

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223+517.575

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

© 2023 г. В. В. Карачик

Определяется элементарное решение полигармонического уравнения, с помощью которого приводится явное представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре при всех размерностях пространства, за исключением некоторого конечного множества. На основе полученной функции Грина строится решение однородной задачи Дирихле в единичном шаре. В качестве примера найден явный вид решения однородной задачи Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения при простейшей полиномиальной правой части.

DOI: 10.31857/S0374064123080058, EDN: IOCEKI

Введение. Явный вид функций Грина для разных краевых задач представлен во многих работах. Приведём только некоторые из них. Например, в двумерном случае в [1] на основании известной гармонической функции Грина представлены функции Грина различных бигармонических задач. Явный вид функции Грина для 3-й краевой задачи был найден в работах [2–4], а функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений – в работах [5, 6]. Статьи [7–9] посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, а в работе [10] находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения. В [11–13] приведён явный вид функций Грина для бигармонического и 3-гармонического уравнений в единичном шаре. В связи с бигармоническим уравнением отметим работы [14, 15], посвящённые условиям разрешимости некоторых нестандартных задач в шаре для бигармонического уравнения. В качестве наиболее общих результатов по обобщённой задаче Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях, отметим статью [16].

В работе [17] на основании интегрального представления функций $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ даются интегральные представления решений задач Навье [18] и Рикье–Неймана [19] для бигармонического уравнения в единичном шаре, а также строятся функции Грина этих задач. В статьях [20, 21] эти результаты используются для полигармонического уравнения. Функция Грина применяется также и для исследования нелокальных уравнений. Например, в работе [22] исследована разрешимость четырёх краевых задач для одного нелокального бигармонического уравнения с инволюцией. Отметим также работы [23–26], где построены функции Грина различных краевых задач. Применение функций Грина в задачах механики и физики можно найти в работах [27, 28].

Хорошо известно (см., например, [29, с. 50]), что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ при $n \geq 2$ имеет вид

$$G_2(x, \xi) = E(x, \xi) - E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right), \quad (1)$$

где

$$E(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}|x-\xi|^{2-n}, & n > 2, \\ -\ln|x-\xi|, & n = 2, \end{cases} \quad (2)$$

– элементарное решение уравнения Лапласа. По аналогии с этим в работе [11] было определено элементарное решение

$$E_4(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)(n-4)} |x - \xi|^{4-n}, & n > 4, \quad n = 3, \\ -\frac{1}{4} \ln |x - \xi|, & n = 4, \\ \frac{|x - \xi|^2}{4} (\ln |x - \xi| - 1), & n = 2, \end{cases} \quad (3)$$

бигармонического уравнения и доказано, что при $n \geq 3$ функция вида

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) \quad (4)$$

является функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре S . Далее, в статье [13] была введена функция

$$E_6(x, \xi) = \begin{cases} \frac{|x - \xi|^{6-n}}{2 \cdot 4(n-2)(n-4)(n-6)}, & n \geq 3, \quad n \neq 4, 6, \\ -\frac{1}{64} \ln |x - \xi|, & n = 6, \\ \frac{|x - \xi|^2}{32} \left(\ln |x - \xi| - \frac{3}{4} \right), & n = 4, \\ -\frac{|x - \xi|^4}{64} \left(\ln |x - \xi| - \frac{3}{2} \right), & n = 2, \end{cases} \quad (5)$$

которая, по аналогии с функциями $E(x, \xi)$ из (2) и $E_4(x, \xi)$ из (3), названа *элементарным решением* 3-гармонического уравнения. При $\xi \neq x$ справедливо равенство $\Delta_\xi E_6(x, \xi) = -E_4(x, \xi)$. Функция Грина в этом случае при $n \geq 3$ и $n \neq 4$ представлена в виде

$$G_6(x, \xi) = E_6(x, \xi) - E_6\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - \frac{1}{2} \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - \\ - \frac{1}{4} \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \frac{(|\xi|^2 - 1)^2}{4} E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right).$$

В настоящей работе исследуется представление решений однородной задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad (6)$$

$$u|_{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\partial S} = 0. \quad (7)$$

В статье [7] показано, что функция Грина $G_{2m}(x, \xi)$ этой задачи имеет вид (формула Боджо)

$$G_{2m}(x, \xi) = k_m |x - \xi|^{2m-n} \int_1^{g(x, \xi)} (t^2 - 1)^{m-1} t^{1-n} dt,$$

где

$$g(x, \xi) = \frac{1}{|x - \xi|} \left| \frac{x}{|x|} - |x|\xi \right|, \quad k_m = \frac{1}{\omega_n ((2m-2)!)^2},$$

а в [30] построена функция $G_{2m}(x, \xi)$ в случае $n = 2$. В работе [9] находится явное представление функции $G_{2m}(x, \xi)$ в зависимости от чётности n и положительности величины $2m - n$.

1. Элементарное решение. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N} + 1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \dots, 2m\}$. Поскольку множество $\mathbb{N}_m^c$ конечное, то $\mathbb{N}_m$ бесконечное. Очевидно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. Определим элементарное решение m -гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ в виде

$$E_{2m}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n)_m (2, 2)_{m-1}}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n)_m^* (2, 2)_{m-1}} \left(\ln |x - \xi| - \sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n/2}^{m-1} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c, \end{cases} \quad (8)$$

где $(a, b)_k = a(a+b) \cdots (a+kb-b)$ – обобщённый символ Похгаммера с соглашением $(a, b)_0 = 1$, а символ $(a, b)_k^*$ означает, что если среди сомножителей $a, (a+b), \dots, (a+kb-b)$, входящих в $(a, b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2, 2)_3^* = (-2) \cdot 1 \cdot 2 = -4$. Кроме того, если в суммах, входящих в (8), верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю.

