
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

**КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
В КРИВОЛИНЕЙНОМ КВАДРАНТЕ
ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ
С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

© 2023 г. В. И. Корзюк, Я. В. Рудько

Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданного в криволинейном квадранте, рассматривается смешанная задача с условиями Коши на пространственной полуоси и условием Дирихле на нехарактеристической кривой. Решение задачи строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение интегральных уравнений. Исследуется разрешимость этих уравнений в зависимости от начальных данных и их гладкости. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение. В случае недостаточно гладких данных задачи строится слабое решение.

DOI: 10.31857/S037406412308006X, EDN: IOVDQE

Введение. Многие задачи математической физики решаются в областях с подвижными границами, например, течение со свободной поверхностью, течение жидкости в средах с ёмкостями в стенках, течение жидкости, связанное с аккрецией/эрозией, течение жидкости через деформируемые пористые среды, экструзия жидкостей, деформация и колебания пузырьков и капель, формование стекла, затвердевание, электроосаждение [1]. Эффекты движущихся границ часто вносят значительный вклад в изучаемые явления, и поэтому важно находить точные решения таких задач.

При решении этих задач появляется возможность сделать замену координат, чтобы выровнять область. Однако это приводит к изменению и усложнению вида уравнения и граничных условий. Также задача усложняется формой области, ведь многие функциональные методы, такие как преобразования Фурье или Лапласа и подобные, требуют определённого вида области и граничных условий. В случае же неограниченных областей ещё часто приходится добавлять условия роста на бесконечности, чтобы интегралы от искомых функций сходились. Несмотря на перечисленные выше недостатки, данные методы применяются для решения смешанных задач с движущимися границами (см., например, работы [2–11]). Но следует отметить, что в этих работах не указываются необходимые и достаточные условия существования и единственности решений, а либо приводятся достаточные условия, либо решения строятся формально, так как доказательство существования слабых решений в этих случаях весьма нетривиально [9].

Однако для решения таких задач можно применять классические методы, такие как метод характеристик и метод функции Римана, которые ранее были использованы для решения подобных задач [12, 13]. Как правило, такие методы приводят к эквивалентным интегральным уравнениям вместо дифференциальных.

В данной статье, используя метод характеристик, строится решение первой смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка с нелинейным потенциалом в неограниченном квадранте с подвижной границей. Для этого записываются эквивалентные интегральные уравнения и методом последовательных приближений доказывается существование и единственность их решения. Выводятся необходимые и достаточные условия, при которых существует классическое решение. В случае невыполнения однородных условий согласования рассматривается задача с условиями сопряжения на характеристике, а в случае недостаточно гладких функций строится слабое решение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения

$$\square u(t, x) - f(t, x, u(t, x)) = F(t, x) \quad (1)$$

в криволинейной области $Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, \infty), x \in (\gamma(t), \infty)\}$.

Область Q ограничена следующими кривыми: $t = 0$ – нижняя граница области, $x = \gamma(t)$ – боковая граница. Полагаем, что функция γ , определяющая боковую границу области Q , удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \gamma(0) = 0, \quad \gamma \in C^1([0, \infty)), \quad \gamma'(t) \in (-a, a), \quad t \in [0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) + at = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) - at = -\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

К уравнению (1) добавим начальные

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (3)$$

и граничное

$$u(t, \gamma(t)) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (4)$$

условия.

В (1)–(4) использованы следующие обозначения: $\square = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ – оператор Д’Аламбера ($a > 0$ для определённости); F – заданная на множестве $\overline{Q}$ функция; φ , ψ и μ – функции, заданные на полуоси $[0, \infty)$; f – функция, заданная на множестве $\overline{Q} \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k(t, x) \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$.

В работе [10] была изучена задача (1), (3) и (4) в случае безразмерного волнового уравнения ($a = 1$ и $f \equiv 0$) в классе затухающих кусочно-гладких функций. В [11] было формально построено кусочно-заданное решение задачи (1), (3) и (4) в случае уравнения Клейна–Гордона–Фока, а именно $a = 1$ и $f(t, x, u) = -u$.

В статье [14] изучалась первая смешанная задача для волнового уравнения в криволинейной полуполосе, откуда, в силу конечной скорости распространения, могут быть получены результаты о существовании и единственности классического решения задачи (1), (3) и (4) в случае $f \equiv 0$. В работе [12] также была изучена первая смешанная задача в криволинейной полуполосе для более общего линейного уравнения Клейна–Гордона–Фока с первыми производными и с переменными коэффициентами

$$u_{tt}(t, x) - a^2(t, x)u_{xx}(t, x) + a^{(1)}(t, x)u_t(t, x) + a^{(2)}(t, x)u_x(t, x) + a^{(0)}(t, x)u(t, x) = F(t, x),$$

где коэффициент $a(t, x)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Поэтому в [12], опять же в силу конечной скорости распространения, задача (1), (3) и (4) была изучена в линейном случае $f(t, x, u) = a^{(0)}(t, x)u$. Однако там предполагалась ортогональность кривых $t = 0$ и $x = \gamma(t)$ в их точке пересечения $(0, 0)$, т.е. налагалось дополнительное условие $\gamma'(0) = 0$. Мы же будем исследовать в настоящей работе задачу (1), (3) и (4) без этого предположения.

2. Криволинейный квадрант. Поскольку смешанная задача (1), (3) и (4) задаётся в области Q , отличающейся от стандартных, то представляется необходимым исследовать её свойства.

