

УДК 517.977

КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ СИСТЕМ

© 2023 г. О. Б. Цехан

Для линейных нестационарных сингулярно возмущённых систем (ЛНСВС) с квазидифференцируемыми коэффициентами и малым параметром при некоторых производных рассматривается задача равномерной наблюдаемости. Доказаны независимые от малого параметра необходимые и достаточные условия квазидифференцируемости множества выходных функций, построены независимые от малого параметра матрицы наблюдаемости связанных с ЛНСВС медленной и семейства быстрых подсистем, установлена связь между ними и матрицей наблюдаемости исходной системы. На основе полной декомпозиции исходной ЛНСВС относительно действия группы линейных невырожденных преобразований доказаны ранговые, независимые от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений, достаточные условия равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Условия выражены через матрицы наблюдаемости медленной и семейства быстрых подсистем, имеющих меньшие размерности, чем исходная ЛНСВС.

DOI: 10.31857/S0374064123080113, EDN: IQNKAJ

Введение. Наблюдаемость, наряду с устойчивостью, управляемостью и стабилизируемостью, является фундаментальным структурным свойством динамических систем. Суть задачи наблюдаемости заключается в выяснении возможности однозначного восстановления состояний системы по результатам наблюдений, что равносильно взаимно-однозначному соответствию между множеством выходных функций и множеством начальных (или текущих) состояний системы. При этом важно понимать, в каком виде представлена информация о выходных функциях системы наблюдения (например, известны значения выходной функции в фиксированные моменты времени, в произвольно выбранные моменты, известны значения производных и т.п.). Понятие наблюдаемости впервые сформулировано Р. Калманом в работе [1]; там же приведён и критерий наблюдаемости линейных стационарных систем. В нестационарном случае известные необходимые и достаточные условия наблюдаемости [2, с. 66, 67] имеют неявный характер, поскольку требуют знания фундаментальной матрицы. Существующие коэффициентные признаки наблюдаемости основаны на высокой степени гладкости либо коэффициентов [3, с. 303–306], либо выходных сигналов [4, с. 20; 5, с. 191, 192]. Отметим, что для нестационарных систем наблюдения рассматриваются различные понятия наблюдаемости (см. [2–10] и цитированную в них литературу), которые отличаются рядом особенностей и в общем случае не эквивалентны.

В данной работе при исследовании наблюдаемости вместо дифференцируемости выходов используется квазидифференцируемость по некоторой нижнетреугольной матрице $P(t)$ [10, 11], что позволяет установить явные условия наблюдаемости, существенно усиливающие известные.

Сингулярно возмущённые системы (СВС) являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами изменения переменных, поведение которых может быть описано в стандартной форме системами дифференциальных уравнений с малым параметром при некоторых производных. Для таких систем можно рассматривать различные постановки задач наблюдения, в частности, в зависимости от доступной информации о малом параметре. Одним из “наивных” подходов к исследованию СВС является рассмотрение таких систем при каждом фиксированном значении малого параметра, что позволяет применять условия наблюдаемости и методы восстановления состояний, разработанные для систем без

параметра. Однако такой подход приводит к анализу систем большой размерности, возникают значительные вычислительные трудности, связанные, например, с обращением плохообусловленных матриц. Кроме того, результаты при таком подходе зависят от величины малого параметра, т.е. не являются робастными по этому параметру. Как правило, в реальных прикладных задачах значения малого параметра точно не известны. Поэтому для СВС стремятся получать условия наличия различных её свойств, независимые от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений. Такие формулировки характерны для исследований СВС в рамках теории сингулярных возмущений [12]. Наличие тех или иных структурных свойств СВС управления при всех достаточно малых значениях параметра обеспечивает возможность асимптотического (по малому параметру) решения соответствующих задач управления и наблюдения СВС [13, 14]. Отметим ряд работ, посвящённых изучению свойства наблюдаемости СВС [14–22] (см. также литературу в обзорах [12, 23]). При исследовании свойств систем, имеющих место при всех возможных реализациях параметра, используется термин “робастные свойства” [24].

При исследовании структурных свойств СВС и разработке способов управления и наблюдения ими одним из эффективных методов является процедура декомпозиции, которая может быть выполнена различными способами. Например, в [14, 25] к СВС применяется невырожденное расщепляющее преобразование, эквивалентным образом сводящее исходную двухтемповую систему к разделённым по темпам подсистемам меньшей размерности, асимптотически (по малому параметру) близким к системам, независимым от малого параметра. При использовании [12] декомпозиционного подхода представляют интерес условия, при выполнении которых утверждения о наличии свойств для исходных систем высокого порядка вытекают из факта наличия этих свойств для некоторых подсистем меньшего порядка. Такие условия позволяют выводить суждения о структурных свойствах СВС при всех достаточно малых значениях параметра из аналогичных свойств у связанных с ней независимых от малого параметра систем меньшей размерности.

В данной работе для линейных нестационарных СВС с квазидифференцируемыми коэффициентами и малым параметром при некоторых производных рассматривается задача равномерной наблюдаемости. Для линейных нестационарных систем наблюдения без малого параметра равномерная наблюдаемость исследовалась в [6–10].

1. Квазидифференцируемость. Основные результаты, полученные в данной работе, используют понятие квазипроизводной [11] и некоторые простые факты, связанные с ним.

Пусть $T = [t_0, t_1]$ – отрезок действительной оси $\mathbb{R}$, m – заданное целое неотрицательное число. Обозначим через $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных $(m+1) \times (m+1)$ -матриц $P(t)$ с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$, $i, k = \overline{0, m}$, удовлетворяющими условию $p_{kk}(t) \neq 0$ при $t \in T$, $k = \overline{0, m}$. Выберем какую-либо матрицу $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_m(T)$. Квазипроизводные ${}^0_P w(t)$, ${}^1_P w(t)$, ..., ${}^m_P w(t)$ порядка от 0 до m относительно матрицы $P(t)$ непрерывной функции $w : T \rightarrow \mathbb{R}$ определяются по следующим рекуррентным правилам:

$$\begin{aligned} {}^0_P w(t) &= p_{00}(t)w(t), \quad {}^1_P w(t) = p_{11}(t) \frac{d({}^0_P w(t))}{dt} + p_{10}(t)({}^0_P w(t)), \quad \dots \\ \dots, \quad {}^k_P w(t) &= p_{kk}(t) \frac{d({}^{k-1}_P w(t))}{dt} + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)({}^i_P w(t)), \quad k = \overline{2, m}. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что операции дифференцирования в формулах (1) выполнимы и приводят к непрерывным функциям.

Очевидно, что всякая m раз непрерывно дифференцируемая функция квазидифференцируема по единичной матрице E_{m+1} . Однако несложные примеры (см. [8, с. 15]) показывают, что недифференцируемая в обычном смысле функция может быть m раз квазидифференцируема по некоторой матрице $P \in \mathcal{U}_m(T)$.

Семейство всех непрерывных функций, обладающих непрерывными квазипроизводными (1) относительно заданной матрицы $P \in \mathcal{U}_m(T)$, обозначим через $C^m_P(T)$. Очевидно, $C^m_P(T)$ – векторное пространство над полем действительных чисел.

2. Описание системы наблюдения. Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную сингулярно возмущённую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{aligned} \quad (2)$$

со скалярной выходной функцией

$$v(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), \quad t \in T. \quad (3)$$

Здесь μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$; $x(t)$ – вектор медленных переменных; $y(t)$ – вектор быстрых переменных; $v(t)$ – выходная функция системы; $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, – непрерывные на T матричные функции соответствующих размерностей; $c_j(t)$, $j = 1, 2$, – непрерывные на T функции, записанные как вектор-строки.