Замечание 1. В работе [21] установлено, что функция $E_{2m}(x, \xi)$ совпадает с элементарными функциями из (2), (3) и (5) при $m = 1$, $m = 2$ и $m = 3$ соответственно.

Замечание 2. Элементарная функция $E_{2m}(x, \xi)$ незначительно отличается от фундаментального решения полигармонического уравнения $G_{m,n}(x)$, рассматриваемого С.Л. Соболевым [31, с. 521]. При $n \in \mathbb{N}_m$ отличие в множителе $(-1)^m$, а при $n \in \mathbb{N}_m^c$ различие более заметно. Это связано со следующим ниже свойством функции $E_{2m}(x, \xi)$, которого у функций $G_{m,n}(x)$ при $n \in \mathbb{N}_m^c$ нет.

Введём обозначения

$$E_{2m}^*(x, \xi) = E_{2m} \left(\frac{x}{|x|} - |x|\xi \right), \quad h(x, \xi) = |x - \xi|^2, \quad h_*(x, \xi) = \left| \frac{x}{|x|} - |x|\xi \right|^2. \quad (9)$$

Очевидно, что $h(x, \xi)$ и $h_*(x, \xi)$ – многочлены второго порядка. Относительно функций $E_{2m}(x, \xi)$ и $E_{2m}^*(x, \xi)$ необходимы некоторые утверждения.

Лемма 1. 1. Симметричная функция $E_{2m}(x, \xi)$, определённая при $x \neq \xi$, удовлетворяет равенствам

$$\Delta_x E_{2m}(x, \xi) = -E_{2(m-1)}(x, \xi), \quad \Delta_x E_2(x, \xi) = 0.$$

2. Симметричная функция $E_{2m}^*(x, \xi)$ при $x \in S$ и $\xi \in \bar{S}$ удовлетворяет равенствам

$$\Delta_x E_{2m}^*(x, \xi) = -|\xi|^2 E_{2m-2}^*(x, \xi), \quad \Delta_x E_2^*(x, \xi) = 0,$$

а значит, является m -гармонической по $x \in S$ при $\xi \in \bar{S}$.

Доказательство. Первая часть утверждения леммы доказана в [20, лемма 2.1]. Для доказательства второй части заметим, что $|x/|x| - |x|\xi| \geq |x/|x|| - |x||\xi| = 1 - |x||\xi| \geq 1 - |x| > 0$ при $x \in S$, $\xi \in \bar{S}$, и значит, функция $E_{2m}^*(x, \xi)$ определена и дифференцируема при заданных значениях x и ξ . Симметричность $E_{2m}^*(x, \xi)$ следует из равенства $|x/|x| - |x|\xi|^2 = 1 - 2x\xi + |x|^2|\xi|^2 = |\xi/|\xi| - |\xi|x|^2$. Далее нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f \left(-x|\xi| + \frac{\xi}{|\xi|} \right) = -|\xi| f_i \left(-x|\xi| + \frac{\xi}{|\xi|} \right),$$

где $f_i(x)$ – производная функции $f(x)$ по i -й переменной. При $f(x) = |x|^{2m-n} (c_1 \ln |x| + c_2)$ производная $f_i(x)$ существует, если $|x| > 0$. В нашем случае $|x/|x| - |x|\xi| > 0$, а значит, производные любого порядка функции $f(x)$ существуют. Поэтому в силу первого утверждения леммы

$$\Delta E_{2m}^*(x, \xi) = \Delta (E_{2m}(-x|\xi| + \xi/|\xi|)) = (-|\xi|)^2 \Delta (E_{2m}(-x|\xi| + \xi/|\xi|)) = -|\xi|^2 E_{2m-2}^*(x, \xi).$$

Отсюда также следует, что $\Delta_x E_2^*(x, \xi) = 0$. Второе утверждение леммы доказано.

Исследуем произведение полигармонических функций. Известно, что произведение гармонических функций может быть как гармонической функцией, так и функцией, которая не m -гармоническая ни при каком $m \in \mathbb{N}$, например, uv и u^2 при $u(x_1, x_2) = e^{x_1} \cos x_2$, $v(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$. Кроме того, по известной формуле Альманси функция $|x|^{2m-2}u(x)$ является m -гармонической функцией, если $u(x)$ – гармоническая. Введём оператор

$$\Lambda u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}, \quad (10)$$

для которого верно равенство $\Delta \Lambda u = (\Lambda + 2)\Delta u$. Из этого равенства следует, что $\Delta^m \Lambda u = (\Lambda + 2m)\Delta^m u$, а поэтому, если функция $u(x)$ является m -гармонической, функция Λu тоже m -гармоническая, хотя в её представлении есть слагаемые вида $x_i u_{x_i}$.

Для следующего результата необходима небольшая модификация метода математической индукции:

Утверждение. Пусть даны утверждения $A_{n,m}$ при $n, m \in \mathbb{N}$ и для них выполнены следующие условия:

- 1) утверждения $A_{n,1}$ и $A_{1,m}$ верны при $n, m \in \mathbb{N}$;
- 2) из справедливости утверждений $A_{n-1,m}$ и $A_{n,m-1}$, индекс которых принадлежит $\mathbb{N}^2$, следует справедливость $A_{n,m}$.

Тогда утверждения $A_{n,m}$ верны при всех $n, m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть при выполненных условиях 1) и 2) найдутся утверждения $A_{n,m}$, которые не верны. Выберем среди них такое A_{n^*,m^*} , у которого сумма индексов $n^* + m^*$ наименьшая. По условию 1) для A_{n^*,m^*} не может быть ни $n^* = 1$, ни $m^* = 1$. Тогда по условию 2) не должно быть выполнено либо утверждение A_{n^*-1,m^*} , либо утверждение A_{n^*,m^*-1} . Для этих утверждений сумма индексов равна $n^* + m^* - 1$, чего не может быть по выбору утверждения A_{n^*,m^*} . Значит все утверждения $A_{n,m}$ верны. Утверждение доказано.