Заметим, что функция γ в силу ограниченности производной удовлетворяет условию Липшица с константой a . Из геометрических свойств липшицевых функций и условия $\gamma'(t) \in (-a, a)$, $t \in [0, \infty)$, из (2) заключаем, что для любого неотрицательного действительного числа t верно неравенство $-at < \gamma(t) < at$. Тогда для любой точки (t_0, x_0) области Q величина $x_0 + at_0$ принимает только положительные значения. Сформулируем два утверждения относительно разрешимости некоторых уравнений, содержащих функцию γ .

Утверждение 1. Пусть $\alpha \in [0, \infty)$. Тогда уравнение $\gamma(t) + at = \alpha$ имеет единственное решение при выполнении условий (2).

Доказательство. Введём функцию $\gamma_+(t) = \gamma(t) + at$. Очевидно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_+(t) = +\infty$ и $\gamma_+(0) = 0$. Значит, решение уравнения $\gamma(t) + at = \alpha$ существует на множестве $[0, \infty)$ и может быть найдено методом бинарного поиска. Оно единственно, поскольку функция γ_+ возрастающая, так как $\gamma'_+ = \gamma' + a > 0$.

Утверждение 2. Пусть $\alpha \in (-\infty, 0]$. Тогда уравнение $\gamma(t) - at = \alpha$ имеет единственное решение при выполнении условий (2).

Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Следствие. Пусть выбрана некоторая точка $(t_0, x_0) \in \{(t, x) : (t, x) \in Q, x - at \leq 0\}$. Тогда кривая $(t, \gamma(t))$ пересекает прямые $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$ в одной точке при выполнении условий (2).

Для доказательства следствия необходимо составить системы уравнений для определения координат точек пересечения кривой с характеристическими кривыми и воспользоваться утверждениями 1 и 2.

Рассмотрим функцию $\gamma_- : (\infty, 0] \ni t \mapsto \gamma(t) - at$. В дальнейшем нам понадобится обратная к данной функция, которую будем обозначать символом Φ , т.е. $\Phi(\gamma(t) - at) = t$. Такая функция существует согласно утверждению 2. Из теоремы об обратной функции устанавливаются формулы

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\gamma'(\Phi(t)) - a}, \quad \Phi''(t) = -\frac{\gamma''(\Phi(t))}{(\gamma'(\Phi(t)) - a)^3}, \quad t \in (\infty, 0]. \quad (5)$$

Подставив $t = 0$ в (5), находим значения

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = \frac{1}{\gamma'(0) - a}, \quad \Phi''(0) = -\frac{\gamma''(0)}{(\gamma'(0) - a)^3}. \quad (6)$$

Заметим, что из представлений (5) и условия (2) следует, что Φ – убывающая функция.

3. Интегральное уравнение. Разделим область Q характеристикой $x - at = 0$ на две подобласти $Q^{(j)} = \{(t, x) \in Q : (-1)^j(at - x) > 0\}$, $j = 1, 2$. Введём функции $u^{(j)}$, $j = 1, 2$, как решения задачи (1), (3) и (4) на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$. Обозначим

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

На множестве $\overline{Q^{(1)}}$, в силу начальных условий (3), справедливо равенство [15]

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, x) = & \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right. \\ & \left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \end{aligned} \quad (8)$$

или эквивалентное ему [16]

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, x) = & \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} [F(\tau, \xi) + f(\tau, \xi, u^{(1)}(\tau, \xi))] d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \end{aligned}$$

На множестве $\overline{Q^{(2)}}$ решение $u^{(2)}$ задачи (1), (3) и (4) найдём, используя тождество характеристического параллелограмма [17]. Пусть выбрана точка $P = (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}$. Построим характеристический параллелограмм $PP_\mu P_\phi P^{(1)}$ такой, что $P_\mu \in \{(t, x) : x = \gamma(t), t \in (0, \infty)\}$, $P_\phi \in \{(t, x) : x = at, t \in (0, \infty)\}$ и $P^{(1)} \in \{(t, x) : x = at, t \in (0, \infty)\}$.

Координаты точки $P_\mu(t_\mu, x_\mu)$ находятся как решение системы уравнений

$$x_\mu - at_\mu = x - at, \quad x_\mu = \gamma(t_\mu)$$

и имеют вид $t_\mu = \Phi(x - at)$, $x_\mu = \gamma(t_\mu)$.

Аналогично координаты точки $P_\phi(t_\phi, x_\phi)$ являются решением системы уравнений

$$x_\phi + at_\phi = x_\mu + at_\mu, \quad x_\phi = at_\phi$$

и имеют вид

$$t_\phi = \frac{\gamma(\Phi(x - at)) + a\Phi(x - at)}{2a}, \quad x_\phi = \frac{\gamma(\Phi(x - at)) + a\Phi(x - at)}{2}.$$

Заметим, что отрезок $P_\phi P_\mu$ принадлежит подмножеству $\overline{Q^{(2)}}$ в силу утверждения 1. Это значит, что весь параллелограмм $PP_\mu P_\phi P^{(1)}$ является подмножеством $\overline{Q^{(2)}}$.

Рассуждая таким же образом, координаты точки $P^{(1)}(t_1, x_1)$ находятся как решение системы уравнений

$$x_1 + at_1 = x + at, \quad x_1 = at_1$$

и имеют вид $t_1 = (x + at)/(2a)$ и $x_1 = (x + at)/2$.