Обозначим $n = n_1 + n_2$, $z^T(t) = (x^T(t), y^T(t))$, $z_0^T = (x_0^T, y_0^T)$, T – символ транспонирования. Чтобы подчеркнуть зависимость решения системы (2) от параметра μ и начальных условий (в зависимости от контекста), будем использовать одну из записей: $z(t)$, $z(t, \mu)$, $z(t, \mu, x_0, y_0)$, $z(t, \mu, z_0)$. Определим по параметрам ЛНСВС (2), (3) вектор-функцию $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, а также зависящую от параметра $\mu > 0$ матричную функцию

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t)/\mu & A_4(t)/\mu \end{pmatrix}.$$

Тогда систему наблюдения (2), (3) можно представить в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(t, \mu)z(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \quad z(t_0) = z_0, \\ v(t) &= c(t)z(t), \quad v \in \mathbb{R}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (4)$$

Отождествим систему (4) с парой (A_μ, c) , состоящей из матричных функций $A(t, \mu)$ и $c(t)$, а совокупность всех таких пар с непрерывными на T компонентами обозначим Σ_μ , $\mu \in (0, \mu^0]$. С целью анализа свойств систем из Σ_μ , справедливых для всех достаточно малых значений параметра μ , представим матрицу $A(t, \mu)$ в виде

$$A(t, \mu) = A^0(t) + \frac{1}{\mu}A^1(t), \quad A^0(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В силу (5) систему (4), определяемую тройкой матричных функций A^0 , A^1 , c и малым параметром $\mu \in (0, \mu^0]$, отождествим также со множеством $\{A^0, A^1, c, \mu\}$. Если параметр μ принимает всевозможные значения из полуинтервала $(0, \mu^0]$, то получаем μ -параметрическое семейство систем $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$. Фиксированное $\mu \in (0, \mu^0]$ выделяет из семейства $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$ конкретную систему (A_μ, c) .

Пусть в системе (2) реализовались некоторые фиксированное $\mu \in (0, \mu^0]$ и неизвестное начальное состояние $z_0 = z(t_0)$, которые породили в силу (2), (3) процесс $z(t, \mu) = z(t, \mu, z_0)$, $t \in T$, и выходную функцию $v(t, \mu) = v(t, \mu, z_0)$, $t \in T$. Для системы (A_μ, c) обозначим через

$$\mathcal{V}_\mu = \{(v(t, \mu, z_0), t \in T), \quad z_0 \in \mathbb{R}^n\}$$

множество выходных функций.

Пусть задана некоторая матрица $P \in \mathcal{U}_m(T)$.

Определение 1. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ система (A_μ, c) имеет P -класс m (записываем как $(A_\mu, c) \in \{P, m\}$), если всякая её выходная функция $v(t, \mu, z_0)$, $t \in T$, из множества $\mathcal{V}_\mu$ имеет непрерывные квазипроизводные относительно матрицы P до порядка m включительно.

Будем говорить, что *семейство систем* $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$ имеет P -класс m , если любая система из этого семейства имеет P -класс m .

При заданном положительном m обозначим через $\mathcal{P}_m(A_\mu, c)$ подмножество множества $\mathcal{U}_m(T)$, состоящее из таких матриц P , относительно которых система (A_μ, c) имеет класс m . Пусть выбрана некоторая независящая от μ матрица $P \in \mathcal{P}_m(A_\mu, c)$.

Укажем условия, при выполнении которых система (A_μ, c) имеет P -класс m . Применение к системе (4) леммы 2.1 из [8, с. 32] показывает, что при фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ указанная система имеет P -класс m тогда и только тогда, когда для всех $k = \overline{1, m}$ существуют и непрерывны функции-строки

$$s_0(t, \mu) = p_{00}(t)c(t), \quad s_k(t, \mu) = p_{kk}(t)(s_{k-1}(t, \mu)A(t, \mu) + \dot{s}_{k-1}(t, \mu)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_i(t, \mu). \quad (6)$$

С целью выяснения структуры зависимости функции $s_k(t, \mu)$ от параметра μ по рекуррентным формулам (6) с учётом структуры матриц (5) определим n -вектор-функции строки $s_k^0(t)$, $s_k^1(t)$, $\dots$, $s_k^k(t)$, $k = \overline{0, m}$, следующим образом:

$$s_0^0(t) = p_{00}(t)c(t), \quad s_0^1(t) = 0, \quad s_0(t, \mu) = s_0^0(t),$$

$$s_1^0(t) = p_{11}(t)(s_0^0(t)A^0(t) + \dot{s}_0^0(t)) + p_{10}(t)s_0^0(t), \quad s_1^1(t) = p_{11}(t)s_0^0(t)A^1(t), \quad s_1(t, \mu) = s_1^0(t) + \frac{1}{\mu}s_1^1(t),$$

$$s_2^0(t) = p_{22}(t)(s_1^0(t)A^0(t) + \dot{s}_1^0(t)) + \sum_{j=0}^1 p_{2j}(t)s_j^0(t), \quad s_2^2(t) = 0,$$

$$s_2^1(t) = p_{22}(t)(s_1^0(t)A^1(t) + s_1^1(t)A^0(t) + \dot{s}_1^1(t)) + \sum_{j=0}^1 p_{2j}(t)s_j^1(t), \quad s_2^2(t) = p_{22}(t)s_1^1(t)A^1(t),$$

$$s_2(t, \mu) = s_2^0(t) + \frac{1}{\mu}s_2^1(t) + \frac{1}{\mu^2}s_2^2(t) = \sum_{j=0}^2 \frac{1}{\mu^j}s_2^j(t), \quad \dots,$$

$$\begin{aligned} s_k(t, \mu) &= p_{kk}(t) \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\mu^j} (s_{k-1}^j(t)A^0(t) + \dot{s}_{k-1}^j(t)) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\mu^{j+1}} s_{k-1}^j(t)A^1(t) \right) + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(t) \sum_{i=0}^j \frac{1}{\mu^i} s_j^i(t) = \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{\mu^j} \left(p_{kk}(t)(s_{k-1}^j(t)A^0(t) + s_{k-1}^{j-1}(t)A^1(t) + \dot{s}_{k-1}^j(t)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_i^j(t) \right) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{\mu^j} s_k^j(t). \end{aligned}$$

Здесь n -вектор-функции $s_k^j(t)$, $j = \overline{0, k}$, $k = \overline{0, m}$, определены по рекуррентным формулам

$$s_k^j(t) = p_{kk}(t)(s_{k-1}^j(t)A^0(t) + \dot{s}_{k-1}^j(t) + s_{k-1}^{j-1}(t)A^1(t)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_i^j(t)$$

с учётом того, что $s_k^i(t) = 0$ при $i < 0$ или $i > k$.

Обозначим через $C^1(T, \mathbb{R})$ множество непрерывно дифференцируемых на отрезке T скалярных функций.

Лемма 1. Для заданных скалярных функций $a_i(t)$, $t \in T$, $i = \overline{0, \theta}$ (θ – заданное целое неотрицательное число), их линейная комбинация

$$f(t, \mu) = \sum_{i=0}^{\theta} \frac{a_i(t)}{\mu^i}, \quad t \in T, \quad (7)$$

непрерывно дифференцируема на отрезке T при любом $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда каждая из функций $a_i(t)$, $i = \overline{0, \theta}$, непрерывно дифференцируема на T .

Доказательство. Достаточность очевидна, так как свойство непрерывной дифференцируемости функций сохраняется при умножении их на ненулевую константу.

Необходимость. Зададим $\theta + 1$ различных положительных действительных чисел $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_\theta$ и, используя обозначение $\xi_j = 1/\mu_j$, запишем, исходя из формулы (7), равенства

$$f(t, \mu_j) = \sum_{i=0}^{\theta} \frac{1}{\mu_j^i} a_i(t) = \sum_{i=0}^{\theta} \xi_j^i a_i(t), \quad t \in T, \quad j = \overline{0, \theta},$$

которые можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} f(t, \mu_0) \\ f(t, \mu_1) \\ \dots \\ f(t, \mu_\theta) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \dots \\ a_\theta(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $(\theta + 1) \times (\theta + 1)$ -матрица V является невырожденной матрицей Вандермонда [26, с. 43, 44]

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \dots & \xi_0^\theta \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^\theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_\theta & \xi_\theta^2 & \dots & \xi_\theta^\theta \end{pmatrix}.$$

Значит, существует обратная матрица V^{-1} и справедливо равенство

$$V^{-1} \begin{pmatrix} f(t, \mu_0) \\ f(t, \mu_1) \\ \dots \\ f(t, \mu_\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \dots \\ a_\theta(t) \end{pmatrix},$$

из которого следует непрерывная дифференцируемость на T функций $a_i(t)$, $i = \overline{0, \theta}$. Лемма доказана.

