)}$ непрерывен. В частности, при $l > 1$ оператор D^{l-1} действует и непрерывен из $V^l(J, H)$ в $BV(J, H)$. Это позволяет свести вопрос о теоремах вложения для пространства $V^l(J, H)$ к аналогичному вопросу для $BV(J, H)$. Если $x \in V^l(J, H)$ и $l > 1$, то при $0 \leq k < l - 1$ функция $D^k x$ непрерывна на J , а в каждой точке $\tau \in [a, b]$ (соответственно $(a, b]$) существуют односторонние пределы

$$D^{l-1}x(\tau + 0) = \lim_{t \rightarrow \tau + 0} D^{(l-1)}x(t), \quad D^{l-1}x(\tau - 0) = \lim_{t \rightarrow \tau - 0} D^{(l-1)}x(t).$$

Лемма 6. Пусть x_n – ограниченная в пространстве $V^l(J, H)$ последовательность. Тогда существуют такая её подпоследовательность x_{i_n} и такая функция x из $V^l(J, H)$, что

$$D^l x_{i_n} \rightarrow D^l x \text{ в } \sigma(C_0^*(J), C_0(J)) \text{ и } D^k x_{i_n} \rightarrow D^k x \text{ в } L(J) \text{ при } k < l.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы Алаоглу–Бурбаки [11, с. 118] о слабой компактности поляры и замкнутости оператора дифференцирования. Второе утверждение вытекает из теорем вложения. Лемма доказана.

Следствие 1. В условиях леммы 6 справедливы соотношения

$$\|x; V^l(J)\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{i_n}; V^l(J)\|, \quad \|x; L(J)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{i_n}; L(J)\|.$$

Обозначим через $V^l(J, a)$ подпространство $V^l(J)$, состоящее из функций x , удовлетворяющих условиям

$$x^{(i)}(a + 0) = 0, \quad i = \overline{0, l-1}.$$

Очевидно, что коразмерность пространства $V^l(J, a)$ равна lm . Пространство $V^l(J, H)$ есть прямая сумма $V^l(J, a)$ и ядра $\text{Ker}(\mathcal{L})$ оператора

$$\mathcal{L}: V^l(J, H) = V^l(J, a) \oplus \text{Ker}(\mathcal{L}).$$

В силу хорошо известных результатов о задаче Коши для импульсных систем (см., например, [12, гл. 4]) сужение оператора $\mathcal{L}$ на $V^l(I, \tau)$ задаёт гомеоморфизм пространств $V^l(J, a)$ и E^* . Верно следующее утверждение.

Предложение 5 [12, с. 163–167]. Пусть коэффициенты дифференциального оператора $\mathcal{L}$ суммируемы по отрезку $J = [a, b]$. Тогда для любого функционала $\Lambda \in E^*$ существует единственное решение задачи Коши

$$\mathcal{L}(x) = \Lambda, \quad x^{(i)}(a+0) = 0, \quad i = \overline{0, l-1}. \quad (22)$$

Оператор $\mathcal{B}$, сопоставляющий мере функционала Λ решение задачи Коши (22), действует из E^* в $V^l(J, a)$ и непрерывен. Существует такая константа $c(J)$, что

$$\|u; V^l(J)\| \leq c(J) \|\mathcal{L}(u); C_0^*(J)\|, \quad u \in V^l(J, a). \quad (23)$$

Неравенство коэрцитивности (23) эквивалентно оценке

$$\|\mathcal{B}(\Lambda); V^l(J)\| \leq c(J) \|\Lambda; E^*\|, \quad \Lambda \in E^*.$$

Лемма 7. Пусть $\Lambda_n \in E^*$, $u_n = \mathcal{B}(\Lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\Lambda_n \rightarrow \Lambda \text{ в } \sigma(E^*, E) \text{ и } u = \mathcal{B}(\Lambda).$$

Тогда

$$D^l u_n \rightarrow D^l u \text{ в } \sigma(E^*, E), \quad D^i u_n \rightarrow D^i u \text{ в } L_1(J, H), \quad i = \overline{0, l-1}.$$

Доказательство. Сходимость $D^l u_n \rightarrow D^l u$ в $\sigma(E^*, E)$ следует из замкнутости оператора D^l относительно топологии $\sigma(E^*, E)$. Второе утверждение леммы вытекает из теорем вложения. Лемма доказана.

Введём банахово пространство $MV(\mathbb{R}, H)$, состоящее из функций $g: \mathbb{R} \rightarrow H$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|g; MV\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} V_{\tau}^{\tau+1} g.$$

Сужение каждой функции g класса $MV(\mathbb{R}, H)$ на любой отрезок $J = [a, b]$ имеет ограниченную вариацию на J и порождает на пространстве $E = C(J, H)$ линейный функционал Λ . Его норма в пространстве E^* , сопряжённом к пространству E , совпадает с вариацией функции g на отрезке $J = [a, b]$. Далее, $MV^l(\mathbb{R})$ – банахово пространство функций $x: \mathbb{R} \rightarrow H$, сужения которых на любой отрезок $J_{\tau} = [\tau, \tau + 1]$ принадлежат $V^l(J_{\tau})$, и имеет смысл и конечна норма

$$\|x; MV^l\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|x; V^l(J_{\tau})\|.$$

Пусть ψ – функция класса $C_0(\mathbb{R})$, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < r_0 \leq |\psi(t)| \leq R_0 < \infty \quad \text{и} \quad 0 < \delta < r_0.$$

Обозначим через $K_2(\psi, \delta)$ часть класса $MV(\mathbb{R}, H)$, состоящую из функций $g: \mathbb{R} \rightarrow H$, удовлетворяющих неравенству

$$\int_a^b (\psi(t), dg(t)) \geq \delta V_a^b g, \quad (24)$$

где a и b – произвольные действительные числа, удовлетворяющие оценкам $1 \leq b - a \leq 3$. В случае $a = t_0$, $b = t_1$ и абсолютно непрерывной на отрезке $J = [a, b]$ функции $g(t)$ неравенство (24) совпадает с фигурирующим в определении (18) неравенством.