Теперь, применив правило характеристического параллелограмма, получим

$$u(P) = u(P_\mu) + u(P^{(1)}) - u(P_\phi) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x-at} dy \int_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right. \\ \left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dz, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}.$$

Отсюда имеем

$$u^{(2)}(t, x) = \mu(\Phi(x - at)) + u^{(1)}\left(\frac{x + at}{2a}, \frac{x + at}{2}\right) - \\ - u^{(1)}\left(\frac{\gamma(\Phi(x - at)) + a\Phi(x - at)}{2a}, \frac{\gamma(\Phi(x - at)) + a\Phi(x - at)}{2}\right) - \\ - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x-at} dy \int_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right. \\ \left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dz, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0, \infty))$. Функция u принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению (1), условиям Коши (3) и условию Дирихле (4) тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнений (8) и (9) и выполняются условия согласования

$$\mu(0) - \varphi(0) = 0, \quad (10)$$

$$\mu'(0) - \gamma'(0)\varphi'(0) - \psi(0) = 0, \quad (11)$$

$$\mu''(0) - (a^2 + (\gamma'(0))^2)\varphi''(0) - f(0, 0, \varphi(0)) - F(0, 0) - 2\gamma'(0)\psi'(0) - \gamma''(0)\varphi'(0) = 0. \quad (12)$$

Доказательство. 1. Пусть функция $u \in C^2(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3), (4). Тогда, согласно статье [15], имеет место представление (8). Формула (9) выводится из

тождества характеристического параллелограмма [17]. Из начальных условий (3) и граничного условия (4) следуют величины $\partial_t^k \partial_x^p u(0, 0)$, где k, p – целые неотрицательные числа, $0 \leq k + p \leq 2$. Продифференцировав условие (4) по переменной t дважды, получим

$$\mu'(t) = u_t(t, \gamma(t)) + \gamma'(t)u_x(t, \gamma(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

$$\mu''(t) = u_{tt}(t, \gamma(t)) + 2\gamma'(t)u_{tx}(t, \gamma(t)) + (\gamma'(t))^2 u_{xx}(t, \gamma(t)) + \gamma''(t)u_x(t, \gamma(t)), \quad t \in [0, \infty). \quad (13)$$

Аналогично, дифференцируя условия Коши (3) по переменной x , будем иметь

$$u_x(0, x) = \varphi'(x), \quad u_{xx}(0, x) = \varphi''(x), \quad u_{tx}(0, x) = \psi'(x), \quad x \in [0, \infty). \quad (14)$$

Из выражений (3), (14) и уравнения (1) при $t = 0$ и $x = 0$ получим

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= \varphi(0), \quad u_t(0, 0) = \psi(0), \\ u_x(0, 0) &= \varphi'(0), \quad u_{xx}(0, 0) = \varphi''(0), \quad u_{tx}(0, 0) = \psi'(0), \\ u_{tt}(0, 0) &= a^2 u_{xx}(0, 0) + f(0, 0, u(0, 0)) + F(0, 0) = a^2 \varphi''(0) + f(0, 0, \varphi(0)) + F(0, 0). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (15) в представления (13) и краевое условие (4) при $t = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi(0), \quad \mu'(0) = \psi(0) + \gamma'(0)\varphi'(0), \\ \mu''(0) &= a^2 \varphi''(0) + f(0, 0, \varphi(0)) + F(0, 0) + 2\gamma'(0)\psi'(0) + (\gamma'(0))^2 \varphi''(0) + \gamma''(0)\varphi'(0). \end{aligned} \quad (16)$$

Формулы (16) представляют собой условия согласования (10)–(12).

2. Предположим, что имеют место представления функции u в виде (8) и (9) и выполнены условия (10)–(12). В силу условий гладкости $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$ и $\gamma \in C^2([0, \infty))$ заключаем, что $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2$. Подставив (8) и (9) в уравнение (1) и условия (3), (4), убеждаемся, что функция $u^{(j)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в $\overline{Q^{(j)}}$ и краевым условиям. Чтобы при этом функция u принадлежала классу $C^2(\overline{Q})$, необходимо и достаточно совпадений на характеристике $x = at$ значений функций $u^{(j)}$, их производных первого и второго порядков, т.е.

$$\partial_t^k \partial_x^p u^{(1)}(t, x)|_{x=at} = \partial_t^k \partial_x^p u^{(2)}(t, x)|_{x=at}, \quad (17)$$

где k, p – целые неотрицательные числа, $0 \leq k + p \leq 2$.

Найдём значения функции $u^{(2)}$ на характеристике $x - at = 0$. С учётом (6) имеем

$$\begin{aligned} u^{(2)}(t, x)|_{x=at} &= u^{(1)}(t, x)|_{x=at} - u^{(1)}\left(\frac{a\Phi(0) + \gamma(\Phi(0))}{2a}, \frac{a\Phi(0) + \gamma(\Phi(0))}{2}\right) + \mu(\Phi(0)) = \\ &= u^{(1)}(t, at) - u^{(1)}(0, 0) + \mu(\Phi(0)) = u^{(1)}(t, at) + \mu(0) - \varphi(0). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) и (10) следует (17) при $k = p = 0$.

Вычисляем производные первого и второго порядков функций $u^{(j)}$ в $\overline{Q^{(j)}}$, $j = 1, 2$. Затем на характеристике $x - at = 0$ рассмотрим с учётом (6) разность их предельных значений:

$$\begin{aligned} u_t^{(1)}(t, x)|_{x=at} - u_t^{(2)}(t, x)|_{x=at} &= \frac{1}{4a} \int_0^{2at} \left[f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - \right. \\ &\quad \left. - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(2)}\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) \right] dz + \frac{a(\gamma'(0)\varphi'(0) - \mu'(0) + \psi(0))}{a - \gamma'(0)} = \\ &= -a(u_x^{(1)}(t, x)|_{x=at} - u_x^{(2)}(t, x)|_{x=at}). \end{aligned}$$

Так как выполнены условия (11) и (17) при $k = p = 0$, то это влечёт за собой истинность (11) при $k + p = 1$.

