

УДК 517.925.5

СРАВНЕНИЕ СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2023 г. А. Х. Сташ

Изучены показатели колеблемости дифференциальных систем. Установлено отсутствие зависимости между спектрами показателей колеблемости нелинейной системы и системы её первого приближения, а именно, построена двумерная нелинейная система, спектры показателей колеблемости сужения которой на любую открытую окрестность нуля фазовой плоскости состоят из всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, а спектры линейной системы её первого приближения – только из одного элемента.

DOI: 10.31857/S0374064123080125, EDN: IRCYRW

Введение. Для изучения колебательных свойств движения И.Н. Сергеевым были введены сначала *характеристические частоты* [1], а затем и показатели *колеблемости*, *вращаемости* и *блуждаемости* [2, 3].

Все перечисленные показатели, как и *линейные* (см. [4]), оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определённым на всей положительной полуоси времени. Это затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В работе [4] предпринята первая попытка распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, а именно, определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели. В статьях [5, 6] были анонсированы результаты исследования этих показателей по первому приближению.

В настоящей работе изучаются *линейные показатели колеблемости* нелинейной системы и системы её первого приближения. Установлено существование нелинейной системы со счётными спектрами линейных показателей колеблемости, в то время как спектры соответствующей линейной системы её первого приближения состоят ровно из одного неотрицательного числа.

1. Базовые понятия. Для заданного натурального $n > 1$ и заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовом (векторном) фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши. С системой (1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f'_x(t, 0)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f'_x(t, 0)x| = o(|x|), \quad x \rightarrow 0.$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1), через $x_f(\cdot, x_0)$ – то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0, x_0) = x_0$, а через G_* , G_δ или $G_{\delta, \gamma}$ – множества всех значений $x_0 \in G$, удовлетворяющих соответственно условиям $x_0 \neq 0$, $|x_0| = \delta$ или $\delta < |x_0| < \gamma$.

Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [1]. Будем говорить, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой проколотовой окрестности этой точки функция

y принимает как положительные (соответственно неотрицательные), так и отрицательные (соответственно неположительные) значения.

Определение 2 [2, 3]. Для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ через $\nu^\alpha(f, x_0, m, t)$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно обозначим:

- число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;
- число точек *нестрогой смены знака* скалярного произведения $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;
- число *нулей* функции $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;
- число *корней* (т.е. нулей с учётом их кратности) функции $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;
- число *гиперкорней* функции $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчёта этого количества каждый некрatный корень считается ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз, независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [2–4]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\alpha(f, x_0) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(f, x_0, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(f, x_0) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(f, x_0, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(f, x_0) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(f, x_0, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(f, x_0) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(f, x_0, m, t) \right). \end{aligned}$$

В случае совпадения какого-либо нижнего показателя с аналогичным верхним будем называть его *точным*, убирая в его обозначении знаки “ $\sim$ ” и “ $\wedge$ ”. В случае совпадения какого-либо слабого показателя с аналогичным сильным будем называть его *абсолютным*, убирая в его обозначении знаки “ $\circ$ ” и “ $\bullet$ ”.

Для каждого показателя колеблемости $\varkappa = \hat{\nu}_\bullet^\alpha, \check{\nu}_\bullet^\alpha, \hat{\nu}_\circ^\alpha, \check{\nu}_\circ^\alpha$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ введём обозначение $\varkappa(f, M) \equiv \{\varkappa(f, x_0) \mid x_0 \in M\}$.

2. Формулировка и доказательство основного результата.

Теорема. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существуют две системы с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, первая из которых, линейная вида (2) и служащая системой первого приближения для другой, удовлетворяет соотношениям

$$\nu^-(f, G_*) = \nu^\sim(f, G_*) = \{0\}, \quad (3)$$

$$\nu^0(f, G_*) = \nu^+(f, G_*) = \nu^*(f, G_*) = \{1\}, \quad (4)$$

а вторая система вида (1) – при любом $\varepsilon > 0$ соотношению

$$\varkappa(f, G_{0,\varepsilon}) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad \varkappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*. \quad (5)$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ для некоторой линейной системы вида (2) с условиями (3), (4) при любых $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $0 < \alpha < \beta \leq 1$ найдётся возмущённая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(x, t) \equiv f(t, x), \quad |B(x, t)| \leq |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

обладающая свойствами

$$\nu^-(f, G_\alpha) = \nu^-(f, G_\beta) = \nu^\sim(f, G_\alpha) = \nu^\sim(f, G_\beta) = \{0\},$$

$$\nu^0(f, G_\alpha) = \nu^0(f, G_\beta) = \nu^+(f, G_\alpha) = \nu^+(f, G_\beta) = \nu^*(f, G_\alpha) = \nu^*(f, G_\beta) = \{1\},$$

$$\nu^-(f, G_{\alpha,\beta}) = \nu^\sim(f, G_{\alpha,\beta}) = \nu^0(f, G_{\alpha,\beta}) = \nu^+(f, G_{\alpha,\beta}) = \nu^*(f, G_{\alpha,\beta}) = \{q\}.$$

Доказательство леммы. 1. Рассмотрим линейную периодическую систему (2), записываемую в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2 \equiv G$ в виде