Из определения квазипроизводных (1) относительно матрицы $P \in \mathcal{U}_m(T)$ для функции $f(t, \mu)$ вида (7) следует представление

$${}_P^k f(t, \mu) = \sum_{j=0}^{\theta} \frac{{}_P^k a_j(t)}{\mu^j}, \quad k = \overline{0, m},$$

с учётом которого из леммы 1 вытекает

Следствие 1. Функция $f(t, \mu)$ вида (7) имеет при любом $\mu > 0$ непрерывную квазипроизводную порядка k , $k \leq \overline{m}$, относительно матрицы P тогда и только тогда, когда каждая из функций $a_j(t)$, $j = \overline{0, \theta}$, имеет непрерывную квазипроизводную порядка k относительно P .

Используя лемму 2.1 из [8], лемму 1 и следствие 1, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Для независимой от параметра μ матрицы $P \in \mathcal{U}_m(T)$ система (A_μ, c) имеет P -класс $n - 1$ при каждом $\mu \in (0, \mu^0]$ тогда и только тогда, когда n -вектор-функции $s_k^j(t)$, $k = \overline{0, n - 1}$, $j = \overline{0, k}$, непрерывно дифференцируемы на T . При этом для функций $s_k(t, \mu)$ справедливо представление в виде

$$s_k(t, \mu) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{\mu^j} s_k^j(t).$$

Следствие 2. Любое семейство $\{A^0, A^1, c\}_\mu$, $\mu > 0$, имеет P -класс n тогда и только тогда, когда верны предположения теоремы 1.

3. Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость. Пусть для заданной матрицы P из множества $\mathcal{U}_{n-1}(T)$ и фиксированного $\mu \in (0, \mu^0]$ система $(A_\mu, c) \in \{P, n-1\}$. Тогда на множестве $\mathcal{V}_\mu$ выходных функций системы (A_μ, c) правила (1) задают оператор, который каждой функции $v(\cdot, \mu, z_0) \in \mathcal{V}_\mu$ ставит в соответствие n -вектор-строку

$$({}_P^0 v(t, \mu, z_0), {}_P^1 v(t, \mu, z_0), \dots, {}_P^{n-1} v(t, \mu, z_0)), \quad t \in T. \quad (8)$$

В соответствии с соотношением для выхода системы (4) любая функция $v(\cdot, \mu, z_0) \in \mathcal{V}_\mu$ является образом некоторого процесса $z(t, \mu, z_0)$, $t \in T$, поэтому композиция отображений (1) и (4) определяет линейное отображение из множества процессов $Z(\mu) = \{(z(t, \mu, z_0), t \in T), z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ во множество n -векторов $V_P(\mu) = \{(V_P(t, \mu, z_0), t \in T), z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ квазипроизводных выходных функций и при каждом $t \in T$ задаёт отображение из множества $\{z(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ векторов состояния во множество $\{V_P(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ векторов квазипроизводных выходных функций в точке $t \in T$.

Следуя работе [6], введём определение P -равномерной наблюдаемости ЛНСВС (2), (3).

Определение 2. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ система (2), (3) класса $\{P, n-1\}$ называется P -равномерно наблюдаемой на T , если для каждого $t \in T$ отображение

$$\{z(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\} \rightarrow \{V_P(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\}, \quad (9)$$

задаваемое системой (4) и правилами (1), является инъекцией.

Семейство систем $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0} \in \{P, n-1\}$ называется P -равномерно наблюдаемым на T , если любая система семейства P -равномерно наблюдаема на T .

P -равномерная наблюдаемость системы (A_μ, c) при фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ означает, что в каждый момент времени $t \in T$ по известному μ и известным в этот момент времени выходной функции $v(t)$ и её последовательным квазипроизводным ${}_P^k v(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, состояние $z(t, \mu)$ системы (2), (3) можно определить однозначно.

P -равномерная наблюдаемость семейства систем $(A^0, A^1, c)_{\mu^0}$ означает, что такое восстановление состояния возможно при любом $\mu \in (0, \mu^0]$. В силу линейности отображения из определения 2 это равносильно тому, что при любом $z_0 \in \mathbb{R}^n$ μ -параметрическому семейству векторов квазипроизводных $\mathbf{V}_P \equiv \{(V_P(t, \mu, z_0), t \in T), \mu \in (0, \mu^0]\}$ однозначно соответствует процесс $z(t, \mu)$ как функция от (t, μ) на $T \times (0, \mu^0]$, т.е. при любом $\mu \in (0, \mu^0]$ совпадающим вектор-функциям $(V_P(t, \mu), t)$, $t \in T$, соответствуют совпадающие процессы $z(t, \mu)$, $t \in T$.

Приведём пример, который показывает зависимость инъективности отображения (9) от параметра $\mu > 0$. Для этого рассмотрим систему (2), (3) второго порядка с матрицами

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.01\mu^{-1} & -\mu^{-1} \end{pmatrix}, \quad c(t) = (t \quad t), \quad n_1 = n_2 = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1,$$

для случая дифференцируемых выходов (т.е. квазидифференцируемых по матрице $P = E_2$).

Несложно показать, что для начальных условий $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ решение данной системы имеет вид

$$x(t, \mu, x_0, y_0) = e^t x_0, \quad y(t, \mu, x_0, y_0) = 1.01x_0(1 + \mu)^{-1}(e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0,$$

а соответствующая выходная функция и её первая производная равны

$$v(t, \mu, x_0, y_0) = t(e^t x_0 + 1.01x_0(1 + \mu)^{-1}(e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0),$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t, \mu, x_0, y_0) &= e^t x_0 + 1.01x_0(1 + \mu)^{-1}(e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0 + \\ &+ t(e^t x_0 - 1.01x_0(1 + \mu)^{-1}(\mu^{-1}e^{-t/\mu} + e^t) - \mu^{-1}e^{-t/\mu} y_0). \end{aligned}$$

При $t = 0$ и любом $\mu > 0$ начальные состояния $(x_0^1, y_0^1) = (0, 1)$ и $(x_0^2, y_0^2) = (1, 0)$ неразличимы по информации (8), так как $v(0, \mu, 0, 1) = v(0, \mu, 1, 0) = 0$, $\dot{v}(0, \mu, 0, 1) = \dot{v}(0, \mu, 1, 0) = 1$.

Если $\mu = 0.01$, то для начальных состояний вида $(x_0^3, y_0^3) = (-a, a)$ и $(x_0^4, y_0^4) = (-b, b)$, $a \neq b$, текущие состояния $z(t, 0.01, -a, a)$ и $z(t, 0.01, -b, b)$ при любом $t \in T$ неразличимы, так как $v(t, 0.01, -a, a) = v(t, 0.01, -b, b) \equiv 0$, $t \in T$. Для $t \neq 0$ и $\mu \neq 0.01$ отображение (9) инъективно.

Далее найдём условия на матрицы системы (2), (3), при выполнении которых она P -равномерно наблюдаема для всех достаточно малых значений $\mu > 0$.

