

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.928.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ
С ВНУТРЕННИМ ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ УРАВНЕНИЯ
РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–АДВЕКЦИИ
С KPZ-НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 г. Н. Н. Нефедов, А. О. Орлов

Изучается краевая задача для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения реакции–диффузии–адвекции с содержащей градиент искомой функции в квадрате KPZ-нелинейностью. Рассматривается случай существования внутреннего переходного слоя в некритическом и критическом случаях. Строится асимптотическое приближение решения и определяется асимптотика для точки переходного слоя. Для доказательства теорем существования используется асимптотический метод дифференциальных неравенств. Асимптотическая устойчивость решений по Ляпунову доказывается с помощью метода сужающихся барьеров. Теоремы о неустойчивости доказываются с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений.

DOI: 10.31857/S0374064123080010, EDN: IMWTXB

1. Введение. Постановка задачи. В работах [1, 2] рассматривалась задача

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f\left(\varepsilon \frac{du}{dx}, u, x\right), \quad x \in (-1, 1), \quad u(\pm 1, \varepsilon) = u^{(\pm)} \quad (1)$$

и были получены условия, при которых её решения типа ступеньки существуют в некритическом и критическом случаях, а также условия существования контрастной структуры типа всплеска. Теоремы существования решений доказываются с использованием метода сшивания, широко применяемого в одномерных задачах, однако вопросы устойчивости не затрагиваются.

Периодические задачи для уравнения реакции–диффузии–адвекции, содержащего в правой части слабую адвекцию (слагаемое вида $\varepsilon A(u, x) \partial u / \partial x$), рассмотрены в работах [3–5]. В указанных статьях изучаются вопросы построения асимптотического приближения для контрастной структуры типа ступеньки, а также доказываются теоремы существования и асимптотической устойчивости по Ляпунову такого решения как решения соответствующей начально-краевой параболической задачи с использованием метода дифференциальных неравенств [6].

Отметим также недавние работы, посвящённые новому классу задач с разрывными адвективным и реактивным членами в одномерной и двумерной постановках [7–9].

В данной статье рассматривается краевая задача для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения реакции–диффузии–адвекции, являющаяся специальным случаем для приложений задачи (1), позволяющим получить конструктивные условия существования и асимптотической устойчивости по Ляпунову решения как стационарного решения соответствующей параболической задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = \varepsilon^2 A(u, x) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \quad u'(\pm 1, \varepsilon) = u^{(\pm)}, \quad (2)$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр.

Особенностью изучаемой задачи является слагаемое, содержащее градиент искомой функции в квадрате. Нелинейности такого типа носят название нелинейностей Кардари–Паризи–Жанга (KPZ-нелинейности) и широко используются при моделировании процессов популяционной динамики [10], роста свободной поверхности в теории полимеров, нелинейной теории

теплопроводности (см. [11, 12] и библиографию в них). Отметим также и несомненный теоретический интерес к данному уравнению: квадрат является максимальным (предельным) показателем степени, при котором условия Бернштейна на рост нелинейности выполнены (нелинейность принадлежит классу функций Нагумо (см. [13–15])).

Основной целью настоящей работы являются доказательство существования и исследование устойчивости решений с внутренним переходным слоем, как решений соответствующих начально-краевых параболических задач. Рассмотрены не критический и критический случаи.

Итак, пусть выполнены следующие условия.

Условие (A1). Функция $f(u, x, \varepsilon)$ определена на множестве $\overline{\Omega}_1 := (u, x, \varepsilon) \in I_u \times [-1, 1] \times (0, \varepsilon_0]$, а $A(u, x)$ – на множестве $\overline{\Omega}_2 := (u, x) \in I_u \times [-1, 1]$; обе являются достаточно гладкими функциями своих аргументов.

Условие (A2). Вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет ровно три корня $u = \varphi^{(\pm, 0)}(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x), x, 0) < 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Введём присоединённую систему уравнений

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \tilde{v}, \quad \frac{d\tilde{v}}{d\xi} = A(\tilde{u}, x) \left(\frac{d\tilde{u}}{d\xi} \right)^2 + f(\tilde{u}, x, 0), \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (3)$$

Условие (A2) означает, что на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$ присоединённой системы есть две точки покоя типа седло $(\varphi^{(\pm)}(x), 0)$. Существуют сепаратрисы $v^{(\pm)}(\tilde{u}, x)$, входящие, соответственно, в седла $(\varphi^{(\pm)}(x), 0)$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Выражения для этих сепаратрис имеют следующий вид:

$$\tilde{v}^{(\pm)}(\tilde{u}, x) = \left(\int_{\varphi^{(\pm)}(x)}^{\tilde{u}} 2f(s, x, 0) \exp \left(2 \int_s^{\tilde{u}} A(\sigma, x) d\sigma \right) ds \right)^{1/2}.$$

Введём также функцию

$$H(x) := \tilde{v}^{(+)}(\varphi^{(0)}(x), x) - \tilde{v}^{(-)}(\varphi^{(0)}(x), x), \quad x \in (-1, 1),$$

для которой справедливо представление

$$H(x) = -\frac{2}{\tilde{v}^{(-)}(0, x) + \tilde{v}^{(+)}(0, x)} \int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(s, x, 0) \exp \left(2 \int_s^{\varphi^{(0)}(x)} A(\sigma, x) d\sigma \right) ds, \quad x \in (-1, 1). \quad (4)$$