Лемма 2. Пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, $k_3 \in \mathbb{N}$ и $k = k_1 + k_2 + k_3$. Тогда функция

$$h^{k_1}(x, \xi) h_*^{k_2}(x, \xi) E_{2k_3}^*(x, \xi)$$

является k -гармонической по $x \in S$ при $\xi \in \bar{S}$.

Доказательство. 1°. Докажем, что функция $F_{k_2,k_3}(x, \xi) \equiv h_*^{k_2}(x, \xi) E_{2k_3}^*(x, \xi)$ при $k_2 \in \mathbb{N}_0$, $k_3 \in \mathbb{N}$ является $(k_2 + k_3)$ -гармонической по $x \in S$. Пусть сначала $n \in \mathbb{N}_{k_2+k_3}$. Нетрудно видеть, что в этом случае $n \in \mathbb{N}_{k_3}$, и тогда из (8) получим

$$F_{k_2,k_3}(x, \xi) = C_{k_3} h_*^{k_3-n/2+k_2}(x, \xi) = \frac{C_{k_3}}{C_{k_2+k_3}} E_{2k_2+2k_3}^*(x, \xi),$$

где C_{k_3} – числовой коэффициент при $|x - \xi|^{2k_3-n}$ в E_{2k_3} , когда $n \in \mathbb{N}_{k_3}$. Поэтому, в силу леммы 1, функция $F_{k_2,k_3}(x, \xi)$ является $(k_2 + k_3)$ -гармонической по $x \in S$. Если же $n \in \mathbb{N}_{k_2+k_3}^c$, но $n \in \mathbb{N}_{k_3}$, то найдётся натуральное s такое, что $k_3 + 1 \leq s \leq k_2 + k_3$ и $2s = n$. В этом случае

$$F_{k_2,k_3}(x, \xi) = C_{k_3} h_*^{k_3+k_2-s}(x, \xi).$$

Далее нетрудно подсчитать, что

$$\Delta \left| \frac{x}{|x|} - |x|\xi \right|^\alpha = \alpha(\alpha + n - 2) |\xi|^2 \left| \frac{x}{|x|} - |x|\xi \right|^{\alpha-2}, \quad (11)$$

и поскольку $1 \leq k_3 + k_2 - s + 1 \leq k_2$, то полином $F_{k_2,k_3}(x, \xi)$ будет $(k_2 + 1)$ -гармоническим по $x \in S$. Так как $k_2 + 1 \leq k_2 + k_3$, то утверждаемое верно.

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}_{k_3}^c$. Тогда найдётся натуральное $s \leq k_3$ такое, что $2s = n$, а поэтому полином $h_*^{k_3-s}(x, \xi)$, аналогично предыдущему случаю, является $(k_3 - s + 1)$ -гармоническим. Из формулы (8) найдём

$$E_{2k_3}^*(x, \xi) = C_{k_3} h_*^{k_3-s}(x, \xi) \ln |x|/|x| - |x|\xi| - C_{k_3} L_{k_3} h_*^{k_3-s}(x, \xi),$$

где C_{k_3} – числовой множитель при $|x - \xi|^{2k_3-n}$, а L_{k_3} – числовое слагаемое при логарифме в E_{2k_3} , когда $n \in \mathbb{N}_{k_3}^c$. Поэтому

$$F_{k_2, k_3}(x, \xi) = C_{k_3} h_*^{k_3+k_2-s}(x, \xi) \ln |x|/|x| - |x|\xi| - C_{k_3} L_{k_3} h_*^{k_3+k_2-s}(x, \xi).$$

Так как $n \in \mathbb{N}_{k_2+k_3}^c$, то из (8) следует

$$h_*^{k_2+k_3-s}(x, \xi) \ln |x|/|x| - |x|\xi| = C_{k_2+k_3}^{-1} E_{2k_2+2k_3}^*(x, \xi) + L_{k_2+k_3} h_*^{k_2+k_3-s}(x, \xi)$$

и, значит,

$$F_{k_2, k_3}(x, \xi) = C_{k_3} C_{k_2+k_3}^{-1} E_{2k_2+2k_3}^*(x, \xi) + C_{k_3} (L_{k_2+k_3} - L_{k_3}) h_*^{k_2+k_3-s}(x, \xi).$$

Первое слагаемое в полученном равенстве согласно лемме 1 является $(k_2 + k_3)$ -гармонической функцией по $x \in S$, а второе слагаемое – $(k_2 + k_3 - s + 1)$ -гармоническим полиномом. Так как $s \geq 1$, то утверждение 1° выполнено.

2°. Теперь докажем, что функция $G_{k_1, k'_2}(x, \xi) = h^{k_1}(x, \xi) F_{k'_2}(x, \xi)$, где $F_{k'_2}(x, \xi)$ – произвольная k'_2 -гармоническая функция по $x \in S$ и $k_1 \in \mathbb{N}_0$, $k'_2 \in \mathbb{N}$, является $(k_1 + k'_2)$ -гармонической по $x \in S$. Доказательство проведём методом индукции, сформулированным выше в утверждении, по двум индексам $k_1 \in \mathbb{N}_0$ и $k'_2 \in \mathbb{N}$.

1. Если $k_1 = 0$, то $G_{0, k'_2}(x, \xi) = F_{k'_2}(x, \xi)$, и значит, $G_{0, k'_2}(x, \xi)$ является k'_2 -гармонической по условию. Если $k'_2 = 1$, то $G_{k_1, 1}(x, \xi) = h^{k_1}(x, \xi) F_1(x, \xi)$, и поскольку $h(x, \xi) = |x - \xi|^2$, то согласно формуле Альманси функция $G_{k_1, 1}(x, \xi)$ является $(k_1 + 1)$ -гармонической.

