

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.8

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ “СИЛЬНОЙ” ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© 2023 г. А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова

Исследованы сингулярно возмущённые задачи при наличии спектральных особенностей у предельного оператора с использованием метода регуляризации С.А. Ломова. В частности, построено регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущённой неоднородной смешанной задачи на полуоси для параболического уравнения при наличии “сильной” точки поворота у предельного оператора. На основе идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром показано, каким образом следует вводить регуляризующие функции и дополнительные регуляризующие операторы, подробно описан формализм метода регуляризации для такого вида особенности, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

DOI: 10.31857/S0374064123080034, EDN: INDIPZ

Введение. С помощью метода регуляризации активно развивается общая теория сингулярных возмущений в условиях стабильности спектра предельного оператора [1–3], которые, если говорить кратко, обеспечивают такое же поведение спектральных характеристик оператора (равномерное по независимой переменной), как и при постоянном спектре. Задачи с нестабильным спектром начали изучать около 50 лет назад, были получены (с определённой долей искусственных приёмов) асимптотические решения неоднородных задач с точками поворота и других задач с нарушением условий стабильности спектра. В результате стало очевидно, что в условиях нестабильного спектра существенно особые сингулярности в неоднородных задачах определяются не только общим числом точек спектра предельного оператора, как это имеет место при стабильном спектре, но и числом нулей у отдельных точек спектра переменного оператора. Тщательный анализ имеющихся результатов привёл к разработке общей теории асимптотического интегрирования для задач, в которых переменный предельный оператор дискретно необратим (т.е. необратим в нулях точек спектра). Метод регуляризации классифицирует три группы точек поворота.

1. “Простая” точка поворота – собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга, одно собственное значение в отдельных точках t обращается в нуль [4].

2. “Слабая” точка поворота – хотя бы два собственных значения пересекаются в отдельных точках t , но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения. Базис из собственных векторов остаётся гладким по t [5].

3. “Сильная” точка поворота – хотя бы два собственных значения пересекаются в отдельных точках t , но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения. Базис в точках пересечения теряет гладкость по t [6].

Классические точки поворота, которые изучали Г. Вентцель, Х. А. Крамерс и Л. Бриллюэн, относятся к “сильным” точкам поворота.

Данная статья развивает метод регуляризации для сингулярно возмущённой задачи Коши для параболического уравнения с “сильной” точкой поворота первого порядка у предельного оператора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u + h(x, t), \quad t \in (0, T], \quad 0 < x < +\infty,$$

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \\
u(0, t) &= \psi(t), \quad t \in [0, T], \\
f(0) &= \psi(0)
\end{aligned} \tag{1}$$

с условиями:

1) существует число $M > 0$ такое, что для любых $k, n \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\left| \frac{\partial^{k+n}}{\partial x^k \partial t^n} h(x, t) \right| < M, \quad h(x, t) \in C^\infty(0, +\infty) \times [0, T];$$

2) существует число $M > 0$ такое, что для любых $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка $|f^{(k)}(x)| < M$, $f(x) \in C^\infty(0, +\infty)$.

Классическим решением задачи (1) называется функция $u(x, t, \varepsilon)$, имеющая непрерывные производные $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$ в области $Q_T = \{(x, t) : x \in (0, +\infty), t \in (0, T)\}$, непрерывная в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению и начальным условиям при $t = 0$. Решение задачи (1) изучается при стремлении параметра $\varepsilon \rightarrow +0$, где ε принадлежит некоторой окрестности нуля, т.е. $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Замечание 1. Условия 1) и 2) избыточны для существования решения задачи (1). Они достаточны для построения регуляризованного асимптотического ряда для решения сингулярно возмущённой задачи (1).

Задача (1) относится к классической задаче с “сильной” точкой поворота. Действительно, если перевести уравнение в систему, предварительно сделав замену

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} = x^2 u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - h(x, t),$$

то получим

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial/\partial t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix},$$

где матрица предельного оператора имеет вид

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что при $x \neq 0$ матрица диагонализируемая, и $e_1(x) = (1, x)^T$, $e_2(x) = (1, -x)^T$ – базис из собственных векторов. При $x = 0$ матрица принимает жорданову форму и базисом являются векторы $e_1(0) = (1, 0)^T$, $e_2(0) = (0, 1)^T$. Базис разрывен в точке $x = 0$. В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, используя каноническую форму оператора, зависящего от переменной x , к которой можно привести с помощью гладких преобразований [7]. В данном случае предельный оператор уже имеет каноническую форму, поэтому в построении базиса и канонической формы нет необходимости. Кроме того, оператор $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим, что приводит к построению дополнительных сингулярных операторов σ_0 , σ_1 , описывающих сингулярную зависимость решения неоднородных задач от параметра ε . Это связано с тем, что образ оператора $A(x)$ есть не всё пространство непрерывных функций, а подпространство, элементы которого обращаются в нуль, второго порядка в точке $x = 0$.

2. Формализм метода регуляризации. Регуляризирующую функцию будем искать в виде $e^{-\varphi(x, t)/\varepsilon}$. Сделав замену $u(x, t) = e^{-\varphi(x, t)/\varepsilon} v(x, t)$ в однородном уравнении задачи (1), получим

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - x^2\right)v(x, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} v(x, t) + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}\right) - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Выберем регуляризующую функцию как решение задачи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - x^2 = 0, \quad \varphi(x, 0) = 0.$$

Начальное условие для функции $\varphi(x, t)$ выбрано так, чтобы в дальнейшем для $v(x, t, \varepsilon)$ оно не содержало сингулярной зависимости от ε . Кроме того, при таком выборе начальное условие для $v(x, t, \varepsilon)$ наследует начальное условие задачи (1).