Несложно показать, что для системы $(A_\mu, c) \in \{P, n-1\}$ справедливы соотношения

$$s_j(t, \mu)z(t, \mu) = {}^j_P v(t, \mu), \quad j = \overline{0, n-1},$$

которые с учётом обозначений

$$S_P(t, \mu) = \begin{pmatrix} s_0(t, \mu) \\ s_1(t, \mu) \\ \dots \\ s_{n-1}(t, \mu) \end{pmatrix} \quad (10)$$

приводят к системе уравнений $S_P(t, \mu)z(t, \mu) = V_P(t, \mu, z_0)$ относительно вектора состояния $z(t, \mu)$, $t \in T$, явным образом задающей отображение из определения 2.

Очевидно, что для каждой матрицы $P \in \mathcal{P}_{n-1}(A_\mu, c)$ можно определить матрицу наблюдаемости $S_P(t, \mu)$ по формулам (6), (10). Из леммы 2.5 [8, с. 54] следует, что при каждом $\mu > 0$ и каждом $t \in T$ все матрицы наблюдаемости $S_P(t, \mu)$, $P \in \mathcal{P}_{n-1}(A_\mu, c)$ одновременно либо вырождены, либо невырождены. Инъективность отображения (9) в определении 2 определяется невырожденностью матрицы наблюдаемости $S_P(t, \mu)$ при $t \in T$ и не зависит от выбора матрицы $P \in \mathcal{P}_{n-1}(A_\mu, c)$.

Применив к системе (4) при фиксированном $\mu > 0$ критерий P -равномерной наблюдаемости [8, с. 38], получим утверждение.

Теорема 2. Система (2), (3) класса $\{P, n-1\}$ P -равномерно наблюдаема на T при фиксированном $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } S_P(t, \mu) = n$ при каждом $t \in T$.

Для линейных стационарных СВС можно показать, что если её матрица наблюдаемости является матрицей полного ранга хотя бы при одном $\mu > 0$, то она является матрицей полного ранга при всех достаточно малых $\mu > 0$. Для линейных нестационарных СВС это не так, т.е. существуют линейные нестационарные СВС, для которых матрица наблюдаемости $S_P(t, \mu)$ является матрицей полного ранга при некотором $\mu^* > 0$, но не является матрицей полного ранга при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Продemonстрируем этот факт на примере системы (2), (3) с параметрами

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} -10 & -0.2 \\ 0 & -1/\mu \end{pmatrix}, \quad c(t) = (-1 \quad t), \quad n_1 = n_2 = 1, \quad t \in T = [0, 2].$$

Для этой системы классическая матрица наблюдаемости имеет вид

$$S(t, \mu) = \begin{pmatrix} -1 & t \\ 10 & 1.2 - t/\mu \end{pmatrix},$$

а её определитель $\det S(t, \mu) = -1.2 + t/\mu - 10t$. Тогда при $\mu_1 = 0.1$ $\det S(t, \mu_1) = -1.2 \neq 0$ для всех $t \in T$. Однако для $\mu = t(1.2 + 10t)^{-1}$, где $t \in T$, имеем $\det S(t, \mu) = 0$. Поэтому очевидно, что при всех $\mu \in (0, 2/21.2]$ в точках $t = 1.2\mu(1 - 10\mu)^{-1} \in T$ определитель $\det S(t, \mu) = 0$.

Следствие 3. Существуют ЛНСВС (2), (3) класса $\{P, n-1\}$, которые P -равномерно наблюдаемы на отрезке T при некотором фиксированном $\mu^* > 0$, но при этом любое семейство $\{A^0, A^1, c\}_\mu$, $\mu > 0$, не является P -равномерно наблюдаемым на T .

4. Декомпозиция системы (2), (3) и описание её подсистем. С системой (2), (3) связаны [14] независимые от параметра μ вырожденная система (ВС) и система пограничного слоя (СПС), которые формально получаются из СВС, если рассмотреть её отдельно в “быстрой” и “медленной” временных шкалах при $\mu = 0$.

Предположим, что $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$. Тогда ВС (медленная подсистема) имеет вид

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A_s(t)\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_0) = x_0, \quad v_s(t) = c_s(t)\bar{x}(t), \quad t \in T,$$

$$A_s(t) \equiv A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad c_s(t) \equiv c_1(t) - c_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad (11)$$

и является линейной нестационарной n_1 -мерной системой. Отождествим её с парой (A_s, c_s) .

СПС (или “быстрая” подсистема) для системы (2), (3) записывается следующим образом:

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)\tilde{y}(\tau), \quad v_f(\tau) = c_2(t_0)\tilde{y}(\tau), \quad \tau = \frac{t - t_0}{\mu} \in T_\mu \equiv \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \quad (12)$$

$$\tilde{y}(\tau) = y(t_0 + \mu\tau) - A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \equiv y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0.$$

Она является линейной стационарной n_2 -мерной системой, которую отождествим с парой матриц $(A_4(t_0), c_2(t_0))$.

Наряду со стационарной СПС (12), введём t -семейство $(A_4, c_2)(t)$ быстрых подсистем вида (12) с матрицами $A_4(t)$, $c_2(t)$, где $t \in T$ рассматривается как параметр семейства стационарных систем (по терминологии А.Н. Тихонова [27] – *присоединённая система*).

Заметим, что ВС (11), СПС (12) и t -семейство быстрых подсистем определяются сразу для всего семейства $(A^0, A^1, c)_{\mu^0}$ при любом $\mu^0 > 0$.

Обозначим через $\lambda(A(t))$ корни характеристического уравнения матрицы $A(t)$, а символ $O(\mu)$ будем использовать для описания бесконечно малых величин порядка малости μ .

Следующее утверждение, доказательство которого следует из работ [14, 28], позволяет установить связь между исходной системой (2), (3) и системами (11), (12).

Теорема 3. Пусть $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -\alpha < 0$ при всех $t \in T$ и матричные функции $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, непрерывно дифференцируемы на T . Тогда существует невырожденное линейное нестационарное преобразование фазовых переменных

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = K(t, \mu) \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

с матрицей $K(t, \mu)$ следующей структуры:

$$K(t, \mu) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu H(t, \mu) \\ -L(t, \mu) & E_{n_2} - \mu L(t, \mu)H(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $\det K(t, \mu) \neq 0$ для любых $\mu > 0$ и $t \in T$, которое преобразует систему (2), (3) в систему с разделёнными переменными

$$\dot{\xi}(t) = A_\xi(t, \mu)\xi(t), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\mu \dot{\eta}(t) = A_\eta(t, \mu)\eta(t), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T,$$

$$v(t) = (c_\xi(t, \mu) \quad c_\eta(t, \mu)), \quad t \in T. \quad (14)$$

При этом матричные функции $L(t, \mu)$, $H(t, \mu)$ в формуле (13) являются непрерывно дифференцируемыми на T с ограниченными производными и справедливы представления

$$L(t, \mu) = L_0(t) + \mu R_L(t, \mu), \quad L_0(t) = A_4^{-1}(t)A_3(t),$$

$$H(t, \mu) = H_0(t) + \mu R_H(t, \mu), \quad H_0(t) = A_2(t)A_4^{-1}(t). \quad (15)$$

Матричные функции $R_L(t, \mu)$, $R_H(t, \mu)$ в (15) ограничены на T , а для матриц системы (14) имеет место равномерная по t асимптотика с точностью порядка μ :

$$\begin{aligned} A_\xi(t, \mu) &\equiv A_1(t) - A_2(t)L(t, \mu) = A_s(t) + \mu A_2 R_L(t, \mu) = A_s(t) + O(\mu), \\ A_\eta(t, \mu) &\equiv A_4(t) + \mu L(t, \mu)A_2(t) = A_4(t) + O(\mu), \\ c_\xi(t, \mu) &\equiv c_1(t) - c_2(t)L(t, \mu) = c_s(t) - \mu c_2 R_L(t, \mu) = c_s(t) + O(\mu), \\ c_\eta(t, \mu) &\equiv c_2(t) + \mu c_1(t)H(t, \mu) - \mu c_2(t)L(t, \mu)H(t, \mu) = c_2(t) + O(\mu). \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство. Условия данной теоремы гарантируют выполнение условий теоремы 3.1 из работы [14]. Поэтому существует преобразование $K(t, \mu)$ вида (13), где $L(t)$, $H(t)$ – ограниченные непрерывно дифференцируемые матрицы с ограниченными на T производными. Кроме того, матричные функции $A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $A_2(t)A_4^{-1}(t)$ непрерывно дифференцируемы на T . Поэтому существуют и ограничены производные $\dot{L}_0(t)$, $\dot{H}_0(t)$. Следовательно, матричные функции $R_L(t, \mu)$, $R_H(t, \mu)$ ограничены на T и справедливы аппроксимации [14, с. 212]

$$L(t, \mu) = L_0(t) + O(\mu), \quad H(t, \mu) = H_0(t) + O(\mu). \quad (17)$$

Из формул (17), (15) и (11) вытекает справедливость представлений (16).