Далее вычисляем в областях $\overline{Q^{(j)}}$, $j = 1, 2$, производные второго порядка по t функций $u^{(j)}$ и рассматриваем с учётом (6) их разность на характеристике $x - at = 0$:

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(1)}(t, x)|_{x=at} - u_{tt}^{(2)}(t, x)|_{x=at} = & \frac{1}{2} \left(\frac{f(0, 0, \varphi(0))(a^2 + \gamma'(0)^2)}{(a - \gamma'(0))^2} + (a - \gamma'(0))^{-3} \times \right. \\ & \times (2a^2(aF(0, 0) - F(0, 0)\gamma'(0) + \varphi''(0)(a - \gamma'(0))(a^2 + \gamma'(0)^2) + \\ & + a\gamma''(0)\varphi'(0) + 2a\gamma'(0)\psi'(0) - a\mu''(0) + \gamma''(0)(\psi(0) - \mu'(0)) + \gamma'(0)\mu''(0) - 2\gamma'(0)^2\psi'(0))) + \\ & + \frac{f(0, 0, \mu(0))(a + \gamma'(0))}{a - \gamma'(0)} + f(t, at, u^{(1)}(t, at)) - f(t, at, u^{(2)}(t, at)) \Big) + \\ & + \frac{1}{8a^2} \left(\int_0^{2at} \left[\left(u_t^{(1)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) - au_x^{(1)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \right) \partial_y f \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = u^{(1)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \right) - \right. \right. \\ & - af_x \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(1)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \right) + f_t \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(1)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \right) - aF_x \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) + F_t \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \Big] dz - \\ & - \int_0^{2at} \left[\left(u_t^{(2)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) - au_x^{(2)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \right) \partial_y f \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = u^{(2)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \right) - \\ & - af_x \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(2)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \right) + f_t \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(2)} \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \right) - aF_x \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) + F_t \left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2} \right) \Big] dz \Big). \quad (19) \end{aligned}$$

Аналогично вычисляем разности $u_{xx}^{(1)}(t, x)|_{x=at} - u_{xx}^{(2)}(t, x)|_{x=at}$ и $(u_{xt}^{(1)}(t, x) - u_{xt}^{(2)}(t, x))$. В результате получаем

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(1)}(t, x)|_{x=at} - u_{tt}^{(2)}(t, x)|_{x=at} = & f(t, x, u^{(1)}(t, x)) - f(t, x, u^{(2)}(t, x)) + a^2(u_{xx}^{(1)}(t, x) - u_{xx}^{(2)}(t, x)), \\ u_{tt}^{(1)}(t, x)|_{x=at} - u_{tt}^{(2)}(t, x)|_{x=at} = & \\ = \frac{1}{2} (f(t, x, u^{(1)}(t, x)) - f(t, x, u^{(2)}(t, x))) - a(u_{xt}^{(1)}(t, x) - u_{xt}^{(2)}(t, x)). \quad (20) \end{aligned}$$

Воспользовавшись (12) и ранее установленными условиями (17) при $k + p \leq 1$, получаем, что из равенств (19) и (20) следует условие (17) при $k + p \leq 2$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in C([0, \infty))$, $\psi \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty))$, $\mu \in C([0, \infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\gamma \in C^1([0, \infty))$, функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$. Тогда решения уравнений (8) и (9) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.

Доказательство теоремы проведём, следуя схеме, изложенной в работах [12, 15, 18–20]. Для определённости рассмотрим уравнение (8) для функции $u^{(1)}$, которое будем решать методом последовательных приближений. Обозначим

$$G(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z F \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) dy.$$

Возьмём начальное приближение $u^{(1,0)} = G$. Тогда каждое следующее приближение будет вычисляться по формуле

$$u^{(1,m)}(t, x) = G(t, x) +$$

$$+ \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1,m-1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \quad (21)$$

Найдём оценки для последовательных приближений. Пусть $\tilde{x} > 0$, множество

$$\mathcal{A} = \text{Conv} \{(0, 0), (0, \tilde{x}), (\tilde{x}/(2a), \tilde{x}/2)\} \subset \overline{Q^{(1)}},$$

$$M_G = \max_{(t,x) \in \mathcal{A}} |G(t, x)|, \quad K = \sup_{(t,x) \in \mathcal{A}} \left(\int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \left| k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \right|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & |u^{(1,1)}(t, x) - u^{(1,0)}(t, x)| \leq \mathcal{M} \equiv |u^{(1,1)} - u^{(1,0)}|_{C(\mathcal{A})}, \\ & |(u^{(1,2)} - u^{(1,1)})(t, x)| \leq \left| \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1,1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) - \right. \\ & \quad \left. - f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) dy \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{4a^2} \left| \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \left| u^{(1,1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) - u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \right| dy \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{4a^2} \left| \left(\int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \left| k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \right|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \mathcal{M}^2 dy \right)^{1/2} \right| \leq \frac{K\mathcal{M}t}{2\sqrt{2}a}, \quad (t, x) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Далее методом математической индукции, в качестве базы в которой здесь выбирается последнее неравенство, несложно доказывается, что имеет место оценка

$$|(u^{(1,i+1)} - u^{(1,i)})(t, x)| \leq \frac{K^i \mathcal{M} t^i}{2^i a^i \sqrt{(2i)!}}, \quad (t, x) \in \mathcal{A}. \quad (22)$$