Введём обозначения $p = \partial \varphi / \partial t$, $q = \partial \varphi / \partial x$, получим систему уравнений

$$p + q^2 = x^2, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + 2q \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} + 2q \frac{\partial q}{\partial x} = 2x,$$

$$\varphi(x, 0) = 0, \quad q(x, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 0) = 0.$$

Запишем уравнения характеристик

$$dt = \frac{dx}{2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{p + 2q^2}.$$

Параметризуем ось Ox , $x = s$. Тогда $p = s^2$, $q^2 = x^2 - s^2$. Последовательно получаем серию решений

$$2t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - s^2}}{s}, \quad \varphi = \frac{x\sqrt{x^2 - s^2}}{2}.$$

Из первого выражения находим параметр $s = x / \operatorname{ch}(2t)$. Подставив его во второе выражение, имеем

$$\varphi(x, t) = \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2}.$$

Отсюда запишем регуляризующую функцию в виде

$$\exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right).$$

Дополнительные регуляризующие сингулярные операторы, связанные с точечной необратимостью предельного оператора, строятся с помощью фундаментального решения [8]. Их задача – вложить правую часть уравнения в образ предельного оператора. Предельный оператор получается, если положить в уравнении задачи (1) $\varepsilon = 0$. Фундаментальное решение (в литературе называется *ядро Мелера*) уравнения (1), согласно работе [8], имеет вид

$$K(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \exp\left(-\operatorname{cth}(2t) \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} + \frac{x\xi}{\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}\right)$$

и обладает свойством $K(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi)$. Так как работа [8] труднодоступна, получим фундаментальное решение с помощью преобразования Фурье (см. п. 4).

Проинтегрировав ядро Мелера по переменной ξ , получим дополнительные регуляризующие сингулярные операторы

$$\sigma_0(x, t, \varepsilon)(\cdot) = \int_0^t (\cdot) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi, t - \tau) d\xi = \int_0^t (\cdot) \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t - \tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t - \tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau,$$

$$\sigma_1(x, t, \varepsilon)(\cdot) = \int_0^t (\cdot) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \xi K(x, \xi, t - \tau) d\xi = x \int_0^t (\cdot) \frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t - \tau))})^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t - \tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau.$$

Фактически сингулярные операторы $\sigma_0(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, $\sigma_1(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ являются решениями уравнения теплопроводности с правыми частями ε , εx . Действия операторов на функцию запишутся как

$$\sigma_0(f(t)) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau = f(t) * \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(f(t)) &= x \int_0^t \frac{f(\tau)}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau = \\ &= x f(t) * \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Введём оператор $T_\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$. Тогда

$$T_\varepsilon(\sigma_0(f(t))) = \varepsilon f(t) + f(t) * T_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) = \varepsilon f(t),$$

$$T_\varepsilon(\sigma_1(f(t))) = \varepsilon x f(t) + f(t) * T_\varepsilon \left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) = \varepsilon x f(t).$$

Замечание 2. Доказательство того, что

$$T_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) = 0, \quad T_\varepsilon \left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) = 0,$$

приведено в приложении 2.

Дополнительный сингулярный интегральный оператор для описания параболического пограничного слоя в точке $x = 0$ находится из решения задачи

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 1.$$

Граничный оператор в результате решения имеет вид

$$G(\Psi) = \int_0^t \Psi(\tau) W(x, t - \tau, \varepsilon) d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)})}^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}} \Psi\left(t - \frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{2b}{1-b}\right)\right) e^{-z^2} dz,$$

где

$$W(x, t, \varepsilon) = \frac{4x}{\sqrt{\varepsilon\pi} \sqrt{2 \operatorname{sh}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{cth}(2t)}{2\varepsilon}\right), \quad b = \frac{x^2}{2\varepsilon z^2}.$$

Отметим свойства оператора G :

$$T_\varepsilon G(\Psi) = 0, \quad G(\Psi)|_{x=0} = \Psi(t).$$

Регуляризованное решение задачи (1) ищем в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = v(x, t, \varepsilon) \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) + G(\Psi(t, \varepsilon)) + \sigma_0(y(t, \varepsilon)) + \sigma_1(z(t, \varepsilon)) + w(x, t, \varepsilon). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1) и выделив слагаемые при регуляризующих функциях, получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + 2x \operatorname{th}(2t) \frac{\partial v}{\partial x} + \operatorname{th}(2t)v &= \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \Psi(t, \varepsilon) * T_\varepsilon W(t, \varepsilon) = 0, \\ y(t, \varepsilon) * T_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) &= 0, \quad z(t, \varepsilon) * T_\varepsilon \left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) = 0, \\ x^2 w &= h(x, t) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varepsilon y(t, \varepsilon) - \varepsilon x z(t, \varepsilon), \quad v(x, 0) + w(x, 0) = f(x), \\ v(0, t, \varepsilon) + \Psi(t, \varepsilon) + \int_0^t \frac{y(s, \varepsilon)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-s))}} ds + w(0, t, \varepsilon) &= \psi(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Разложив функции $v(x, t, \varepsilon)$, $\Psi(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$, $z(t, \varepsilon)$, $w(x, t, \varepsilon)$ из (2) по степеням ε :