2. Предположим, что функции вида $h^{k_1-1}(x, \xi) F_{k'_2}(x, \xi)$ и $h^{k_1}(x, \xi) F_{k'_2-1}(x, \xi)$ являются $(k_1 + k'_2 - 1)$ -гармоническими по $x \in S$. Так как ввиду (9)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h^{k_1}(x, \xi) = 2k_1(x_i - \xi_i) h^{k_1-1}(x, \xi),$$

то, используя оператор Λ из (10), получим

$$\begin{aligned} \Delta_x G_{k_1, k'_2}(x, \xi) &= F_{k'_2}(x, \xi) \Delta_x h^{k_1}(x, \xi) + 4k_1 h^{k_1-1}(x, \xi) \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \frac{\partial F_{k'_2}(x, \xi)}{\partial x_i} + \\ &+ h^{k_1}(x, \xi) \Delta_x F_{k'_2}(x, \xi) = 2k_1(2k_1 + n - 2) h^{k_1-1}(x, \xi) F_{k'_2}(x, \xi) + \\ &+ 4k_1 h^{k_1-1}(x, \xi) (\Lambda_x F_{k'_2}(x, \xi) - \xi \cdot \nabla_x F_{k'_2}(x, \xi)) + h^{k_1}(x, \xi) \Delta_x F_{k'_2}(x, \xi). \end{aligned} \quad (12)$$

В последнем равенстве было использовано тождество, аналогичное (11):

$$\Delta_x h^{k_1}(x, \xi) = 2k_1(2k_1 + n - 2) h^{k_1-1}(x, \xi).$$

По предположению индукции и свойству оператора Λ каждое слагаемое в правой части (12) является $(k_1 + k'_2 - 1)$ -гармонической функцией по $x \in S$. Поэтому функция $G_{k_1, k'_2}(x, \xi)$ будет $(k_1 + k'_2)$ -гармонической по $x \in S$. Теперь выберем $F_{k'_2}(x, \xi) = F_{k_2, k_3}(x, \xi)$, где $k'_2 = k_2 + k_3$. Это возможно, поскольку, во-первых, по лемме 1 функция $F_1(x, \xi) = F_{0,1}(x, \xi) = E_2^*(x, \xi)$ гармоническая по $x \in S$, а во-вторых, по утверждению 1° леммы функция $F_{k_2, k_3}(x, \xi)$ является k'_2 -гармонической по $x \in S$, когда $\xi \in \bar{S}$. Лемма доказана.

2. Функция Грина. Исследуем случай, когда $n \in \mathbb{N}_{m-1}$, т.е. для почти всех n , за исключением конечного множества $\mathbb{N}_{m-1}^c$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Функция Грина $G_{2m}(x, \xi)$ задачи Дирихле (6), (7) при $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ может быть записана в виде суммы элементарного решения $E_{2m}(x, \xi)$ и m -гармонической функции

$$G_{2m}(x, \xi) = E_{2m}(x, \xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2 - 1)^k (|\xi|^2 - 1)^k}{(2m - 2, -2)_k (2, 2)_k} E_{2m-2k} \left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi \right). \quad (13)$$

Функция $G_{2m}(x, \xi)$ является m -гармонической по $x \in S$, $x \neq \xi \in \bar{S}$, и удовлетворяет равенствам

$$G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0, \quad \frac{\partial G_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Big|_{x \in \partial S} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} G_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{x \in \partial S} = 0, \quad \xi \in S. \quad (14)$$

Доказательство. 1. Нетрудно видеть, что при $m = 1$ из (13), учитывая обозначения (9), равенство $E(x, \xi) = E_2(x, \xi)$ и условие $(a, b)_0 = 1$, следует формула (1), а при $m = 2$ из (13) получаем

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{2 \cdot 2} E_2^*(x, \xi),$$

что совпадает с (4) при $n \geq 3$. Если же $m = 3$, то (13) даёт

$$G_6(x, \xi) = E_6(x, \xi) - E_6^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{4 \cdot 2} E_4^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2 (|\xi|^2 - 1)^2}{8 \cdot 8} E_2^*(x, \xi),$$

что соответствует функции $G_6(x, \xi)$.

2. Проверим m -гармоничность функции $G_{2m}(x, \xi)$ из (13) по $x \in S$, $x \neq \xi \in \bar{S}$. Для этого заметим, что в соответствии с обозначениями (9) верны равенства

$$h_*(x, \xi) - h(x, \xi) = 1 - 2x \cdot \xi + |x|^2 |\xi|^2 - |x|^2 + 2x \cdot \xi - |\xi|^2 = (|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1),$$

а поэтому формулу (13) можно записать в виде

$$G_{2m}(x, \xi) = E_{2m}(x, \xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2m - 2, -2)_k (2, 2)_k} E_{2m-2k}^*(x, \xi). \quad (15)$$

В силу леммы 1 достаточно проверить m -гармоничность функций под знаком суммы в (15), но это сразу следует из леммы 2.

3. Теперь проверим выполнение граничных условий (14). Внешняя единичная нормальная производная к сфере радиуса $|x| < 1$ от функции $G_{2m}(x, \xi)$ равна

$$\frac{\partial G_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial G_{2m}(x, \xi)}{\partial x_i} = \frac{1}{|x|} \Lambda_x G_{2m}(x, \xi),$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 G_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_x^2} = \left(\frac{1}{|x|} \Lambda_x \frac{1}{|x|} \Lambda_x \right) G_{2m}(x, \xi) = \frac{1}{|x|^2} \Lambda_x (-1 + \Lambda_x) G_{2m}(x, \xi).$$

Значит, используя обозначение $\Lambda^{[k]} = \Lambda(\Lambda - 1) \cdots (\Lambda - k + 1)$, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k G_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_x^k} &= \left(\frac{1}{|x|} \Lambda_x \right)^k G_{2m}(x, \xi) = \\ &= \frac{1}{|x|^k} \Lambda_x (\Lambda_x - 1) \cdots (\Lambda_x - k + 1) G_{2m}(x, \xi) = \frac{1}{|x|^k} \Lambda_x^{[k]} G_{2m}(x, \xi). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, для выполнения граничных условий (14) нужно доказать справедливость равенств

$$G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0, \quad \Lambda_x G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0, \quad \dots, \quad \Lambda_x^{[m-1]} G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0.$$