Заметим, что $u^{(1,m)} = u^{(1,0)} + \sum_{j=0}^{m-1} (u^{(1,j+1)} - u^{(1,j)})$. Из оценки (22) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $u^{(1,\infty)} = u^{(1,0)} + \sum_{j=0}^{\infty} (u^{(1,j+1)} - u^{(1,j)})$ на множестве $\mathcal{A}$, поскольку его члены мажорируются по абсолютной величине членами равномерно сходящегося ряда

$$\mathcal{M} + M_G + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K^i \mathcal{M} t^i}{2^i a^i \sqrt{(2i)!}} \leq M \left(1 + \exp\left(\frac{Kt}{2a}\right) \right),$$

где $M = \mathcal{M} + M_G$. Таким образом, последовательные приближения непрерывных функций $u^{(1,m)}$ равномерно сходятся на множестве $\mathcal{A}$ к непрерывной в $\mathcal{A}$ функции $u^{(1)} : \mathbb{R}^2 \supset \overline{Q^{(1)}} \supset \mathcal{A} \ni (t, x) \rightarrow u^{(1)}(t, x) \in \mathbb{R}$, а в силу произвольности $\tilde{x}$ — к непрерывной в $\overline{Q^{(1)}}$ функции $u^{(1)} : \mathbb{R}^2 \supset \overline{Q^{(1)}} \ni (t, x) \rightarrow u^{(1)}(t, x) \in \mathbb{R}$. Переходя в равенстве (21) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем, что функция $u^{(1)}$ является решением уравнения (8) на множестве $\overline{Q^{(1)}}$.

Докажем единственность решения уравнения (8) от противного. Пусть уравнение (8) имеет два решения: $u^{(1)}$ и $\tilde{u}^{(1)}$. Обозначим $U = u^{(1)} - \tilde{u}^{(1)}$. Тогда

$$U(t, x) = \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) dy -$$

$$-\frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, \tilde{u}^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \quad (23)$$

Функция U является непрерывной, значит $|U(t, x)| \leq M_U$ при условии $(t, x) \in \mathcal{A}$, где M_U – некоторая константа. Из равенства (23) с учётом условия типа Липшица–Каратеодори и неравенства Коши–Буняковского–Шварца следует, что

$$|U(t, x)| \leq \frac{1}{4a^2} \left(K^2 \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z M_U^2 dy \right)^{1/2} \leq \frac{KM_U t}{2\sqrt{2}a}, \quad (t, x) \in \mathcal{A}.$$

Применяя метод математической индукции, придём к следующей оценке:

$$|U(t, x)| \leq \frac{K^i M_U t^i}{2^i a^i \sqrt{(2i)!}}$$

для любого положительного целого числа i и любой пары (t, x) из $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что $U \equiv 0$ на множестве $\mathcal{A}$, а в силу произвольности $\tilde{x}$ – что $U \equiv 0$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}$. Таким образом, доказано существование единственного непрерывного решения уравнения (8).

Чтобы доказать непрерывную зависимость решения от начальных данных, рассмотрим, наряду с уравнением (8), возмущённое уравнение

$$(u^{(1)} + \Delta u)(t, x) = (G + \Delta G)(t, x) - \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, (u^{(1)} + \Delta u)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (24)$$

и разность возмущённого (24) и невозмущённого (8) уравнений

$$\begin{aligned} \Delta u(t, x) = \Delta G(t, x) - \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \left[f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, (u^{(1)} + \Delta u)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) - \right. \\ \left. - f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для уравнения (25) относительно возмущения Δu справедлива следующая оценка модуля возмущения:

$$|\Delta u(t, x)| \leq M_{\Delta G} + \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \left| \Delta u\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \right| dy,$$

где $M_{\Delta G} = \max_{(t,x) \in \mathcal{A}} |\Delta G(t, x)|$. Применяя многомерную лемму Гронуолла [21, гл. 13] к предыдущему неравенству, получаем $|\Delta u(t, x)| \leq C^{(1)} M_{\Delta G}$, где $C^{(1)}$ – некоторая положительная константа, зависящая только от множества $\mathcal{A}$, функции k и числа a . Из полученного неравенства вытекает, что какое бы малое возмущение ΔG , $M_{\Delta G} = \varepsilon$, мы не взяли, для возмущения решения выполняется неравенство $|\Delta u(t, x)| = \delta \leq \varepsilon C^{(1)}$ на множестве $\mathcal{A}$. В силу произвольности $\tilde{x}$ получаем, что решение $u^{(1)}$ уравнения (8) непрерывно зависит от исходных данных.

Существование единственного непрерывного и непрерывно зависящего от начальных данных решения уравнения (9) для функции $u^{(2)}$ доказывается аналогично – для оценки приближений в этом случае можно применить неравенство

$$\int_0^{x-at} dy \int_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} |\Theta(y, z)| dz \leq \int_0^{x-at} dy \int_0^{x+at} |\Theta(y, z)| dz,$$

где функцию Θ можно считать дополненной нулём или продолженной по непрерывности вне множества $\overline{Q}^{(2)}$. Теорема доказана.

4. Классическое решение. Фактически теоремы 1 и 2 гарантируют существование и единственность классического решения задачи (1), (3) и (4).

Теорема 3. Пусть выполняются условия $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$. Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение u , определённое формулами (7)–(9), из класса $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (10)–(12).