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k (v_k(x, t)) e^{-\varphi(x, t)/\varepsilon} + G(\Psi_k(t)) + \sigma_0(y_k(t)) + \sigma_1(z_k(t)) + w_k(x, t),$$

получим из системы (3) серию итерационных задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial t} + 2x \operatorname{th}(2t) \frac{\partial v_k}{\partial x} + \operatorname{th}(2t)v_k &= \frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x^2}, \quad \Psi_k(t) * T_\varepsilon W(t, \varepsilon) = 0, \\ y_k(t) * T_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) &= 0, \quad z_k(t) * T_\varepsilon \left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) = 0, \\ x^2 w_k &= h(x, t) \delta_0^k - \frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2} - y_{k-1}(t) - x z_{k-1}(t), \\ v_k(x, 0) + w_k(x, 0) &= f(x) \delta_k^0, \\ v_k(0, t) + \Psi_k(t) + \int_0^t \frac{y_k(s)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-s))}} ds + w_k(0, t) &= \delta_k^0 \psi(t), \quad k = \overline{-1, \infty}. \end{aligned}$$

Здесь δ_k^0 – символ Кронекера: $\delta_0^0 = 1$, $\delta_k^0 = 0$ при $k \neq 0$.

Замечание 3. Разложение по ε начинается со степени -1 , так как правая часть уравнения в общем случае не принадлежит образу предельного оператора умножения на функцию x^2 .

Система на итерационном шаге $k = -1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{-1}}{\partial t} + 2x \operatorname{th}(2t) \frac{\partial v_{-1}}{\partial x} + \operatorname{th}(2t)v_{-1} &= 0, \quad \Psi_{-1}(t) * T_\varepsilon W(t, \varepsilon) = 0, \\ y_{-1}(t) * T_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) &= 0, \\ z_{-1}(t) * T_\varepsilon \left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) &= 0, \\ x^2 w_{-1} &= 0, \quad v_{-1}(x, 0) + w_{-1}(x, 0) = 0, \\ v_{-1}(0, t) + \Psi_{-1}(t) + \int_0^t \frac{y_{-1}(s)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-s))}} ds + w_{-1}(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Решения на итерационном шаге $k-1$ будут $v_{-1}(x, t) \equiv 0$, $w_{-1}(x, t) \equiv 0$, а $\Psi_{-1}(t)$, $y_{-1}(t)$, $z_{-1}(t)$ – произвольные функции. Для их определения рассмотрим итерационную задачу на шаге $k=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} + 2x \operatorname{th}(2t) \frac{\partial v_0}{\partial x} + \operatorname{th}(2t)v_0 &= 0, \quad \Psi_0(t) * T_\varepsilon W(t, \varepsilon) = 0, \\ y_0(t) * T_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) &= 0, \quad z_0(t) * T_\varepsilon \left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) = 0, \\ x^2 w_0 &= h(x, t) - y_{-1}(t) - x z_{-1}(t), \quad v_0(x, 0) + w_0(x, 0) = f(x), \\ v_0(0, t) + \Psi_0(t) + \int_0^t \frac{y_0(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} d\tau + w_0(0, t) &= \psi(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Функции $y_0(t)$, $z_0(t)$ на данном шаге произвольны. Для разрешимости уравнения относительно $w_0(x, t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения $y_{-1}(t) = h(0, t)$, $z_{-1}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(0, t)$. Отсюда имеем

$$w_0(x, t) = \frac{1}{x^2} \left(h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) \right) = h_0(x, t),$$

где $h_0(x, t)$ – гладкая функция. Определив $y_{-1}(t)$, найдём функцию $\Psi_{-1}(t)$ из граничного условия:

$$\Psi_{-1}(t) = - \int_0^t \frac{h(0, \tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} d\tau.$$

Теперь можем записать решение на итерационном шаге $k=-1$:

$$\begin{aligned} u_{-1}(x, t) &= G(\Psi_{-1}(t)) + \int_0^t \frac{h(0, \tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau + \\ &+ x \int_0^t \frac{\partial h(0, \tau)}{\partial x} \frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau. \end{aligned}$$

Для решения уравнения относительно $v_0(x, t)$ сделаем замену $v_0(x, t) = \alpha(x, t)/\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}$. Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2x \operatorname{th}(2t) \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Запишем уравнение характеристик

$$dt = \frac{dx}{2x \operatorname{th}(2t)} = \frac{d\alpha}{0}.$$

Первый интеграл соответственно равен $x/\operatorname{ch}(2t) = c_1$. Отсюда получим общее решение

$$\alpha(x, t) = g_0(x/\operatorname{ch}(2t)),$$

где функция $g_0(x, t)$ определяется из начальных условий. Таким образом, общее решение $v_0(x, t)$ имеет вид

$$v_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} g_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right).$$

Из начального условия определим произвольную функцию $g_0(x, t)$. При $t = 0$ имеем

$$g_0(x) + h_0(x, 0) = f(x).$$

Отсюда $g_0(x) = f(x) - h_0(x, 0)$ (здесь учитывается, что $\Psi_0(0) = 0$). Или в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} g_0(x, t) &= f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) - h_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}, 0\right) = \\ &= f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) - \left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)^{-2} \left(h\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}, 0\right) - h(0, 0) - \frac{x}{\operatorname{ch}(2t)} \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)\right). \end{aligned}$$