Нетрудно видеть, что эти равенства эквивалентны следующим:

$$G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0, \quad \Lambda_x G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0, \quad \dots, \quad \Lambda_x^{m-1} G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0. \quad (17)$$

Докажем, что они верны, а значит, выполняются и граничные условия (14). Если в (15) положить $x \in \partial S$, т.е. $|x| = 1$, то при $\xi \in S$, учитывая, что $E_{2m}(x, \xi) = E_{2m}^*(x, \xi)$ и $h(x, \xi) = h_*(x, \xi)$ на ∂S , получаем

$$G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = E_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} - \frac{E_{2m}(x, \xi)}{(2m-2, -2)_0(2, 2)_0} \Big|_{x \in \partial S} = 0 \quad (18)$$

для любого $m \geq 1$.

Исследуем другие граничные условия из (17). Верно равенство

$$\begin{aligned} \Lambda_x G_{2m}(x, \xi) &= \Lambda_x E_{2m}(x, \xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2m-2, -2)_k(2, 2)_k} \Lambda_x E_{2m-2k}^*(x, \xi) - \\ &- \sum_{k=1}^{m-1} k \Lambda_x (h_*(x, \xi) - h(x, \xi)) \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^{k-1}}{(2m-2, -2)_k(2, 2)_k} E_{2m-2k}^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим последний член в первой сумме в (19), имеющий вид

$$\varepsilon_{m-2}(x) \equiv \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^{m-1}}{(2m-2, -2)_{m-1}(2, 2)_{m-1}} \Lambda_x E_2^*(x, \xi).$$

По лемме 2 эта функция m -гармоническая в S . Поскольку $h_*(x, \xi) = h(x, \xi)$ при $x \in \partial S$, то после применения к функции $\varepsilon_{m-2}(x)$ операторов Λ_x^k , $k = \overline{0, m-2}$, пределы при $x \rightarrow \partial S$ всех полученных при этом функций обратятся в нуль. Нижний индекс у $\varepsilon_{m-2}(x)$ указывает на максимальный порядок оператора Λ_x , при котором это свойство выполнено. Поэтому в дальнейшем изложении все функции, обладающие таким свойством, будем обозначать как $\varepsilon_{m-2}(x)$. Эти функции на выполнение граничных условий (17) не влияют. Кроме того, заметим, что при $n \in \mathbb{N}_m$, в соответствии с (8), верны равенства

$$\begin{aligned} \Lambda_x E_{2m}(x, \xi) &= \Lambda_x \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m(2, 2)_{m-1}} = \frac{(-1)^m}{(2-n, 2)_m(2, 2)_{m-1}} \Lambda_x h^{m-n/2}(x, \xi) = \\ &= (m-n/2) \frac{-E_{2m-2}(x, \xi)}{(2m-n)(2m-2)} \Lambda_x h(x, \xi) = -\frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}(x, \xi). \end{aligned}$$

Если же $n = 2m$, то опять, в соответствии с (8), имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_x E_{2m}(x, \xi) &= \Lambda_x \frac{(-1)^m \ln |x - \xi|}{(2-2m, 2)_m^*(2, 2)_{m-1}} = \frac{(-1)^m}{(-1)^{m-1}(2, 2)_{m-1}(2, 2)_{m-1}} \frac{1}{2} \Lambda_x \ln h(x, \xi) = \\ &= \frac{-E_{2m-2}(x, \xi)}{2(2m-2)} \Lambda_x h(x, \xi) = -\frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}(x, \xi). \end{aligned}$$

Аналогично проделанным вычислениям нетрудно получить для $n \in \mathbb{N}_{m-1}$

$$\Lambda_x E_{2m}^*(x, \xi) = -\frac{\Lambda_x h_*(x, \xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}^*(x, \xi).$$

Исходя из сказанного, равенство (19) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_x G_{2m}(x, \xi) = & -\frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}(x, \xi) + \\ & + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2m-2, -2)_k (2, 2)_k} \frac{\Lambda_x h_*(x, \xi)}{2(2m-2k-2)} E_{2m-2k-2}^*(x, \xi) + \varepsilon_{m-2}(x) - \\ & - \sum_{k=0}^{m-2} (k+1) \Lambda_x (h_*(x, \xi) - h(x, \xi)) \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2m-2, -2)_{k+1} (2, 2)_{k+1}} E_{2m-2k-2}^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что в последней сумме была сделана замена индекса $k \rightarrow k+1$. Объединив две последние суммы, имеющие одинаковые верхние и нижние индексы, в одну сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2m-2, -2)_k (2, 2)_k} E_{2m-2k-2}^*(x, \xi) \left(\frac{\Lambda_x h_*(x, \xi)}{2(2m-2k-2)} - \frac{(k+1) \Lambda_x (h_*(x, \xi) - h(x, \xi))}{(2m-2k-2)(2k+2)} \right) = \\ = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2m-2, -2)_k (2, 2)_k} \frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{2(2m-2k-2)} E_{2m-2k-2}^*(x, \xi), \end{aligned}$$

а затем используя равенство

$$(2m-2, -2)_{k+1} = (2m-2, -2)_k (2m-2k-2) = (2m-2)(2m-4, -2)_k,$$

запишем

$$\frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{2(2m-2)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2m-4, -2)_k (2, 2)_k} E_{2m-2k-2}^*(x, \xi).$$