Доказательство следует из теорем 1 и 2.

5. Неоднородные условия согласования. Подобно тому как это было сделано в работах [15, 22–26], рассмотрим теперь задачу (1), (3) и (4) в случае, когда условия согласования (10)–(12) частично или полностью не выполняются.

Согласно теореме 1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функции u или её производных, или всё вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 3. Если для заданных функций μ , φ , ψ , γ , f , F не выполняются однородные условия согласования (10)–(12), то какими бы гладкими не были функции f , F , μ , φ и ψ , задача (1), (3) и (4) не имеет классического решения, определённого на $\overline{Q}$.

Доказательство следует из теоремы 1.

Пусть заданные функции уравнения (1) и условий (3), (4) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 3: $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0, \infty))$. Так как условия согласования (10)–(12), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывные производные функции u :

$$\begin{aligned} & [(u)^+ - (u)^-](t, x)|_{x=at} = \varphi(0) - \mu(0), \\ & [(u_t)^+ - (u_t)^-](t, x)|_{x=at} = \frac{1}{4a} \int_0^{2at} \left(f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) \right) dz + \\ & \quad + \frac{a(\gamma'(0)\varphi'(0) - \mu'(0) + \psi(0))}{a - \gamma'(0)} = -a[(u_x)^+ - (u_x)^-](t, x)|_{x=at}, \\ & [(u_{tt})^+ - (u_{tt})^-](t, x)|_{x=at} = \frac{1}{2} \left(\frac{f(0, 0, \varphi(0))(a^2 + \gamma'(0)^2)}{(a - \gamma'(0))^2} + (a - \gamma'(0))^{-3} \times \right. \\ & \quad \times (2a^2(aF(0, 0) - F(0, 0)\gamma'(0) + \varphi''(0)(a - \gamma'(0))(a^2 + \gamma'(0)^2) + \\ & \quad + a\gamma''(0)\varphi'(0) + 2a\gamma'(0)\psi'(0) - a\mu''(0) + \gamma''(0)(\psi(0) - \mu'(0)) + \gamma'(0)\mu''(0) - 2\gamma'(0)^2\psi'(0))) + \\ & \quad + \frac{f(0, 0, \mu(0))(a + \gamma'(0))}{a - \gamma'(0)} + f(t, at, (u)^+(t, at)) - f(t, at, (u)^-(t, at)) \Big) + \\ & \quad + \frac{1}{8a^2} \left(\int_0^{2at} \left[\left((u_t)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(u_x)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) \partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -af_x\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + f_t\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - aF_x\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) + F_t\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \Big] dz - \\
 & - \int_0^{2at} \left[\left((u_t)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(u_x)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) \partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - \right. \\
 & \left. - af_x\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + f_t\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - aF_x\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) + F_t\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right] dz = \\
 & = f(t, x, (u)^+(t, x)) - f(t, x, (u)^-(t, x)) + a^2[(u_{xx})^+ - (u_{xx})^-] = \\
 & = \frac{1}{2}(f(t, x, (u)^+(t, x)) - f(t, x, (u)^-(t, x))) - a[(u_{tx})^+ - (u_{tx})^-]. \tag{26}
 \end{aligned}$$

Здесь было использовано обозначение $(\cdot)^\pm$ – предельные значения функции u и её частных производных с разных сторон на характеристике $x - at = 0$, т.е.

$$(\partial_t^p u)^\pm(t, x)|_{x=at} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta).$$

Обозначим $\tilde{Q} = \overline{Q} \setminus \{(t, x) : x - at = 0\}$. Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть выполняются условия $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$. Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение u , определённое формулами (7)–(9), из класса $C^2(\tilde{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (26).

Доказательство теоремы следует из предыдущих рассуждений.

Теорема 5. Пусть выполняются условия $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$. Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение u , определённое формулами (7)–(9), из класса $C^2(\tilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (26) и (10).

Доказательство следует из теорем 1–3 и рассуждений выше. Действительно, если $\varphi(0) = \mu(0)$, то решение u на множестве $\{(t, x) : x - at = 0\}$ является непрерывным в силу (26). Следовательно, кроме того, что решение $u \in C^2(\tilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании $\overline{Q}$, $u \in C(\overline{Q})$.

Теорема 6. Пусть выполняются условия $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$. Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение u , определённое формулами (7)–(9), из класса $C^2(\tilde{Q}) \cap C^1(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (26), (10) и (11).

Доказательство легко следует из теорем 1–5 и формул (26), так как в этом случае u является непрерывной на $\{(t, x) : x - at = 0\}$, но в силу (26), (10) и (11) имеет непрерывные производные первого порядка.

Замечание 1. Если заданные функции задачи (1), (3) и (4) не удовлетворяют однородным условиям согласования (10)–(12), то решение задачи (1), (3) и (4) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристике $x - at = 0$.

В качестве условий сопряжения могут быть выбраны условия (26). Теперь задачу (1), (3) и (4) можно сформулировать, используя условия сопряжения (26) следующим образом.

Задача (1), (3) и (4) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (3), граничному условию (4), условиям сопряжения (26).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для её численной реализации.

6. Слабое решение. Рассмотрим теперь задачу (1), (3) и (4) в случае, когда функции μ , φ , ψ , γ , f , F не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. Функцию u , представимую в виде (7)–(9), назовём слабым решением задачи (1), (3) и (4).