Для определения произвольных функций $y_0(t)$, $z_0(t)$ рассмотрим задачу на итерационном шаге $k = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + 2x \operatorname{th}(2t) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \operatorname{th}(2t) v_1 &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}, \quad \Psi_1(t) * T_\varepsilon W(t, \varepsilon) = 0, \\ y_1(t) * T_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) &= 0, \quad z_1(t) * T_\varepsilon \left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) \right) = 0, \\ x^2 w_1 &= -\frac{\partial h_0}{\partial t}(x, t) - y_0(t) - x z_0(t), \quad v_1(x, 0) + w_1(x, 0) = 0, \\ v_1(0, t) + \Psi_1(t) + \int_0^t \frac{y_1(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} d\tau + w_1(0, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения $w_1(x, t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$y_0(t) = -\frac{\partial h_0}{\partial t}(0, t), \quad z_0(t) = -\frac{\partial^2 h_0}{\partial x \partial t}(0, t).$$

Теперь из граничного условия задачи (4) определим функцию $\Psi_0(t)$. Для этого рассмотрим граничное условие при $x = 0$:

$$\Psi_0(t) = \psi(t) - v_0(0, t) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \frac{\partial h_0}{\partial \tau}(0, \tau) d\tau - w_0(0, t).$$

Таким образом, на данном шаге найдено слагаемое на нулевом шаге, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \left[f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) - h_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}, 0\right) \right] \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) + G(\Psi_0(t)) - \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial h_0(0, \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau - \\ &\quad - x \int_0^t \frac{\partial^2 h_0}{\partial \tau \partial x}(0, \tau) \frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau + \frac{1}{x^2} \left(h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) \right). \end{aligned}$$

Теперь можно записать главный член асимптотики

$$u_{gl}(x, t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[G(\Psi_{-1}(t)) + \int_0^t \frac{h(0, \tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + x \int_0^t \frac{\partial h(0, \tau)}{\partial x} \frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau)))^3}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau \Big] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \left[f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) - h_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}, 0\right) \right] \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) + G(\Psi_0(t)) - \\
& - \int_0^t \frac{\partial h_0(0, \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau - \\
& - x \int_0^t \frac{\partial^2 h_0}{\partial \tau \partial x}(0, \tau) \frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau)))^3}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau + \frac{1}{x^2} \left(h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) \right).
\end{aligned}$$

Для практического использования можно воспользоваться леммой 1 (см. п. 3). Тогда формула главного члена упрощается:

$$\begin{aligned}
u_{gl}(x, t) = & \frac{1}{\varepsilon} \left[\Psi_{-1}(t) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}\right) + \int_0^t \frac{h(0, \tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau + \right. \\
& + x \int_0^t \frac{\partial h(0, \tau)}{\partial x} \frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau)))^3}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau \Big] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \left[f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) - h_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}, 0\right) \right] \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) + \\
& + \Psi_0(t) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}\right) - \int_0^t \frac{\partial h_0(0, \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau - \\
& - x \int_0^t \frac{\partial^2 h_0}{\partial \tau \partial x}(0, \tau) \frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau)))^3}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau + \\
& + \frac{1}{x^2} \left(h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) \right) + O(\varepsilon^\infty).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

а символом $O(\varepsilon^\infty)$ в асимптотическом анализе обозначается асимптотический нуль, т.е. слагаемые, убывающие быстрее любой степени ε .

Теперь можно записать решение $w_1(x, t)$ системы (5):

$$w_1(x, t) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial h_0}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial h_0}{\partial t}(0, t) - x \frac{\partial^2 h_0}{\partial t \partial x}(0, t) \right) = h_1(x, t),$$

где $h_1(x, t)$ — гладкая функция.

Решим неоднородное относительно $v_1(x, t)$ уравнение

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + 2x \operatorname{th}(2t) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \operatorname{th}(2t) v_1 = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}.$$

Сделав замену $v_1(x, t) = \alpha(x, t)/\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}$ и вычислив $\partial^2 v_0/\partial x^2$, получим уравнение

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2x \operatorname{th}(2t) \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} = \frac{g_0''(x/\operatorname{ch}(2t))}{\operatorname{ch}^2(2t)}.$$

Запишем уравнение характеристик

$$dt = \frac{dx}{2x \operatorname{th}(2t)} = \frac{\operatorname{ch}^2(2t)d\alpha}{g_0''(x/\operatorname{ch}(2t))}.$$

Первые интегралы соответственно равны

$$\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)} = c_1, \quad \alpha(x, t) - \frac{1}{2} \operatorname{th}(2t) g_0''(c_1) = c_2.$$

Отсюда получим общее решение

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{th}(2t) g_0''\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) + g_1\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right),$$

где функция g_1 определяется из начальных условий. Таким образом, решение $v_1(x, t)$ имеет вид

$$v_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \left[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2} g_0''\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) + g_1\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) \right].$$

Определим функцию $g_1(x/\operatorname{ch}(2t))$. Воспользуемся начальным условием $g_1(x) = -h_1(x, 0)$. Следовательно,

$$v_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \left[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2} g_0''\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) - h_1\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}, 0\right) \right].$$