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv f_I(t, x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2} \cos t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Она задаёт вращение фазовой плоскости вокруг точки $x = 0$ с мгновенной скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0 \in G_*$ за время t равен

$$\varphi(t, x_f(\cdot, x_0)) = \frac{\pi}{2} \sin t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad x_f(t_k, x_0) = (-1)^{k-1} x_f(t_1, x_0), \quad t_k \equiv \pi k - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, решение $x_f(\cdot, x_0)$, совершая поворот на угол π , будет ортогонально в одной точке заданному ненулевому вектору. Принимая во внимание, что угол между векторами $x_f(\cdot, x_0)$ и x_0 заключён в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и функция $\dot{x}_f(\cdot, x_0)$ обнуляется только в точках t_k , приходим к отсутствию нестрогих смен знака у скалярной функции $\langle x_f(\cdot, x_0), x_0 \rangle$. Следовательно, при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено $\nu^-(f_I, x_0, x_0, t) = \nu^+(f_I, x_0, x_0, t) = 0$, откуда следует свойство (3). Для любого вектора m , не коллинеарного вектору x_0 , функция $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$ не имеет кратных нулей и на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$ длины π имеет один нуль, а значит, выполняется свойство (4).

2. На отрезке $r \in [0, 1]$ для выбранных $0 < \alpha < \beta \leq 1$ зададим функции

$$\psi_{\pm}(r) \equiv 1 \pm \frac{r^2(r - \alpha)^2(r - \beta)^2}{(r^2 + 2)^2} \in (0, 2).$$

Для нелинейной периодической системы вида (1) с правой частью $g(t, x) = \psi_-(|x|)f_I(t, x)$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\varphi(t, x_g(\cdot, x_0)) = \frac{\pi}{2} \psi_-(|x_0|) \sin t \in \left[-\frac{\pi}{2} \psi_-(|x_0|), \frac{\pi}{2} \psi_-(|x_0|) \right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad \alpha < |x_0| < \beta.$$

Скалярное произведение решения $x_g(\cdot, x_0)$, совершающего поворот менее чем на π , и вектора x_0 отлично от нуля. Поэтому для значения $q = 0$ выберем нелинейную систему

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_I(t, x), & 0 < |x| \leq \alpha \text{ или } |x| \geq \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_-(|x|)f_I(t, x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Для нелинейной периодической системы вида (1) с правой частью $h(t, x) = \psi_+(|x|)f_I(t, x)$ будем иметь

$$\{\varphi(t, x_h(\cdot, x_0)) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \supset \left(-\frac{\pi}{2} \psi_+(|x_0|), \frac{\pi}{2} \psi_+(|x_0|) \right) \supset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \alpha < |x_0| < \beta.$$

На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, решение $x_h(\cdot, x_0)$, совершая поворот не менее чем на π (но менее чем на 2π), будет ортогонально в одной или двух точках наперёд заданному ненулевому вектору. Следовательно, для значения $q = 1$ выберем систему

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_I(t, x), & 0 < |x| \leq \alpha \text{ или } |x| \geq \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|)f_I(t, x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

а для значения $q = l_1/(l_1 + l_2)$ – систему

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_I(t, x), & 0 < |x| \leq \alpha \text{ или } |x| \geq \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|)f_I(t, x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in [0, 2\pi l_1], \\ \psi_-(|x|)f_I(t, x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in [2\pi l_1, 2\pi(l_1 + l_2)], \end{cases}$$

где в кольце $\alpha < |x| < \beta$ функция $f(t, x)$ периодически (с периодом $T = 2\pi(l_1 + l_2)$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$) продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Лемма доказана.

Теперь перейдём к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы. Занумеровав все рациональные числа из отрезка $[0, 1]$ натуральными числами, определим последовательность $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$. По этой последовательности образуем следующую

$$s_1; s_1, s_2; s_1, s_2, s_3; \dots; s_1, s_2, s_3, \dots, s_k; \dots,$$

которую обозначим через $(q_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Единичный круг $|x| \leq 1$ разобьём на счётное число колец вида

$$\alpha_{k+1} < |x| < \alpha_k, \quad \alpha_k = 2^{1-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Далее выберем линейную систему (6) и на основании леммы построим её в каждом кольце (7) так, чтобы при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнялись равенства

$$\varkappa(f, G_{\alpha_{k+1}, \alpha_k}) = \{q_k\}, \quad \varkappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*.$$

В кольце $1 \leq |x| < +\infty$ и на каждой окружности $|x| = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, линейную систему (6) оставляем без изменения, поэтому

$$\nu^-(f, G_{\alpha_k}) = \nu^-(f, G_{1,+\infty}) = \nu^\sim(f, G_{\alpha_k}) = \nu^\sim(f, G_{1,+\infty}) = \{0\},$$

$$\nu^0(f, G_{\alpha_k}) = \nu^0(f, G_{1,+\infty}) = \nu^+(f, G_{\alpha_k}) = \nu^+(f, G_{1,+\infty}) = \nu^*(f, G_{\alpha_k}) = \nu^*(f, G_{1,+\infty}) = \{1\}.$$

Таким образом, из условия $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ следует справедливость соотношения (5). Теорема доказана.

Заключение. Полученный результат показывает отсутствие связи в общем случае между спектрами показателей колеблемости нелинейной системы и системы её первого приближения. Интересным остаётся вопрос о возможности нахождения условий на коэффициенты линейной системы, позволяющих однозначно восстановить спектр какого-либо показателя колеблемости нелинейной системы.

Автор выражает искреннюю признательность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
3. Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2015. Т. 46. Вып. 2. С. 171–183.
4. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.
5. Сергеев И.Н. Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1574–1576.
6. Сергеев И.Н. О некоторых затруднениях при исследовании по первому приближению сферических и шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 856–858.

Адыгейский государственный университет,
г. Майкоп

Поступила в редакцию 07.05.2023 г.
После доработки 25.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.