Определение 1 вводит понятие слабого решения. Однако в литературе такие решения называют также решениями в широком смысле [27, с. 56; 28], обобщёнными решениями [29], слабыми слабыми (“weak”) решениями [30, с. 19; 31, с. 69, 185, 189], слабыми (“mild”) решениями [32–34].

Наша мотивация введения слабого решения именно таким образом состоит в том, что представление (7)–(9) корректно определено, даже если функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ не дифференцируемы, что побуждает обобщить классическое решение с помощью “слабого” решения, которое должно быть только непрерывным. Это примерно та же самая мотивация, которая побуждает искать решения в различных пространствах Соболева [35–38] или в смысле обобщённых функций [39]. Более того, во многих случаях линейных абстрактных задач Коши понятия слабого (“mild”) и слабого слабого (“weak”) (в двойственном смысле, смысле распределений) решений эквивалентны*).

Замечание 2. Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также слабым решением этой задачи.

Также очевидно, что если выполнены дополнительные условия гладкости $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$ и условия согласования (10)–(12), то слабое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим.

Справедлива следующая

Теорема 7. Пусть выполняются условия $\varphi \in C([0, \infty))$, $\psi \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty))$, $\mu \in C([0, \infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\gamma \in C^1([0, \infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$. Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное слабое решение u из класса $C(\tilde{Q})$.

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (8), (9) и принадлежность их решений классу непрерывных функций следует из теоремы 1.

Для слабого решения условия сопряжения (26), вообще говоря, не выполняются. Можно гарантировать только выполнение условия $[(u)^+ - (u)^-](t, x)|_{x=at} = \varphi(0) - \mu(0)$ на характеристике $x - at = 0$, исходя из представлений (8), (9).

Также мы можем сопоставить слабое решение в смысле определения 1 с другими определениями обобщённого решения. Так, например, следуя А.Н. Тихонову и А.А. Самарскому [40, с. 81], можно ввести следующее

Определение 2. Пусть функции φ и μ кусочно-гладкие, функции ψ и F – кусочно-непрерывные и f – непрерывная. Тогда назовём обобщённым решением задачи (1), (3) и (4) функцию u , кусочно-гладкую на множестве $\overline{Q}$, удовлетворяющую начальным условиям (3), граничному условию (4) и уравнению

$$\oint_{\partial C} a^2 u_x(t, x) dt + u_t(t, x) dx + \int_C [F(t, x) + f(t, x, u(t, x))] dt dx = 0 \quad (27)$$

для любой области $C \subset \overline{Q}$ со стандартно ориентированным кусочно-гладким краем ∂C .

Утверждение 4. Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также обобщённым решением этой задачи.

*) <https://mathoverflow.net/questions/320300/what-mild-solution-means-and-how-to-find-it>.

Для доказательства утверждения необходимо проинтегрировать уравнение (1) по области $C \subset \overline{Q}$ и применить теорему Грина.

Утверждение 5. Любое дважды непрерывно дифференцируемое обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим решением этой задачи.

Доказательство. Рассмотрим множество $C = [t_1, t_2] \times [x_1, x_2] \subset \overline{Q}$, применим теорему Грина к равенству (27) и получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [u_{tt}(t, x) - a^2 u_{xx}(t, x) - f(t, x, u(t, x)) - F(t, x)] dt dx = 0. \quad (28)$$

Воспользовавшись теоремой о среднем для интеграла в (28), будем иметь

$$[u_{tt}(t, x) - a^2 u_{xx}(t, x) - f(t, x, u(t, x)) - F(t, x)] \Delta t \Delta x = 0, \quad (29)$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ и (t, x) – некоторая точка, принадлежащая множеству C . Разделив обе части (29) на $\Delta t \Delta x$, перейдём к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$ и получим дифференциальное уравнение (1), что заканчивает доказательство.

Повторяя рассуждения, изложенные в [40, с. 81–83], приходим к тому, что обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) также представляется в виде (7)–(9), т.е. является слабым. Отсюда сразу вытекает единственность обобщённого решения. С помощью непосредственной подстановки нетрудно убедиться в том, что функция типа (7)–(9), где φ – кусочно-гладкая, ψ , μ и F – кусочно-непрерывные, f – непрерывная, удовлетворяет уравнению (27), начальным условиям (3) и граничному условию (4). Это доказывает теорему существования. Таким образом, показана в некотором виде эквивалентность слабого и обобщённого решений задачи (1), (3) и (4). Но следует отметить, что обобщённое решение требует большую гладкость данных.

Следуя С.С. Харибегашвили и О.М. Джохадзе [41], также рассмотрим следующее обобщение классического решения.

Определение 3. Пусть функции $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$ удовлетворяют условиям согласования (10) и (11). Тогда назовём *сильным обобщённым решением* задачи (1), (3) и (4) функцию u , если $u \in C(\overline{Q})$ и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{Q})$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\square u(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot)) - F(\cdot), 0)_{C(\overline{Q})} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u)_{C(\overline{Q})} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n(\cdot, \gamma(\cdot)), \mu)_{C([0, \infty))} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n(0, \cdot), \varphi)_{C^1([0, \infty))} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(0, \cdot), \psi\right)_{C([0, \infty))} = 0,$$

где $\rho(x_1, x_2)_X$ – расстояние между элементами $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ в метрическом пространстве X .

Аналогично статье [41] могут быть установлены следующие замечания.

Замечание 3. Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также сильным обобщённым решением этой задачи.

Замечание 4. Если выполнены дополнительные условия гладкости $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$ и условие согласования второго порядка (12), то сильное обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим.