Функции $y_1(t)$, $z_1(t)$ находятся на следующем итерационном шаге из условия разрешимости уравнения относительно $w_2(x, t)$:

$$y_1(t) = -\frac{\partial h_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(0, t), \quad z_1(t) = -\frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial x}(0, t) + \frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}(0, t).$$

Таким образом, найдено слагаемое на шаге ε , которое можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) = & \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \left[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2} g_0''\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) + g_1\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right) \right] \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) + \\ & + G(\Psi_1(t)) - \int_0^t \frac{\frac{\partial h_1}{\partial \tau}(0, \tau) - \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(0, \tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau - \\ & - x \int_0^t \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial \tau \partial x}(0, \tau) - \frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}(0, \tau) \right) \frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau - \\ & - \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial h_0}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial h_0}{\partial t}(0, t) - x \frac{\partial^2 h_0}{\partial t \partial x}(0, t) \right). \end{aligned}$$

По этой схеме (по индукции) находятся следующие слагаемые асимптотического ряда.

3. Оценка остаточного члена. Пусть решены $N+1$ итерационных задач. Тогда решение задачи Коши можно представить в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^N \varepsilon^k u_k(x, t) + \varepsilon^{N+1} R_N(x, t, \varepsilon), \quad (6)$$

где $R_N(x, t, \varepsilon)$ – остаток, и слагаемые

$$u_k = v_k(x, t) e^{-\varphi(x, t)/\varepsilon} + G(\Psi_k(t)) + \sigma_0(y_k(t)) + \sigma_1(z_k(t)) + w_k(x, t).$$

Подставив (6) в (1), получим задачу для остатка $R_N(x, t, \varepsilon)$:

$$\varepsilon \frac{\partial R_N}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + x^2 R_N = H(x, t, \varepsilon), \quad R_N(0, t, \varepsilon) = 0, \quad R_N(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad (7)$$

где

$$H(x, t, \varepsilon) = x^2 w_{N+1}(x, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v_N(x, t)}{\partial x^2} e^{-\varphi(x, t)/\varepsilon} + \frac{\partial^2 w_N(x, t)}{\partial x^2} \right).$$

Заметим, что так как итерационные задачи решены вплоть до ε^{N+1} , то слагаемое

$$x^2 w_{N+1}(x, t) = O(x)$$

(см. приложение 3).

Теорема (оценка остаточного члена). Пусть выполнены требования:

1) условия 1) и 2) для задачи (1);

2) $H(x, t, \varepsilon) = O(x)$ при любых $(x, t) \in [0, +\infty) \times [0, T]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Тогда существует $C > 0$ такое, что $|R_N(x, t, \varepsilon)| \leq C$ при всех $(x, t) \in [0, +\infty) \times [0, T]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доказательство. Продолжим правую часть $H(x, t, \varepsilon)$ и начальное условие нулями на отрицательную полуось Ox . Используя фундаментальное решение Мелера, запишем решение задачи (7) в виде

$$R_N(x, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi, \tau, \varepsilon) K(x, \xi, t - \tau) d\xi.$$

Оценим с учётом условия 2) остаток по модулю:

$$\begin{aligned} |R_N(x, t, \varepsilon)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\xi, \tau, \varepsilon)| K(x, \xi, t - \tau) d\xi \leq \frac{C_1}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \xi K(x, \xi, t - \tau) d\xi \leq \\ &\leq \frac{C_1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\frac{\sqrt{\operatorname{sh}(2(t - \tau))}}{\operatorname{ch}(2(t - \tau))} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{cth}(2(t - \tau))}{2\varepsilon}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t - \tau))})^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t - \tau))}{2\varepsilon}\right) \right) d\tau \leq \frac{C_2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Запишем остаточный член в виде $R_N = u_{N+1} + \varepsilon R_{N+1}$. Тогда $|R_N| \leq |u_{N+1}| + \varepsilon C_2/\varepsilon \leq C$.

Лемма 1. Справедлива формула

$$G(\Psi(t)) = \Psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} e^{-z^2} dz + O(\varepsilon^\infty), \quad \delta > 0, \quad x \in [\delta, +\infty), \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Представим функцию в виде

$$G(\psi(t)) = \psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} e^{-z^2} dz + \psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}} - 1 \right) e^{-z^2} dz + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}} \left(\psi \left(t - \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{2b}{1-b} \right) \right) - \psi(t) \right) e^{-z^2} dz.$$

Оценим второе слагаемое

$$\left| \psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}} - 1 \right) e^{-z^2} dz \right| \leqslant \\ \leqslant M \left| \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1-\operatorname{th}^2(2t)}} - 1 \right) e^{-z^2} dz \right| \leqslant M_1 \exp \left(-\frac{x^2}{4\varepsilon \operatorname{th}(2t)} \right) = O(\varepsilon^\infty)$$

и третье слагаемое (в силу непрерывности $\psi(t)$ на $[0, T]$)

$$\left| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} \frac{\left(\psi \left(t - \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{2b}{1-b} \right) \right) - \psi(t) \right) e^{-z^2}}{\sqrt[4]{1-b^2}} dz \right| \leqslant \\ \leqslant 2M \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}} e^{-z^2} dz \leqslant M_2 \exp \left(-\frac{x^2}{4\varepsilon \operatorname{th}(2t)} \right) = O(\varepsilon^\infty).$$