Следствие 4. Матричные функции $A_\xi(t, \mu)$, $A_\eta(t, \mu)$, $c_\xi(t, \mu)$, $c_\eta(t, \mu)$ системы (14) являются $O(\mu)$ -возмущениями матриц вырожденной системы (A_s, c_s) (11) и t -семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$, связанных с (12).

5. Класс $\{P, m\}$ для подсистем ЛНСВС. Пусть задана нижнетреугольная матрица $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, а матрица $\bar{P}$ есть её верхний левый блок размерности $n_1 \times n_1$. Заметим, что $\bar{P} \in \mathcal{U}_{n_1-1}(T)$. Для вырожденной системы (11) понятие класса $\{P, m\}$ вводится, как и в [8]. Так как система пограничного слоя и любая система из t -семейства быстрых подсистем стационарны, то они являются системами класса $\{\bar{P}, m\}$ при любом целом неотрицательном m и любой матрице $\bar{P} \in \mathcal{U}_m(T)$.

Лемма 2. Если $(A_\mu, c) \in \{P, n-1\}$ при любом $\mu > 0$, то $(A_s, c_s) \in \{P, n-1\}$ и $(A_s, c_s) \in \{\bar{P}, n_1-1\}$, где $\bar{P}$ образует верхний левый блок матрицы P .

Доказательство. Из формул (11)–(17) следует, что для выходной функции (3) справедливо представление

$$v(t, \mu, z_0) = c_s(t)x_s(t) + c_2(t)\tilde{y}_f(\tau) + O(\mu). \quad (18)$$

Так как для любого $t \in T$ система $(A_4(t), c_2(t))$ является системой класса $\{\bar{P}, m\}$ при любой матрице $\bar{P} \in \mathcal{U}_m(T)$ и любом целом неотрицательном m , то выход быстрой подсистемы $v_f(\tau) = c_2(t)\tilde{y}_f(\tau)$ имеет непрерывные квазипроизводные любого порядка относительно матрицы P . Тогда из представления выхода $v(t, \mu, z_0)$ в виде суммы (18) и следствия 1 вытекает принадлежность системы (A_s, c_s) классу $\{P, n-1\}$. Очевидно, что $C_P^{n-1}(T) \subset C_{\bar{P}}^{n_1-1}(T)$ и из $(A_s, c_s) \in \{P, n-1\}$ следует $(A_s, c_s) \in \{\bar{P}, n_1-1\}$, что и завершает доказательство леммы.

Однако из принадлежности $(A_s, c_s) \in (\bar{P}, n_1-1)$ в общем случае не следует существования матрицы $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, для которой матрица $\bar{P}$ образует её верхний левый блок и при этом $(A_\mu, c) \in \{P, n-1\}$ хотя бы для одного $\mu > 0$. Продемонстрируем это на примере системы (2), (3) с матрицами

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \gamma(t)/\mu & -1/\mu \end{pmatrix}, \quad c(t) = (\gamma(t) + 1 \quad -1), \quad n_1 = n_2 = m = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 2,$$

где $\gamma(t)$ – непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция на T . Легко показать, что $A_s = a_1 + \gamma(t)a_2$, $c_s = 1$ и ВС принадлежит классу $(\bar{P}, 0)$ при $\bar{P} = E_1$. Вместе с тем данная система не принадлежит классу $(P, 1)$ ни при какой матрице P с верхним левым блоком $\bar{P}$, ни при каком $\mu > 0$, так как $c(t)$ не дифференцируема.

6. Связь матриц наблюдаемости ЛНСВС и её подсистем.

Определение 3. Вырожденная система (11) класса $\{\bar{P}, n_1 - 1\}$ называется $\bar{P}$ -равномерно наблюдаемой на T , если для каждого $t \in T$ и любого $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ отображение

$$\bar{x}(t) \rightarrow (\bar{P}^0 v_s(t), \bar{P}^1 v_s(t), \dots, \bar{P}^{n_1-1} v_s(t)), \quad v_s(t) = v_s(t, x_0),$$

задаваемое системой (11) и правилами (1), инъективно.

Пусть $(A_s, c_s) \in \{\bar{P}, n_1 - 1\}$. Определим $n_1 \times n_1$ -матрицу наблюдаемости вырожденной системы (A_s, c_s) :

$$\bar{S}_{\bar{P}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{s}_0(t) \\ \bar{s}_1(t) \\ \dots \\ \bar{s}_{n_1-1}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (19)$$

где n_1 -вектор-строки $\bar{s}_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$, определяются по формулам

$$\bar{s}_0(t) = \bar{p}_{00}(t)c_s(t), \quad \bar{s}_j(t) = \bar{p}_{jj}(t)(\bar{s}_{j-1}(t)A_s(t) + \dot{\bar{s}}_{j-1}(t)) + \sum_{i=0}^{j-1} \bar{p}_{ji}(t)\bar{s}_i(t). \quad (20)$$

Применяя к линейной нестационарной системе (11) условия из [8], убеждаемся, что справедлива

Теорема 4. Вырожденная система класса $\{\bar{P}, n_1 - 1\}$ $\bar{P}$ -равномерно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда $\text{rank } \bar{S}_{\bar{P}}(t) = n_1$ для любого $t \in T$.

Пусть задана некоторая матрица $\tilde{P} \in \mathcal{U}_{n_2-1}(T)$.

Определение 4. Система пограничного слоя (12) называется $\tilde{P}$ -равномерно наблюдаемой на T_μ , если для каждого $\tau \in T_\mu$ и любого $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ отображение

$$\tilde{y}(\tau) \rightarrow (\tilde{P}^0 v_f(\tau), \tilde{P}^1 v_f(\tau), \dots, \tilde{P}^{n_2-1} v_f(\tau)), \quad v_f(\tau) = v_f(\tau, \tilde{y}_0),$$

задаваемое системой (12) и правилами (1), инъективно.

Будем говорить, что t -семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ $\tilde{P}$ -равномерно наблюдаемо на T_μ , если каждая подсистема из этого семейства $\tilde{P}$ -равномерно наблюдаема.

Так как система (12) является стационарной системой, то для неё условия $\tilde{P}$ -равномерной, равномерной, полной и дифференциальной наблюдаемости совпадают. Поэтому справедлива

Лемма 3. При любой матрице $\tilde{P} \in \mathcal{U}_{n_2-1}(T)$ t -семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ $\tilde{P}$ -равномерно наблюдаемо на T_μ тогда и только тогда, когда каждая система из этого семейства полностью наблюдаема.

Наблюдаемость t -семейства быстрых подсистем соответствует понятию “сильной наблюдаемости замороженного объекта” в терминологии статьи [29].

Определим $n_2 \times n_2$ -матрицу наблюдаемости семейства $(A_4, c_2)(t)$, $t \in T$:

$$\tilde{S}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{s}_0(t) \\ \tilde{s}_1(t) \\ \dots \\ \tilde{s}_{n_2-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где n_2 -вектор-строки $\tilde{s}_0(t)$, $\tilde{s}_1(t)$, $\dots$ определяются по формулам

$$\tilde{s}_j(t) = \tilde{s}_{j-1}(t)A_4(t), \quad \tilde{s}_0(t) = c_2(t). \quad (22)$$

Заметим, что $\tilde{S}(t_0)$ совпадает с матрицей наблюдаемости стационарной СПС (12).