Таким образом, (20) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Lambda_x G_{2m}(x, \xi) = & -\frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}(x, \xi) + \\ & + \frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{2(2m-2)} \sum_{k=0}^{(m-1)-1} \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2(m-1)-2, -2)_k (2, 2)_k} E_{2(m-1)-2k}^*(x, \xi) + \varepsilon_{m-2}(x), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\Lambda_x G_{2m}(x, \xi) = -\frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x, \xi) + \varepsilon_{m-2}(x). \quad (21)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\Lambda_x^2 G_{2m}(x, \xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x, \xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x, \xi) - \frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-1)} \Lambda_x G_{2m-2}(x, \xi) + \Lambda_x \varepsilon_{m-2}(x).$$

В силу равенства (21), взятого при $m = m-1$, и с учётом равенств

$$\Lambda_x \varepsilon_{m-2}(x) = \varepsilon_{m-3}(x), \quad -\frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-1)} \varepsilon_{m-3}(x) = \varepsilon_{m-3}(x),$$

а также $\varepsilon_{m-3}(x) + \varepsilon_{m-3}(x) = \varepsilon_{m-3}(x)$, можем записать

$$\Lambda_x^2 G_{2m}(x, \xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x, \xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x, \xi) + \frac{(\Lambda_x h(x, \xi))^2}{4^2(m-1)(m-2)} G_{2m-4}(x, \xi) + \varepsilon_{m-3}(x).$$

Основываясь на этом соотношении и учитывая (21), предположим, что при некотором $1 < k < m - 1$ верно равенство

$$\Lambda_x^{k-1} G_{2m}(x, \xi) = \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x, \xi) G_{2m-2i}(x, \xi) + \varepsilon_{m-k}(x),$$

где $g_{2i}^{(k)}(x, \xi)$ – некоторые полиномы степени $2i$ от x . Например,

$$g_2^{(1)}(x, \xi) = -\frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-1)}, \quad g_2^{(2)}(x, \xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x, \xi)}{4(m-1)}, \quad g_4^{(2)}(x, \xi) = \frac{(\Lambda_x h(x, \xi))^2}{16(m-1)(m-2)}.$$

Используя (21) при $m = m - i$, запишем

$$\begin{aligned} \Lambda_x^k G_{2m}(x, \xi) &= \sum_{i=1}^{k-1} \Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x, \xi) G_{2m-2i}(x, \xi) - \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x, \xi) \frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-i-1)} \times \\ &\times G_{2m-2i-2}(x, \xi) + \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x, \xi) \varepsilon_{m-i-2}(x) + \Lambda_x \varepsilon_{m-k}(x). \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку

$$\sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x, \xi) \frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-i-1)} G_{2m-2i-2}(x, \xi) = \sum_{i=2}^k g_{2i-2}^{(k-1)}(x, \xi) \frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-i)} G_{2m-2i}(x, \xi),$$

получим равенство

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x, \xi) = \sum_{i=1}^k \left(\Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x, \xi) - g_{2i-2}^{(k-1)}(x, \xi) \frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-i)} \right) G_{2m-2i}(x, \xi) + \varepsilon_{m-k-1}(x),$$

где следует считать, что $g_{2i}^{(k)} = 0$ при $i = 0$ или $i > k$. Кроме того, здесь было учтено, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x, \xi) \varepsilon_{m-i-2}(x) + \Lambda_x \varepsilon_{m-k}(x) = \varepsilon_{m-k-1}(x),$$

так как наименьший индекс у функций $\varepsilon_k(x)$ под знаком суммы равен $m - k - 1$. Очевидно, что в предыдущем равенстве функция

$$g_{2i}^{(k)}(x, \xi) = \Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x, \xi) - g_{2i-2}^{(k-1)}(x, \xi) \frac{\Lambda_x h(x, \xi)}{4(m-i)}$$

является полиномом степени $2i$ по x , так как $\deg g_{2i}^{(k)}(x, \xi) = 2i$ при $k = 1, 2$. Таким образом, при $1 \leq k \leq m - 1$ справедлива формула

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x, \xi) = \sum_{i=1}^k g_{2i}^{(k)}(x, \xi) G_{2m-2i}(x, \xi) + \varepsilon_{m-k-1}(x).$$

Если здесь воспользоваться равенством (18), то с учётом определения функций $\varepsilon_k(x)$ будем иметь

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x, \xi)|_{x \in \partial S} = \sum_{i=1}^k g_{2i}^{(k)}(x, \xi) G_{2m-2i}(x, \xi)|_{x \in \partial S} + \varepsilon_{m-k-1}(x)|_{x \in \partial S} = 0$$

для $k = \overline{0, m-1}$. Это означает выполнение граничных условий (17) и, следовательно, (14). Теорема доказана.

Замечание 3. Если $n \in \mathbb{N}_{m-1}^c$, то функция Грина $G_{2m}(x, \xi)$ задачи Дирихле может иметь вид, несколько отличный от вида функции, полученной в теореме 1. Например, при $n = 4$ и $m = 3$ имеем $4 \in \mathbb{N}_2^c$. Для этого случая в работе [13, теорема 2] было получено представление

$$G_6(x, \xi) = E_6(x, \xi) - E_6^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{8} \left(E_4^*(x, \xi) + \frac{1}{16} \right) - \frac{(|x|^2 - 1)^2(|\xi|^2 - 1)^2}{64} E_2^*(x, \xi).$$

Если же $n = 2$ и $m = 2$, а поэтому $2 \in \mathbb{N}_1^c$, то в соответствии с [11, теорема 2.3] имеем

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{4} \left(E_2^*(x, \xi) + \frac{1}{2} \right).$$

3. Решение однородной задачи Дирихле. В качестве продолжения исследований по построению решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения из работы [10] приведём следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.