Складывая эти оценки, получаем выражение

$$G(\Psi(t)) = \Psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} e^{-z^2} dz + O(\varepsilon^\infty), \quad \delta > 0, \quad x \in [\delta, +\infty), \quad t \in [0, T].$$

Функция $(2/\sqrt{\pi}) \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} e^{-z^2} dz$ имеет обозначение $\operatorname{erfc}(x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)})$. Тогда $G(\Psi(t))$ можно записать в виде

$$G(\Psi(t)) = \Psi(t) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}} \right) + O(\varepsilon^\infty).$$

4. Фундаментальное решение Мелера. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u = 0, \quad u(x, 0) = \delta(x - \xi).$$

Сделав замену $u(x, t) = e^{-x^2/(2\varepsilon) - t} v(x, t)$, запишем её как

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2x \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v(x, 0) = e^{\xi^2/(2\varepsilon)} \delta(x - \xi).$$

Применим в этой задаче преобразование Фурье $F(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) e^{-i\lambda x} dx$ и получим относительно F задачу

$$\frac{\partial F}{\partial t} - 2\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} = (-\varepsilon\lambda^2 + 2)F, \quad F(\lambda, 0) = e^{\xi^2/(2\varepsilon) - i\lambda\xi},$$

решение которой имеет вид

$$F(\lambda, t) = \exp\left(2t + \frac{\xi^2}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon\lambda^2}{4} - i\lambda\xi e^{2t}\right).$$

После обратного преобразования Фурье с учётом замены $u(x, t) = v(x, t) e^{-x^2/(2\varepsilon) - t}$ найдём решение исходной задачи

$$u(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2 - \xi^2}{2\varepsilon} + t\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{\varepsilon\lambda^2}{4}(e^{4t} - 1) - i\lambda(\xi e^{2t} - x)\right) d\lambda.$$

Выделив полный квадрат в показателе экспоненты и вычислив интеграл Пуассона, окончательно получим

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \exp\left[-\operatorname{cth}(2t) \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} + \frac{x\xi}{\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}\right].$$

5. Построение граничного оператора. Решим смешанную задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 1.$$

Сделаем замену $u(x, t) = e^{-x^2/(2\varepsilon)} v(x, t)$ и в результате получим задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2x \frac{\partial v}{\partial x} + v = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 1.$$

Проведём синус-преобразование. Тогда будем иметь в пространстве образов задачу для линейного относительно F уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} - 2\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} = (-\varepsilon\lambda^2 + 1)F + \varepsilon\lambda, \quad F(\lambda, 0) = 0, \quad (8)$$

где введено обозначение

$$F(\lambda, t) = \int_0^{\infty} v(x, t) \sin(\lambda x) dx.$$

Запишем характеристическую систему для линейного уравнения в задаче (8):

$$dt = \frac{d\lambda}{-2\lambda} = \frac{dF}{(-\varepsilon\lambda^2 + 1)F + \varepsilon\lambda}.$$

Система первых интегралов для неё имеет вид

$$\lambda e^{2t} = C_1, \quad e^{-\varepsilon^2\lambda^2/4} \sqrt{\lambda} F - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\varepsilon\mu^2/4} \sqrt{\mu} d\mu = C_2.$$

Теперь несложно, учитывая начальное условие, получить решение исходной задачи в пространстве образов:

$$F(\lambda, t) = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\lambda}^{\lambda e^{2t}} e^{\varepsilon(\lambda^2 - \mu^2)/4} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} d\mu.$$

Замена переменной $\mu = \lambda e^{2(t-\tau)}$ в последнем интеграле приведёт к более удобному в дальнейшем соотношению

$$F(\lambda, t) = \varepsilon \int_0^t \exp\left(-\frac{\varepsilon}{4} \lambda^2 (e^{4(t-\tau)} - 1) + 3(t-\tau)\right) d\tau.$$

Осталось осуществить обратное синус-преобразование Фурье, что в итоге позволит получить решение интересующей нас задачи:

$$v(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda, t) \sin(\lambda x) d\lambda = \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^t \exp\left(-\frac{\varepsilon}{4} \lambda^2 (e^{4(t-\tau)} - 1) + 3(t-\tau)\right) d\tau \right) \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Поменяв порядок интегрирования (что возможно в силу равномерной сходимости несобственного интеграла) и проделав несложные преобразования, получим

$$v(x, t) = \frac{4x}{\varepsilon\pi} \int_0^t \frac{e^{-x^2/(\varepsilon a)}}{\sqrt{2 \operatorname{sh}(2(t-\tau))}^3} d\tau,$$

где $a = e^{4(t-\tau)} - 1$. Отсюда найдём

$$u(x, t) = \frac{4x}{\varepsilon\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sh}(2(t-\tau))}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{cth}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau.$$

Решение для произвольного граничного условия $\psi(t)$ запишется в виде

$$u(x, t) = \frac{4x}{\varepsilon\pi} \int_0^t \psi(\tau) \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sh}(2(t-\tau))}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{cth}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau. \quad (9)$$

Дадим другое представление решения (9), предварительно сделав замену переменных $z^2 = x^2(2\varepsilon)^{-1} \operatorname{cth}(2(t-\tau))$:

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}} \psi\left(t - \frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{2b}{1-b}\right)\right) e^{-z^2} dz, \quad b = \frac{x^2}{2\varepsilon z^2}.$$

Заключение. Как уже было отмечено ранее, основной проблемой применения метода регуляризации С.А. Ломова является поиск регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра – достаточно трудная задача. В предложенной работе для смешанной задачи на полуоси для неоднородного параболического уравнения со спектральной особенностью в виде “сильной” точки поворота задача построения регуляризованной асимптотики, как выяснилось, состоит из трёх частей:

- 1) описание пограничного слоя, обусловленного точкой $t = 0$;
- 2) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора;
- 3) описание пограничного слоя, обусловленного точкой $x = 0$.