Записывая для системы (12) условия из [8], убеждаемся, что справедлива

Теорема 5. При любой матрице $\tilde{P} \in \mathcal{U}_{n_2}(T)$ система пограничного слоя (12) $\tilde{P}$ -равномерно наблюдаема тогда и только тогда, когда $\text{rank } \tilde{S}(t_0) = n_2$, а t -семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ $\tilde{P}$ -равномерно наблюдаемо тогда и только тогда, когда $\text{rank } \tilde{S}(t) = n_2$ для любого $t \in T$.

7. Условия P -равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Пусть задана нижнетреугольная матрица $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, а матрица $\bar{P}$ есть её верхний левый блок размерности $n_1 \times n_1$.

Теорема 6. Пусть матричные функции $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, непрерывно дифференцируемы на отрезке T и $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -\alpha < 0$ для любого $t \in T$. Если $n \geq 2$, то считаем матричные функции $s_j^m(t)$, $j = \overline{0, n-2}$, $m = \overline{0, j}$, непрерывно дифференцируемыми на T . Если вырожденная система (A_s, c_s) $\bar{P}$ -равномерно наблюдаема на T и t -семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ полностью наблюдаемо на T , то найдётся такое $\hat{\mu} \in (0, \mu^0]$, что семейство $\{A^0, A^1, c\}_{\hat{\mu}}$ систем (2), (3) P -равномерно наблюдаемо на T .

Доказательство. Из условий теоремы 6 следует, что $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$. Из теоремы 3 вытекает, что существует невырожденное преобразование $K(t, \mu)$, которое преобразует систему (2), (3) в систему (14). Свойство P -равномерной наблюдаемости системы (2), (3) инвариантно относительно преобразования $K(t, \mu)$ [8, с. 66]. Поэтому система (2), (3) и система (14) одновременно являются P -равномерно наблюдаемыми или нет. Из теоремы 1 следует, что система (A_μ, c) имеет класс $\{P, n-1\}$ для любого $\mu > 0$. Так как [8, с. 44, следствие 2.1] для любого $m > 0$ множество систем класса $\{P, m\}$ инвариантно относительно преобразования $K(t, \mu)$, то система (14) также является системой класса $\{P, n-1\}$ при любом $\mu > 0$. Тогда для неё определена матрица наблюдаемости

$$S_{\xi\eta}(t, \mu) = \begin{pmatrix} h_0(t, \mu) \\ h_1(t, \mu) \\ \dots \\ h_{n-1}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

составленная из n -вектор-строк $h_j(t, \mu)$, $j = \overline{0, n-1}$, определённых по формулам

$$h_j(t, \mu) = p_{jj}(t)(h_{j-1}(t, \mu)A_{\xi\eta}(t, \mu) + \dot{h}_{j-1}(t, \mu)) + \sum_{i=0}^{j-1} p_{ji}(t)h_i(t, \mu), \quad h_0(t, \mu) = p_{00}(t)c_{\xi\eta}(t, \mu).$$

В силу диагонального вида матрицы $A_{\xi\eta}(t, \mu)$ матрица наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t, \mu)$ системы (14) имеет блочную структуру

$$S_{\xi\eta}(t, \mu) = (S_\xi(t, \mu) : S_\eta(t, \mu)), \quad (23)$$

где

$$S_\xi(t, \mu) = \begin{pmatrix} s_{\xi 0}(t, \mu) \\ s_{\xi 1}(t, \mu) \\ \dots \\ s_{\xi n-1}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad S_\eta(t, \mu) = \begin{pmatrix} s_{\eta 0}(t, \mu) \\ s_{\eta 1}(t, \mu) \\ \dots \\ s_{\eta n-1}(t, \mu) \end{pmatrix},$$

$$s_{\xi k}(t, \mu) = p_{kk}(t)(s_{\xi, k-1}(t, \mu)A_\xi(t, \mu) + \dot{s}_{\xi, k-1}(t, \mu)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_{\xi i}(t, \mu),$$

$$s_{\eta k}(t, \mu) = p_{kk}(t) \left(s_{\eta, k-1}(t, \mu) \frac{A_\eta(t, \mu)}{\mu} + \dot{s}_{\eta, k-1}(t, \mu) \right) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_{\eta i}(t, \mu), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$s_{\xi 0}(t, \mu) = p_{00}(t)c_\xi(t, \mu), \quad s_{\eta 0}(t, \mu) = p_{00}(t)c_\eta(t, \mu). \quad (24)$$

Докажем, что в условиях теоремы 6 для матрицы наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t, \mu)$ системы (14) справедливо представление

$$S_{\xi\eta}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \bar{s}_0(t) + O(\mu) & p_{00}(t)\tilde{s}_0(t) + O(\mu) \\ \bar{s}_1(t) + O(\mu) & \frac{1}{\mu}(p_{11}(t)p_{00}(t)\tilde{s}_1(t) + O(\mu)) \\ \dots & \dots \\ \bar{s}_{n-1}(t) + O(\mu) & \frac{1}{\mu^{n-1}} \left(\prod_{j=0}^{n-1} p_{n-1-j, n-1-j}(t)\tilde{s}_{n-1}(t) + O(\mu) \right) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $\bar{s}_j(t)$, $\tilde{s}_j(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, вычисляются по формулам (20), (22).

Отметим, во-первых, что согласно лемме 2 функции $\bar{s}_j(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, определены. Методом математической индукции докажем формулы

$$s_{\xi j}(t, \mu) = \sum_{m=0}^{j+1} \mu^m f_j^m(t, \mu), \quad s_{\eta j}(t, \mu) = \frac{1}{\mu^j} \left(\sum_{m=0}^{j+1} \mu^m g_j^m(t, \mu) \right), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (26)$$

где ограниченные на T функции $f_j^m(t, \mu)$, $g_j^m(t, \mu)$, $j = 0, 1, \dots$, определены рекуррентными соотношениями:

$$f_j^m(t, \mu) = p_{jj}(t)(f_{j-1}^m(t, \mu)A_s(t) + f_{j-1}^{m-1}(t, \mu)A_2(t)R_L(t, \mu) + \dot{f}_{j-1}^m(t, \mu)) + \sum_{i=m}^{j-1} p_{ji}(t)f_{i-1}^m(t, \mu), \quad (27)$$

$$f_0^0(t, \mu) = p_{00}(t)c_s(t), \quad f_0^1(t, \mu) = -p_{00}(t)c_2(t)R_L(t, \mu), \quad f_j^m(t, \mu) = 0, \quad m < 0 \text{ или } m > j+1,$$

$$g_j^m(t, \mu) = p_{jj}(t)(g_{j-1}^m(t, \mu)A_4(t) + g_{j-1}^{m-1}(t, \mu)L(t, \mu)A_2(t) + \dot{g}_{j-1}^m(t, \mu)) + \sum_{i=m}^{j-1} p_{ji}(t)g_{i-1}^m(t, \mu), \quad (28)$$

$$g_0^0(t, \mu) = p_{00}(t)c_2(t), \quad g_0^1(t, \mu) = p_{00}(t)(c_1(t)H(t, \mu) + c_2L(t, \mu)H(t, \mu)),$$

$$g_j^m(t, \mu) = 0, \quad m < 0 \text{ или } m > j+1.$$

Справедливость формул (26) для $j = 0$ следует из (24), (16), (27), (28). Пусть (26) верны для $j \leq k-1$. Поскольку $(A_{\xi\eta}(t, \mu), c_{\xi\eta}) \in \{P, n-1\}$ при любом $\mu > 0$, то $h_j(\cdot, \mu) \in C^1(T, \mathbb{R})$, $j = \overline{0, n-2}$, откуда в силу (23) следует $s_{\xi j}(\cdot, \mu) \in C^1(T, \mathbb{R})$, $s_{\eta j}(\cdot, \mu) \in C^1(T, \mathbb{R})$, $j = \overline{0, n-2}$, для любых $\mu > 0$. Тогда согласно лемме 1 имеем $f_j^m(\cdot, \mu) \in C^1(T, \mathbb{R})$, $j = \overline{0, k-1}$.