Утверждение 6. Пусть выполняются условия гладкости $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$ и условия согласования (10) и (11). Тогда функция u является сильным обобщённым решением задачи (1), (3) и (4) тогда и только тогда, когда функция u является слабым решением задачи (1), (3) и (4).

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 из работы [41].

Теорема 8. Пусть выполняются условия гладкости $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$, условия согласования (10), (11) и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$. Тогда первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное непрерывно дифференцируемое сильное обобщённое решение u , представимое в виде (7)–(9).

Доказательство. Согласно утверждению 6 имеют место представления (7)–(9) сильного обобщённого решения u . Непрерывные функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ однозначно определяются в силу теоремы 2, а из условий гладкости, указанных в данной теореме, следует, что $u^{(1)} \in C^1(\overline{Q^{(1)}})$ и $u^{(2)} \in C^1(\overline{Q^{(2)}})$. Из первых двух равенств (26) и условий согласования (10) и (11) заключаем, что $u \in C^1(\overline{Q})$. Теорема доказана.

Заключение. В статье были сформулированы достаточные условия, при выполнении которых существует единственное классическое решение первой смешанной задачи в криволинейном квадранте для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всём криволинейном квадранте. В случае невыполнения данных условий рассмотрена задача с условиями сопряжения на характеристике. В случае недостаточной гладкости исходных данных построены слабое, обобщённое и сильное обобщённое решения начальной задачи и доказана их единственность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ben Q.Li. Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer. London, 2006.
2. Литвинов В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближённого метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 188–199.
3. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Журн. Средне-Волжского мат. о-ва. 2020. Т. 22. № 2. С. 188–199.
4. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2012. Вып. 3. С. 145–151.
5. Litvinov V.L. Solution of model boundary value problems on oscillations of mechanical systems with moving boundaries by the Duhamel method // J. of Physics: Conf. Ser. 2019. V. 1392. Art. 012015.
6. Tao L.N. A method for solving moving boundary problems // SIAM J. on Appl. Math. 1986. V. 46. № 2. P. 254–264.
7. Davis G.B., Hill J.M. A moving boundary problem for the sphere // IMA J. of Appl. Math. 1982. V. 29. № 1. P. 99–111.
8. Rodrigo M.R., Thamwattana N. A unified analytical approach to fixed and moving boundary problems for the heat equation // Mathematics. 2021. V. 9. № 7. Art. 749.
9. Čanić S. Moving boundary problems // Bull. Amer. Math. Soc. 2021. V. 58. P. 79–106.
10. Pelloni B., Pinotsis D.A. Moving boundary value problems for the wave equation // J. of Comput. and Appl. Math. 2010. V. 234. № 6. P. 1685–1691.
11. Pelloni B., Pinotsis D.A. The Klein–Gordon equation in a domain with time-dependent boundary // Studies in Appl. Math. 2008. V. 121. № 3. P. 291–312.
12. Корзюк В.И., Столярчук И.И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.
13. Остапенко В.А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в области с подвижной границей // Вестн. Днепропетровского ун-та. Сер. Моделирование. 2011. Вып. 3. № 8. С. 30–54.
14. Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н. Классическое решение в криволинейной полуполосе первой смешанной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 99–109.

15. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 174–184.
16. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.
17. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of second-order // arXiv:2204.09408.
18. Корзюк В.И. Уравнения математической физики. М., 2021.
19. Корзюк В.И., Ковнацкая О.А., Севастюк В.А. Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2022. Т. 66. № 4. С. 391–396.
20. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1982.
21. Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Fink A.M. Inequalities Involving Functions and their Integrals and Derivatives. Dordrecht, 1991.
22. Корзюк В.И., Столярчук И.И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 1. С. 7–13.
23. Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7–21.
24. Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Сериков В.П. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. № 3. С. 287–297.
25. Корзюк В.И., Козловская И.С. Классические решения задач для гиперболических уравнений. Ч. 2. Минск, 2017.
26. Моисеев Е.И., Корзюк В.И., Козловская И.С. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1373–1385.
27. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1978.
28. Friedrichs K.O. Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables // Amer. J. of Math. 1948. V. 70. № 3. P. 555–589.
29. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22. № 3. С. 322–331.
30. Evans L.C. Partial Differential Equations. Providence, 2010.
31. DiBenedetto E. Partial Differential Equations. Boston, 2010.
32. Ikeda M., Inui T., Wakasugi Y. The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data // Nonlin. Differ. Equat. Appl. 2017. V. 50. № 2. Art. № 10.
33. Iwamiya T. Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces // Hiroshima Math. J. 1986. V. 50. P. 499–530.
34. Byszewski L. Existence and uniqueness of a classical solution to a functional-differential abstract nonlocal Cauchy problem // J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. 1999. V. 12. № 1. P. 91–97.
35. Демиденко Г.В., Кудрявцев А.А. Краевые задачи в четверти плоскости для уравнения Рэлея–Бишоп // Мат. заметки Северо-Вост. федерал. ун-та. 2021. Т. 28. № 3. С. 5–18.
36. Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В., Пинтус Г.М. Задача Коши для одной псевдогиперболической системы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 626–638.
37. Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В. Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения в четверти плоскости // Мат. тр. 2020. Т. 24. № 2. С. 3–23.
38. Ильин В.А., Моисеев Е.И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 656–661.
39. Егоров Ю.В. К теории обобщённых функций // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. № 5. С. 3–40.
40. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1999.
41. Харибегашвили С.С., Джозададзе О.М. О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения // Мат. сб. 2014. Т. 205. № 4. С. 121–148.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 04.01.2023 г.
После доработки 26.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.