В данной статье описанные проблемы разрешены путём введения регуляризирующей функции и трёх дополнительных сингулярных операторов. Тем самым основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи преодолены, что подтверждается результатами наших исследований.

Приложение 1. Покажем, что функция

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp\left(-\operatorname{cth}(2t) \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} + \frac{x\xi}{\varepsilon \operatorname{sh} 2t}\right) f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x \operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)} + \frac{\xi^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right] f(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(x)$ – непрерывная ограниченная функция, удовлетворяет задаче

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Заметим, что интеграл (10) сходится равномерно в области $\{(x, t) : x \in (0, +\infty), t \in [0, T]\}$. Действительно,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x \operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)} + \frac{\xi^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right] |f(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x \operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)}\right)\right] |f(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} |f(x \operatorname{ch}(2t) + z\sqrt{2\varepsilon \operatorname{sh}(2t)})| dz \leq M, \end{aligned}$$

так как $(\xi - x \operatorname{ch}(2t))/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{sh}(2t)} = z$, $d\xi = \sqrt{2\varepsilon \operatorname{sh}(2t)} dz$.

Шаг 1. Формальное дифференцирование и подстановка формальных производных в уравнение. Найдём формально (т.е. не задумываясь над правомочностью этих действий) производные от функции $u(x, t)$, входящие в уравнение. Затем проверим, что полученный интеграл удовлетворяет однородному уравнению в задаче (1).

Вычислим входящие в уравнение частные производные

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp(\dots) \left(-\varepsilon \operatorname{cth}(2t) + \frac{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \operatorname{ch}(2t)}{\operatorname{sh}^2(2t)}\right) f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp(\dots) \left(-\varepsilon \operatorname{cth}(2t) - x^2 + \frac{(x \operatorname{ch}(2t) - \xi)^2}{\operatorname{sh}^2(2t)}\right) f(\xi) d\xi, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp(\dots) \left(-\varepsilon \operatorname{ch}(2t) + \frac{x^2 \operatorname{ch}^2(2t) - 2x\xi \operatorname{ch}(2t) + \xi^2}{\operatorname{sh}^2(2t)}\right) f(\xi) d\xi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp(\dots) \left(-\varepsilon \operatorname{ch}(2t) + \frac{(x \operatorname{ch}(2t) - \xi)^2}{\operatorname{sh}^2(2t)} \right) f(\xi) d\xi.$$

Здесь многоточием обозначен показатель экспоненты фундаментального решения.

Подставив вычисленные производные u_t , u_{xx} в уравнение, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp(\dots) \left[-\varepsilon \operatorname{cth}(2t) - x^2 + \frac{(x \operatorname{ch}(2t) - \xi)^2}{\operatorname{sh}^2(2t)} + \right. \\ & \left. + \varepsilon \operatorname{ch}(2t) - \frac{(x \operatorname{ch}(2t) - \xi)^2}{\operatorname{sh}^2(2t)} + x^2 \right] f(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Шаг 2. Обоснование правомочности формальных действий. Для того чтобы показать, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению, нужно обосновать возможность дифференцирования по x и t под знаком интеграла при $t > 0$, $0 < x < +\infty$. Докажем этот факт при $t > t_0 > 0$, откуда в силу произвольности t_0 этот факт будет иметь место при $t > 0$. Заметим, что если $u(x, t)$ дифференцировать по x и t произвольное число раз, то будет выделяться множитель $(\xi - x \operatorname{ch}(2t))$ в положительной степени, а множитель $\operatorname{sh}(2t)$ – в отрицательной степени. Таким образом, вопрос сводится к равномерной сходимости интеграла

$$J = (\operatorname{sh}(2t))^{-k} 2t \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{(\xi - x \operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)} + \frac{\xi^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \right] (\xi - x \operatorname{ch}(2t))^m f(\xi) d\xi.$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} |J| & \leq (\operatorname{sh}(2t))^{-k} \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{(\xi - x \operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)} + \frac{\xi^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \right] |\xi - x \operatorname{ch}(2t)|^m |f(\xi)| d\xi \leq \\ & \leq (\operatorname{sh}(2t))^{-k} \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{(\xi - x \operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)} \right) \right] |\xi - x \operatorname{ch}(2t)|^m |f(\xi)| d\xi \leq \\ & \leq (\operatorname{sh}(2t))^{-k+(m+1)/2} \int_{-\infty}^\infty \exp \left(-\frac{z^2}{2\varepsilon} \right) z^m |f(\sqrt{\operatorname{sh}(2t)}z + x \operatorname{ch}(2t))| dz, \end{aligned}$$

где $(\xi - x \operatorname{ch}(2t))/\sqrt{\operatorname{sh}(2t)} = z$, $d\xi = \sqrt{\operatorname{sh}(2t)} dz$.