Включение $K_1(\psi, \delta) \subset K_2(\psi, \delta)$ является строгим. Через $K_2(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ обозначим совокупность функций x класса $MV^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathcal{L}(x) \in K_2(\psi(t), \delta)$. Множество $K_2(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ образует клин в пространстве $MV^l(\mathbb{R})$, содержащий клин $K_1(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ в качестве собственной части. Вместе с тем аналоги обратных неравенств (6), (16) справедливы и для клина $K_2(\mathcal{L}, \psi, \delta)$.

Теорема 5. *Существует такая постоянная $c_2(\mathcal{L}, \psi, \delta)$, что для всех функций x класса $K_2(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ верно неравенство*

$$\|x; V^l(J_\tau)\| \leq c_2(\mathcal{L}, \psi, \delta) \|x; L_1(\tau - 1, \tau + 2)\|. \quad (25)$$

Доказательство. Пусть $x \in K_2(\mathcal{L}, \psi, \delta)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $a = \tau - 1$, $b = \tau + 2$, $J = [a, b]$. Обозначим через v решение задачи Коши

$$\mathcal{L}(v) = 0, \quad v^{(i)}(a) = x^{(i)}(a + 0), \quad i = \overline{0, l-1}.$$

Функция $u = x - v$ принадлежит пространству $V^l(J, H)$ и $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(x) = \Lambda$. Функционал Λ принадлежит пространству E^* , сопряжённому к пространству $E = C(J)$. Выберем слабо сходящуюся к Λ последовательность абсолютно непрерывных функционалов Λ_n так, что справедливо заключение предложения 4. Поскольку $x \in K_2(\mathcal{L}, \psi, \delta)$, то справедливо неравенство

$$\Lambda(\psi) \geq \delta \|\Lambda; E^*\|,$$

следствием которого является оценка

$$\Lambda_n(\psi) \geq \frac{\delta}{2} \|\Lambda; E^*\|, \quad n > n_0,$$

где n_0 — достаточно большое натуральное число.

Положим

$$u_n = \mathcal{B}(\Lambda_n), \quad x_n = u_n + v.$$

Очевидно, что $x_n \in \mathcal{K}_1(\mathcal{L}, \psi, \delta/2)$. Применив к функциям x_n теорему 4, приходим к оценкам

$$\|x_n; W^l(J_\tau)\| \leq c_1(\mathcal{L}, \psi, \delta/2) \|x_n; L_1(a, b)\|. \quad (26)$$

Согласно лемме 7 справедливы соотношения

$$D^i x_n \rightarrow D^i x \quad \text{в } \sigma(E^*, E), \quad i = \overline{0, l}, \quad \text{и} \quad x_n \rightarrow x \quad \text{в } L(J).$$

Переходя в (26) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем неравенство (25), в котором

$$c_2(\mathcal{L}, \psi, \delta) = c_1(\mathcal{L}, \psi, \delta/2).$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Для всех функций x класса $K_2(\mathcal{L}, \psi, \delta)$ верно неравенство*

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|x; V^l(J_\tau)\| \leq 3c_2(\mathcal{L}, \psi, \delta) \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|x; L_1(J_\tau)\|.$$

Сюръективность дифференциальных операторов $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ в рассматриваемых выше функциональных пространствах не предполагалась. К данному кругу вопросов можно добавить проблему обратимости этих операторов, интегральное представление операторов $\mathcal{L}^{-1}$, $\mathcal{A}^{-1}$, положительность функции Грина относительно переменных конусов. Применительно к пространствам почти периодических функций ряд важных результатов в указанных направлениях установлен в [3, гл. 1, 2]. Интересные приложения конусных методов к задачам автоматического регулирования приведены в книге [4, гл. 4].

Аналогичные вопросы рассматривались в работе [5]. Новизна представленных выше результатов связана с двумя обстоятельствами: в отличие от [5] рассматривается переменный, а не постоянный конус $\mathbb{R}_+^m$ в пространстве $\mathbb{R}^m$; обратные неравенства из [5] имеют характер внутренних оценок решений дифференциальных неравенств.

Установленные в статье результаты охватывают пространства функций, определённых на всей действительной оси $\mathbb{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
2. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
3. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М., 1970.
4. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. М., 1985.
5. *Климов В.С.* Внутренние оценки решений линейных дифференциальных неравенств // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1034–1044.
6. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
7. *Красносельский М.А., Рутецкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
8. *Вулих Б.З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах. Калинин, 1978.
9. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2007.
10. *Богачёв В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. М.; Ижевск, 2011.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
12. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М., 1971.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.
После доработки 24.07.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.