Докажем первую формулу из (26) для $j = k$. Действительно, из (24) имеем

$$\begin{aligned} s_{\xi k}(t, \mu) &= p_{kk}(t)(s_{\xi, k-1}(t, \mu)A_{\xi}(t, \mu) + \dot{s}_{\xi, k-1}(t, \mu)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_{\xi, i}(t, \mu) = \\ &= p_{kk}(t) \left(\sum_{m=0}^k \mu^m f_{k-1}^m(t, \mu)(A_s(t) + \mu A_2(t)R_L(t, \mu)) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{f}_{k-1}^m(t, \mu) \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t) \sum_{m=0}^i \mu^m f_{i-1}^m(t, \mu) = p_{kk}(t) \left(\sum_{m=0}^k \mu^m f_{k-1}^m(t, \mu)A_s(t) + \sum_{m=1}^{k+1} \mu^m f_{k-1}^{m-1}(t, \mu)A_2(t)R_L(t, \mu) + \right. \\ &\left. + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{f}_{k-1}^m(t, \mu) \right) + \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \sum_{i=m}^{k-1} p_{ki}(t)f_{i-1}^m(t, \mu) = \sum_{m=0}^k \mu^m f_k^m(t, \mu). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается вторая формула из (26). Пусть она верна для $j \leq k-1$. Докажем её для $j = k$. Действительно, из (24) имеем

$$\begin{aligned} s_{\eta k}(t, \mu) &= p_{kk}(t) \left(s_{\eta, k-1}(t, \mu) \frac{1}{\mu} A_{\eta}(t, \mu) + \dot{s}_{\eta, k-1}(t, \mu) \right) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_{\eta, i}(t, \mu) = \\ &= p_{kk}(t) \left(\frac{1}{\mu^k} \sum_{m=0}^k \mu^m g_{k-1}^m(t, \mu) \left(A_4(t) + \frac{1}{\mu^{k-1}} L(t, \mu) A_2(t) \right) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{g}_{k-1}^m(t, \mu) \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t) \sum_{m=0}^i \mu^m g_{i-1}^m(t, \mu) = p_{kk}(t) \left(\frac{1}{\mu^k} \left(\sum_{m=0}^k \mu^m g_{k-1}^m(t, \mu) A_4(t) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{m=1}^{k+1} \mu^m g_{k-1}^{m-1}(t, \mu) L(t, \mu) A_2(t) + \sum_{m=0}^k \mu^m g_{k-1}^m(t, \mu) \Big) \Big) + \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \sum_{i=m}^{k-1} p_{ki}(t) g_{i-1}^m(t, \mu) = \\ & = \frac{1}{\mu^k} \sum_{m=0}^k \mu^m g_k^m(t, \mu). \end{aligned}$$

Таким образом, формулы (26) доказаны. Из (26) с учётом (27), (28) для $j = \overline{0, n-1}$ легко получить соотношения

$$s_{\xi j}(t, \mu) = \bar{s}_j(t) + \mu \sum_{m=0}^j \mu^m f_j^{m+1}(t, \mu), \quad s_{\eta j}(t, \mu) = \frac{1}{\mu^j} \left(c_2(t) A_4^j(t) + \mu \sum_{m=0}^j \mu^m g_j^{m+1}(t, \mu) \right). \quad (29)$$

При выполнении условий теоремы 6 для любого $j = \overline{0, n-1}$ верно $h_j(\cdot, \mu) \in C(T, \mathbb{R}^n)$. Кроме того, из леммы 2 имеем $(A_s, c_s) \in \{P, n-1\}$, а значит, определены и ограничены на T векторные функции $\bar{s}_j(t)$, $j = \overline{0, n-1}$. Поэтому функции $s_{\xi j}(t) - \bar{s}_j(t)$, $\mu^j s_{\eta j}(t) - c_2(t) A_4^j(t)$ для $j = \overline{0, n-1}$ ограничены на T и из (29) следуют равенства

$$s_{\xi j}(t, \mu) = \bar{s}_j(t) + O(\mu), \quad s_{\eta j}(t, \mu) = \frac{1}{\mu^j} \left(\prod_{p=0}^j p_{j-p, j-p}(t) c_2(t) A_4^j(t) + O(\mu) \right),$$

т.е. формулы для матрицы (25) справедливы.

Умножим слева матрицу $S_{\xi\eta}(t, \mu)$ на невырожденную матрицу

$$M_P = \text{diag} \left\{ E_{n_1}, \mu^{n_1} \left(\prod_{i=0}^{n_1} p_{j-i, j-i}(t) \right)^{-1}, \dots, \mu^{n_1+n_2-1} \left(\prod_{i=0}^{n_1+n_2-1} p_{j-i, j-i}(t) \right)^{-1} \right\}.$$

В результате получим блочную матрицу вида

$$\bar{S}_{\xi\eta}(t, \mu) = \left(\begin{array}{c|c} \bar{S}_{\bar{P}}(t) + O(\mu) & * \\ \hline O(\mu)* & \tilde{S}(t) A_4^{n_1} + O(\mu)* \end{array} \right),$$

где $\bar{S}_{\bar{P}}(t)$, $\tilde{S}(t)$ определены в (19), (21), а $*$, $O(\mu)*$ – некоторые матрицы подходящих размерностей, при этом элементы матриц $O(\mu)*$ являются бесконечно малыми величинами порядка малости μ при любом $t \in T$. Ранг матрицы $\bar{S}_{\xi\eta}(t, \mu)$ равен рангу матрицы $S_{\xi\eta}(t, \mu)$ при всех $t \in T$.

Рассмотрим матрицу

$$S_{sf}(t) = \left(\begin{array}{c|c} \bar{S}_{\bar{P}}(t) & * \\ \hline 0 & \tilde{S}(t) \end{array} \right),$$

которая получается из матрицы $S_{\xi\eta}(t)$ умножением её справа на невырожденную матрицу $\text{diag} \{E_{n_1}, (A_4^{n_1})^{-1}\}$ и отбрасыванием членов $O(\mu)$. При выполнении условий теоремы 6 с учётом теоремы 4 верхний левый блок $\bar{S}_{\bar{P}}(t)$ полученной матрицы имеет полный ранг по столбцам для любого $t \in T$: $\text{rank } \bar{S}_{\bar{P}}(t) = n_1$. С учётом теоремы 5 нижний правый блок этой матрицы также имеет полный ранг по столбцам $\text{rank } \tilde{S}(t) = n_2$, $t \in T$. Поскольку оба диагональных блока $\bar{S}_{\bar{P}}(t)$ и $\tilde{S}(t)$ матрицы $S_{sf}(t)$ имеют полный ранг по столбцам, то матрица $S_{sf}(t)$ также имеет полный ранг по столбцам для любых $t \in T$. Действительно, если это не так, то существует $n_1 + n_2$ -вектор-столбец $(g_1^T, g_2^T)^T$, $g_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $g_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\|g_1\| + \|g_2\| \neq 0$: $S_{sf}(t)(g_1^T, g_2^T)^T = 0$, что равносильно $\bar{S}_{\bar{P}}(t)g_1 + *g_2 = 0$, $\tilde{S}(t)g_2 = 0$. Из последнего равенства в силу полноты ранга матрицы $\tilde{S}(t)$ следует $g_2 = 0$, тогда из первого равенства имеем

$\bar{S}_{\bar{P}}(t)g_1 = 0$, $g_1 \neq 0$, что противоречит полноте ранга $\bar{S}_{\bar{P}}(t)$. Таким образом, $\text{rank } S_{sf}(t) = n$ при всех $t \in T$.