Учитывая, что $|f(x)| \leq M$, получаем

$$e^{-z^2/(2\varepsilon)} z^m |f(\sqrt{\operatorname{sh}(2t)}z + x \operatorname{ch}(2t))| \leq M e^{-z^2/(2\varepsilon)} z^m.$$

Но функция $e^{-z^2/(2\varepsilon)} z^m$ интегрируема на промежутке $(0, +\infty)$, поэтому интеграл J равномерно сходится при $0 < t_0 \leq t \leq T$. Отсюда следует, что функция $u(x, t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка по x и t при $t > 0$. Кроме того, поскольку все интегралы, участвующие в наших формальных операциях, являются равномерно сходящимися по параметрам x , t в любом замкнутом прямоугольнике $(x, t) \in [0, L] \times [t_0, T]$, $t_0 > 0$, то их можно в этом прямоугольнике дифференцировать по x и t сколь угодно раз.

Шаг 3. Начальное условие. Функция $u(x, t)$ не определена при $t = 0$. Однако её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, т.е. считать равной в момент

$t = 0$ её пределу при $t \rightarrow +0$. Так как интеграл (10) сходится равномерно на множестве $(0, +\infty) \times [0, T]$, то возможен переход к пределу под знаком интеграла, т.е.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{(\xi - x \operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)} + \frac{\xi^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \right] f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x \operatorname{ch}(2t)/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}}^\infty \lim_{t \rightarrow +0} \exp \left(- \frac{z^2}{\operatorname{ch}(2t)} \right) f(x \operatorname{ch}(2t) + z\sqrt{2\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}) dz = f(x), \end{aligned}$$

здесь $(\xi - x \operatorname{ch}(2t))/\sqrt{2\varepsilon \operatorname{sh}(2t)} = z$, $d\xi = \sqrt{2\varepsilon \operatorname{sh}(2t)} dz$.

Таким образом, функция $u(x, t)$ действительно является решением задачи.

Приложение 2. Докажем, что

$$T_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp \left(- \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \right) = 0,$$

где $T_\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$.

Найдём производные

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp \left(- \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \right) &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp \left(- \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \left(- \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2(2t)} - \varepsilon \operatorname{th}(2t) \right), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp \left(- \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \right) &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp \left(- \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \left(x^2 \operatorname{th}^2(2t) - \varepsilon \operatorname{th}(2t) \right), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} T_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp \left(- \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp \left(- \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \left(- \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2(2t)} - \varepsilon \operatorname{th}(2t) - x^2 \operatorname{th}^2(2t) + \varepsilon \operatorname{th}(2t) + x^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$T_\varepsilon \left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp \left(- \frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon} \right) \right) = 0.$$

Приложение 3. Уравнение для определения частного решения w_0 имеет вид

$$x^2 w_0(x, t) = h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t).$$

Отсюда

$$w_0(x, t) = \frac{h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t)}{x^2} = h_0(x, t),$$

где $h_0(x, t)$ – гладкая функция. Проведём цепочку оценок.

$$1. |h_0(x, t)| = \left| 0,5 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi, t) \right| \leq 0,5M < M, \text{ где } M - \text{константа в задаче (1).}$$

2. $\left| \frac{\partial w_0}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial h_0}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{1}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(\xi_1, t) \right| \leq \frac{M}{6} < M$ и т.д., т.е. w_0 принадлежит классу ограниченных функций, для которых верна оценка $|w_0| \leq M$.

Отсюда следует, что и все частные решения w_k итерационных задач по индукции также принадлежат этому классу: так как

$$w_k = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2} - y_{k-1}(t) - x z_{k-1}(t) \right), \quad k \geq 1,$$

то все эти оценки верны для любых w_k .

Оценим

$$|x^2 w_0| = \left| h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) \right| \leq 2xM,$$

т.е. $x^2 w_0 = O(x)$. Аналогично и $x^2 w_k = O(x)$, $k \geq 1$.

Результаты Елисеева А.Г. (постановка задачи, вывод уравнений для регуляризирующих функций, сингулярных операторов для регуляризации правых частей итерационных задач, граничного оператора для описания пограничного слоя в окрестности точки $x = 0$) были получены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSWF-2023-0012).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
3. Eliseev A.G., Lomov S.A. Asymptotic integration of singularly perturbed problems // London Math. Soc. Russ. Math. Surveys. 1988. V. 43. P. 1–63.
4. Yeliseev A., Ratnikova T., Shaposhnikova D. Regularized asymptotics of the solution of the singularly perturbed first boundary value problem on the semiaxis for a parabolic equation with a rational “simple” turning point // Mathematics. 2021. № 9. Art. 405.
5. Елисеев А.Г., Кириченко П.В. Сингулярно возмущённая задача Коши при наличии “слабой” точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 733–746.
6. Елисеев А.Г. Пример решения сингулярно возмущённой задачи Коши для параболического уравнения при наличии “сильной” точки поворота // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2022. № 3. С. 46–59.
7. Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 2 (158). С. 101–114.
8. Mehler F.G. Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen honerer Ordnung // J. fur die Reine und Angewandte Mathematik. 1866. S. 161–176.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 31.01.2023 г.
После доработки 18.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.