Теорема 2. *Решение однородной задачи Дирихле (6), (7) для полигармонического уравнения в единичном шаре S при $f \in C^1(\bar{S})$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ можно представить в виде*

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S G_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (22)$$

где ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Вычислим значение оператора Δ^{m-1} от функции, задаваемой равенством (22). Для этого заметим, что интегралы типа потенциала $\int_S \rho(\xi) |x - \xi|^{-\alpha} d\xi$ являются функциями класса $C^p(\mathbb{R}^n)$ при ограниченной и интегрируемой функции $\rho(x)$, и дифференцирование порядка $p \in \mathbb{N}_0$ возможно под знаком интеграла при всяком p таком, что $\alpha + p < n$ [32, с. 25]. В нашем случае для сингулярного слагаемого функции $G_{2m}(x, \xi)$ из (13) имеем $\alpha = n - 2m + 1$ при $n \in \mathbb{N}_{m-1}$, а значит, для интеграла

$$u_1(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S E_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

$p = 2m - 2$ и поэтому $u_1 \in C^{2m-2}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, оператор Δ^{m-1} можно внести под знак интеграла. В силу леммы 1 функция $E_{2m}(x, \xi)$ обладает следующим свойством: $\Delta_x E_{2m}(x, \xi) = -E_{2(m-1)}(x, \xi)$. Отсюда при $x \in S$ имеем равенства

$$\Delta^{m-1} u_1(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S \Delta_x^{m-1} E_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi = -\frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

и по свойству объёмного потенциала получим

$$\Delta^m u_1(x) = \Delta \left(-\frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x, \xi) f(\xi) d\xi \right) = f(x), \quad x \in S.$$

Условия $f \in C^1(\bar{S})$ достаточно для выполнения в S равенства $\Delta(\Delta^{m-1} u_1(x)) = f(x)$ [29]. В лемме 2, с учётом обозначения $(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1) = h_*(x, \xi) - h(x, \xi)$ из теоремы 1, было доказано, что функция вида

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2 - 1)^k (|\xi|^2 - 1)^k}{(2m - 2, -2)_k (2, 2)_k} E_{2m-2k}^*(x, \xi) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h_*(x, \xi) - h(x, \xi))^k}{(2m - 2, -2)_k (2, 2)_k} E_{2m-2k}^*(x, \xi)$$

является m -гармонической по x в S при любом $\xi \in \bar{S}$ и её можно дифференцировать по x под знаком интеграла по ξ любое число раз. Обозначим интеграл по $\xi \in S$ от этой функции, умноженной на $(-1)^m/\omega_n f(\xi)$, через $u_2(x)$. Тогда будем иметь

$$\Delta^m u_2(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_S \Delta_x^m \frac{(|x|^2 - 1)^k (|\xi|^2 - 1)^k}{(2m - 2, -2)_k (2, 2)_k} E_{2m-2k}^*(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0.$$

Поэтому, учитывая (13), функция $u(x)$ из (22) удовлетворяет уравнению (6):

$$\Delta^m u(x) = \Delta^m u_1(x) - \Delta^m u_2(x) = f(x), \quad x \in S.$$

В силу того, что для функции $u(x)$ из (21) в итоге имеем включение $u \in C^{2m-2}(\bar{S})$, предельный переход $x \rightarrow \partial S$ для функций $\Lambda_x^{[k]} u(x)$ можно внести под знак интеграла. С помощью (17) и (16) найдём

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial S} = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S \Lambda_x^{[k]} G_{2m}(x, \xi) |_{x \in \partial S} f(\xi) d\xi = 0, \quad k = \overline{0, m-1},$$

а значит, функция $u(x)$ из (22) удовлетворяет всем граничным условиям (7). Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай простейшей полиномиальной правой части уравнения (6).

Теорема 3. Пусть в уравнении (6) $f(x) = |x|^{2l} H_k(x)$, где $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$. Тогда решение задачи Дирихле (6), (7) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{|\xi| < 1} G_{2m}(x, \xi) |x|^{2l} H_k(\xi) d\xi = \\ &= \left(|x|^{2l+2m} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{l+m}{i} (|x|^2 - 1)^i \right) \frac{H_k(x)}{(2l+2, 2)_m (2l+2k+n, 2)_m}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $(a, b)_m$ — обобщённый символ Похгаммера, определённый в (8).

Доказательство. Пусть $m = 3$. В [13, следствие 2] было установлено, что решение задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения при $f(x) = |x|^{2l} H_m(x)$ можно записать как

$$u(x) = \frac{|x|^{2l+6} - 1 - (l+3)(|x|^2 - 1) - (l+2)(l+3)(|x|^2 - 1)^2/2}{(2l+2, 2)_3 (2l+2k+n, 2)_3} H_k(x).$$

В силу единственности решения задачи Дирихле [33, с. 39] и равенства (22) без труда получаем формулу (23) при $m = 3$. Равенство (23) обобщает эту формулу на произвольное $m \in \mathbb{N}$. Проверим, что функция $u(x)$, задаваемая правой частью (23), является решением однородной задачи Дирихле с правой частью $f(x) = |x|^{2l} H_k(x)$. Нетрудно видеть, что поскольку

$$\Delta |x|^{2l} H_k(x) = 2l(2l+2k+n-2) |x|^{2l-2} H_k(x),$$

то из (23), учитывая, что функции $|x|^{2k} H_k(x)$ при $k \leq m-1$ являются m -гармоническими полиномами, находим

$$\Delta^m u(x) = \frac{(2l+2m) \cdots (2l+2)(2l+2m+2k+n-2) \cdots (2l+2k+n)}{(2l+2, 2)_m (2l+2k+n, 2)_m} |x|^{2l} H_k(x) = |x|^{2l} H_k(x),$$

т.е. $u(x)$ удовлетворяет уравнению (6).

Проверим выполнение граничных условий (7). Сначала выделим из функции $u(x)$ постоянный множитель, т.е. представим эту функцию в виде $u(x) = (2l+2, 2)_m (2l+2k+n, 2)_m u^*(x)$.