С учётом сохранения полноты ранга при малых аддитивных возмущениях матрицы для достаточно малых $\mu > 0$ справедливо $\text{rank } \bar{S}_{\xi\eta}(t, \mu) = \text{rank } S_{\xi\eta}(t, \mu) = n$ для любого $t \in T$, откуда с учётом связи между матрицами наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t, \mu) = S_{A_{\mu}, c}(t, \mu)K(t, \mu)$ систем (2), (3) и (14) следует $\text{rank } S_{A_{\mu}, c}(t, \mu) = n$ для любого $t \in T$ для всех достаточно малых $\mu > 0$, что согласно теореме 2 завершает доказательство теоремы 6.

8. Пример. Рассмотрим на отрезке $T = [0, 2]$ систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \gamma(t)x_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \gamma(t)x_2(t) + (1 - \gamma(t))y(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_1(t) + \gamma(t)x_3(t) + y(t), \\ \mu \dot{y}(t) &= x_1(t) + x_2(t) - y(t) \end{aligned} \quad (30)$$

с выходной функцией $v(t) = -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + y(t)$.

Здесь вещественная функция $\gamma(t)$, $t \in T$, непрерывно дифференцируема, но её производная $\phi(t) = \dot{\gamma}(t)$ не является дифференцируемой на T , $1 - \gamma(t) \neq 0$, $t \in T$, $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n = n_1 + n_2 = 4$. Матрицы системы наблюдения (30) имеют вид

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 1 & 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3(t) = (1 \quad 1 \quad 0), \quad A_4(t) = (-1), \quad c(t) = (-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1).$$

Несложно убедиться в том, что для этой системы выполнены условия теоремы 6, но матричная функция

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 & 1 - \gamma(t) \\ 1 & 0 & \gamma(t) & 1 \\ \mu^{-1} & \mu^{-1} & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

не является дважды непрерывно дифференцируемой на T . Заметим, что система (30) имеет класс $\{P, 3\}$ относительно матрицы

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma(t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Вырожденная система для системы (30) записывается следующим образом:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \gamma(t)\bar{x}_1(t), \quad \dot{\bar{x}}_2(t) = (1 - \gamma(t))\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t), \quad \dot{\bar{x}}_3(t) = 2\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) + \gamma(t)\bar{x}_3(t),$$

$$\bar{v}_s(t) = \bar{x}_3(t), \quad t \in T,$$

$$A_s(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 1 - \gamma(t) & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad c_s = (0 \quad 0 \quad 1). \quad (31)$$

Она имеет класс $\{\bar{P}, 2\}$ относительно матрицы

$$\bar{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma(t) & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

с матрицей наблюдаемости

$$\bar{S}_{\bar{P}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 - \gamma(t) & 1 - \gamma(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для системы (30) t -семейство быстрых подсистем имеет вид

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{y}(\tau), \quad \tilde{v}_f(\tau) = \tilde{y}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (33)$$

Так как $\det \bar{S}_{\bar{P}}(t) = 1 - \gamma(t) \neq 0$, $t \in T$, то $\text{rank } \bar{S}_{\bar{P}}(t) = 3 = n_1$, $\text{rank } \tilde{S}(t) = 1 = n_2$, $t \in T$, и согласно теоремам 4, 5 ВС (31) и t -семейство быстрых подсистем (33) $\bar{P}$ - и $\tilde{P}$ -равномерно наблюдаемы соответственно. Так как выполнены условия теоремы 6, то существует $\hat{\mu} > 0$ такое, что ЛНСВС (30) P -равномерно наблюдаема для всех $\mu \in (0, \hat{\mu}]$ относительно любой матрицы $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, для которой матрица $\bar{P}$ (32) есть верхний левый блок размерности 3×3 и для неё выполнены условия теоремы 6.

Применение теоремы 3 к системе (30) даёт $\det S_P(t, \mu) = \mu^{-3}(-1 + \gamma(t)) \neq 0$, $t \in T$, что подтверждает вывод о равномерной наблюдаемости системы (30) для $\mu > 0$.

Заключение. Для ЛНСВС доказаны независимые от малого параметра необходимые и достаточные условия квазидифференцируемости множества выходных функций. На основе полной декомпозиции исходной ЛНСВС относительно действия группы линейных невырожденных преобразований доказаны ранговые независимые от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений достаточные условия P -равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Условия выражены через матрицы наблюдаемости связанных с ЛНСВС медленной и семейства быстрых подсистем, имеющих размерности меньшие, чем исходная ЛНСВС.

Используемый в данной работе подход, основанный на понятии P -равномерной наблюдаемости [8, с. 38] линейных нестационарных систем и декомпозиции СВС [14, 28], позволяет существенно ослабить известные требования на гладкость коэффициентов при построении наблюдателей состояний [15] и обеспечить их робастность по малому параметру.

Результаты настоящей работы применимы для нахождения преобразований, приводящих ЛНСВС к каноническим формам, решения задач наблюдаемости нестационарных СВС с помощью динамического фильтра, построения композитных управлений типа обратной связи, экспоненциальных оценщиков состояния системы.

Автор выражает благодарность проф. А.И. Астровскому за ценные советы и замечания, сделанные при подготовке этой работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ “Конвергенция-2025”, задание 1.2.04).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калман Р. Об общей теории систем управления // Тр. I конгресса ИФАК. Т. 2. М., 1961. С. 521–547.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., 1971.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
4. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999.
5. Астровский А.И. Наблюдаемость линейных нестационарных систем. Минск, 2007.
6. Астровский А.И., Гайшун И.В. Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 370–379.
7. Astrovskii A.I., Gaishun I.V. Observability of linear time-varying systems with quasiderivative coefficients // SIAM J. Control and Optimization. 2019. V. 57. № 3. P. 1710–1729.
8. Астровский А.И., Гайшун И.В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск, 2013.
9. Астровский А.И., Гайшун И.В. Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 11. С. 1567–1576.

10. Астровский А.И., Гайшун И.В. Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 3–13.
11. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 1999. Вып. 1. № 16. С. 3–105.
12. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77.
13. Калинин А.И. Асимптотические методы оптимизации возмущённых динамических систем. Минск, 2000.
14. Kokotović P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. New York, 1999.
15. O'Reilly J. Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems // Int. J. of Control. 1979. V. 30. № 5. P. 745–756.
16. Копейкина Т.Б. Наблюдаемость линейных стационарных сингулярно возмущённых систем в пространстве состояний // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. № 6. С. 22–32.
17. Копейкина Т.Б. Относительная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущённых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 24–30.
18. Копейкина Т.Б., Цехан О.Б. К теории наблюдаемости линейных сингулярно возмущённых систем // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 22–27.
19. Glizer V. Y. Observability of singularly perturbed linear time-dependent differential systems with small delay // J. of Dynamical and Control Systems. 2004. № 10. P. 329–363.
20. Цехан О.Б. Условия полной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущённых систем второго порядка с запаздыванием // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. 2014. № 1 (170). С. 53–64.
21. Цехан О.Б. Условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущённых систем с запаздыванием // Тр. Ин-та математики НАН Беларусі. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 138–148.
22. Tsekhan O., Pawluszewicz E. Observability of singularly perturbed linear time-varying systems on time scales // 26th Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). 2022. P. 116–121.
23. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
24. Гайшун, И.В., Горячкин В.В. Робастная и интервальная наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 2. С. 6–9.
25. Kopeikina T. B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems // Systems Sci. 1995. V. 21. № 1. P. 17–36.
26. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989.
27. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.
28. Chang K. Singular perturbations of a general boundary value problem // SIAM J. Math. Anal. 1972. V. 3. № 3. P. 520–526.
29. Зубер И.Е. Синтез экспоненциально устойчивого наблюдателя для линейных нестационарных систем с одним выходом // Автоматика и телемеханика. 1995. Вып. 5. С. 42–49.

Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы

Поступила в редакцию 29.04.2023 г.
После доработки 06.07.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.