Очевидно, что если $u^*(x)$ удовлетворяет условиям (17), то функция $u(x)$ тоже им удовлетворяет, а значит удовлетворяет и условиям (7). Далее представим функцию $u^*(x)$ в виде произведения двух полиномов $u^*(x) = R_m(x)H_k(x)$, где

$$R_m(x) = |x|^{2l+2m} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{l+m}{i} (|x|^2 - 1)^i.$$

Легко видеть, что $R_m(x)|_{|x|=1} = 0$ при $m \geq 1$, а значит, $u^*(x)|_{|x|=1} = 0$. Вычислим $\Lambda u^*(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda u^*(x) &= H_k(x)\Lambda R_m(x) + R_m(x)\Lambda H_k(x) = \\ &= \left((2l+2m)|x|^{2l+2m} - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{l+m}{i} 2i|x|^2(|x|^2-1)^{i-1} \right) H_k(x) + kR_m(x)H_k(x) = \\ &= (2l+2m) \left(|x|^{2l+2m-2} - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{l+m-1}{i-1} (|x|^2-1)^{i-1} \right) |x|^2 H_k(x) + kR_m(x)H_k(x) = \\ &= (2l+2m)R_{m-1}(x)H_{k+2}(x) + kR_m(x)H_k(x), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\Lambda u^*|_{|x|=1} = 0$ при $m \geq 2$. Здесь $H_{k+2}(x) = |x|^2 H_k(x)$. Если применить оператор Λ к полученному равенству, то аналогично проделанному выше получим

$$\Lambda(R_{m-i}(x)H_{k+j}(x)) = (2m-2i)R_{m-i-1}(x)|x|^2 H_{k+j}(x) + (k+j)R_{m-i}(x)H_{k+j}(x),$$

где $m-i-1 \geq 1$. Поэтому, выделив в функции $\Lambda^s u^*(x)$ слагаемое с наименьшим индексом у функции $G_i(x)$ отдельно, а остальные слагаемые с более высоким индексом у $G_i(x)$ обозначив как $O_i(x)$, можно записать

$$\Lambda^s u^*(x) = (2l+2m) \cdots (2l+2m-2s+2)G_{m-s}(x)H_{k+2s}(x) + O_{m-s}(x),$$

где $H_{k+2s}(x) = |x|^{2s} H_k(x)$ и $m-1 \geq s$. Поскольку $R_i(x)|_{|x|=1} = 0$ при $i \geq 1$, а значит, $O_{m-s}(x)|_{|x|=1} = 0$, то из полученного равенства следует, что $\Lambda^s u^*(x)|_{|x|=1} = 0$ для $s = \overline{0, m-1}$.

Таким образом, граничные условия (7) для функции $u^*(x)$, а значит и для функции (23), выполнены. Из единственности решения задачи Дирихле и равенства (22) следует справедливость (23). Теорема доказана.

Замечание 4. Полином из правой части (23) является решением задачи Дирихле (6), (7) при всех $n \geq 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begehr H.* Biharmonic Green functions // *Le Matematiche*. 2006. V. 61. P. 395–405.
2. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function // *Complex Variables and Elliptic Equat.* 2013. V. 58. № 4. P. 483–496.
3. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // *Adv. Pure Appl. Math.* 2015. V. 6. № 3. P. 163–172.
4. *Karachik V.V., Turmetov B.Kh.* On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // *Adv. in Pure and Appl. Math.* 2019. V. 10. № 3. C. 203–214.
5. *Ying Wang, Liuqing Ye.* Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // *Complex Variables and Elliptic Equat.* 2013. V. 58. № 1. P. 7–22.
6. *Ying Wang.* Tri-harmonic boundary value problems in a sector // *Complex Variables and Elliptic Equat.* 2014. V. 59. № 5. P. 732–749.
7. *Boggio T.* Sulle funzioni di Green d'ordine m // *Palermo Rend.* 1905. V. 20. P. 97–135.
8. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y.* Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // *Complex Variables and Elliptic Equat.* 2008. V. 53. P. 177–183.

9. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 435–438.
10. Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2021. V. 9. № 16. Art. 1907.
11. Karachik V.V. Green's function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 9. P. 1500–1521.
12. Карачик В.В. О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 1. С. 71–86.
13. Карачик В.В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 87–105.
14. Карачик В.В., Торебек Б.Т. О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 39–51.
15. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Мат. тр. 2016. Т. 19. № 2. С. 86–108.
16. Солдатов А.П. О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.
17. Карачик В.В. Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 673–686.
18. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equat. 2009. V. 54. P. 79–93.
19. Карачик В.В. Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 653–662.
20. Karachik V.V. The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball // J. of Math. Sci. 2023. V. 269. № 2. P. 189–204.
21. Karachik V.V. Riquier–Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // Mathematics. 2023. V. 11. № 4. Art. 1000.
22. Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four boundary value problems for a nonlocal biharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2022. V. 10. № 7. Art. 1158.
23. Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B. Remark on Robin problem for Poisson equation // Complex Variables and Elliptic Equat. 2017. V. 62. № 10. P. 1589–1599.
24. Akel M., Begehr H. Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains // Math. Nachrichten. 2017. Bd. 290. H. 4. S. 490–506.
25. Lin H. Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs // Complex Variables and Elliptic Equat. 2020. V. 67. P. 79–95.
26. Begehr H., Burgumbayeva S., Dauletkulova A., Lin H. Harmonic Green functions for the Almaty apple // Complex Variables and Elliptic Equat. 2020. V. 65. № 11. P. 1814–1825.
27. Grebenkov D.S., Traytak S.D. Semi-analytical computation of Laplacian Green functions in three-dimensional domains with disconnected spherical boundaries // J. of Comput. Phys. 2019. V. 379. P. 91–117.
28. Hsu C.-W., Hwu C. Green's functions for unsymmetric composite laminates with inclusions // Proc. of the Royal Soc. A: Math., Phys. and Eng. Sci. 2020. V. 476. № 2233. Art. 20190437.
29. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1982.
30. Begerh H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet problems // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 19–40.
31. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.
32. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1981.
33. Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G. Polyharmonic Boundary Value Problems. Berlin, 2010.

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
г. Челябинск

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.
После доработки 30.03.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.