Определим положение точки переходного слоя условием пересечения решения и корня вырожденного уравнения $\varphi^{(0)}(x)$:

$$\varphi^{(0)}(x^*) = u(x^*, \varepsilon). \quad (5)$$

Рассмотрим решение, которое при $\varepsilon \rightarrow 0$ на части интервала $(-1, x^*(\varepsilon))$ стремится к корню $\varphi^{(-)}(x)$, а на другой части $(x^*(\varepsilon), 1)$ – к другому корню $\varphi^{(+)}(x)$. В окрестности точки $x^*(\varepsilon)$ возникает область быстрого изменения решения – *внутренний переходный слой*. Такие решения называются *контрастными структурами*. Положение точки переходного слоя $x^*(\varepsilon)$ заранее неизвестно. Будем искать её в виде ряда по степеням ε :

$$x^*(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (6)$$

Оказывается, что нахождение коэффициентов ряда (6) для точки перехода зависит существенным образом от свойств функции $H(x)$. В п. 3 мы рассмотрим не критический и критический случаи и подробно опишем процедуру нахождения коэффициентов x_i , $i \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$. Некритическому случаю отвечает

Условие (A3). Уравнение $H(x) = 0$ имеет решение $x = x_0$, причём $-1 < x_0 < 1$. Выполнено неравенство

$$\frac{dH}{dx}(x_0) > 0.$$

Критический случай имеет место, если выполнено

Условие (A3'). Справедливо тождество $H(x) \equiv 0$, $x \in (-1, 1)$.

В данной работе мы не будем уделять внимание описанию поведения решения вблизи граничных точек $x = \pm 1$. Отметим только, что в случае граничных условий Неймана вблизи граничных точек $x = \pm 1$ возникают слабые (порядка ε) пограничные слои.

Замечание 1. В случае граничных условий Дирихле необходимо сформулировать условие принадлежности граничных значений $u^{(\pm)}$ области влияния соответствующих корней вырожденного уравнения

$$\int_{\varphi^{(\pm)}(\pm 1)}^{\tilde{u}} f(s, \pm 1, 0) \exp\left(2 \int_s^{\tilde{u}} A(\sigma, \pm 1) d\sigma\right) ds > 0 \quad \text{для всех } \tilde{u} \in (\varphi^{(\pm)}(\pm 1), u^{(\pm)}].$$

2. Асимптотическое представление решения. Опишем построение формального асимптотического приближения решения краевой задачи (2) по методу А.Б. Васильевой.

Для построения формальной асимптотики задача (2) разбивается на две [6]. Слева от переходного слоя в области $-1 < x < x^*(\varepsilon)$ рассматривается задача

$$L_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - \varepsilon^2 A(u, x) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - f(u, x, \varepsilon) = 0, \quad -1 < x < x^*(\varepsilon),$$

$$u'(-1, \varepsilon) = u^{(-)}, \quad u(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x^*);$$

справа от переходного слоя в области $x^*(\varepsilon) < x < 1$ – задача

$$L_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - \varepsilon^2 A(u, x) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - f(u, x, \varepsilon) = 0, \quad x^*(\varepsilon) < x < 1,$$

$$u(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x^*), \quad u'(1, \varepsilon) = u^{(+)}.$$

Далее для функций асимптотики в области $-1 < x < x^*(\varepsilon)$ используем обозначение “ $(-)$ ”, в области $x^*(\varepsilon) < x < 1$ – “ $(+)$ ”, а индекс “ $(\pm)$ ” будем писать, подразумевая функции как для левой, так и для правой частей асимптотики. Построим асимптотику в виде ряда по степеням ε , не предполагая разложения в такой ряд функцию $x^*(\varepsilon)$, которую считаем известной:

$$U^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) + \Pi^{(\pm)}(\tau, \varepsilon), \quad (7)$$

здесь регулярная часть

$$\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \dots + \varepsilon^n \bar{u}_n^{(\pm)}(x) + \dots,$$

пограничная часть в окрестности $x = -1$ для $u^{(-)}$ и в окрестности $x = 1$ для $u^{(+)}$

$$\Pi^{(\pm)}(\tau, \varepsilon) = \Pi_0^{(\pm)}(\tau) + \varepsilon \Pi_1^{(\pm)}(\tau) + \dots + \varepsilon^n \Pi_n^{(\pm)}(\tau) + \dots,$$

где

$$\tau = \begin{cases} (x+1)/\varepsilon, & x \leq x^*(\varepsilon), \\ (x-1)/\varepsilon, & x > x^*(\varepsilon), \end{cases}$$

и часть внутреннего переходного слоя в окрестности точки $x^*(\varepsilon)$, $\xi = (x - x^*(\varepsilon))/\varepsilon$,

$$Q^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n Q_n^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) + \dots,$$

члены которой зависят не только от аргумента ξ , но и от ε . Отметим, что уравнения, из которых эти члены находятся, содержат функции, зависящие от $x^*(\varepsilon)$, что и объясняет наличие у членов Q_i аргумента ε . Для определённости рассматриваем переход от корня $\varphi^{(-)}$ к корню $\varphi^{(+)}$.

Метод пограничных функций [16] приводит к последовательности задач для определения коэффициентов асимптотических рядов (7), из которых, в частности, получим

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi^{(-)}(x), \quad \bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi^{(+)}(x).$$

Функции $\bar{u}_i^{(\pm)}(x)$, $i \in \mathbb{N}$, а также пограничные функции $\Pi_i^{(\pm)}(\tau)$, $i \in \mathbb{N}_0$, строятся стандартным образом [16, 17], и мы это построение здесь рассматривать не будем.

Рассмотрим подробно построение функций внутреннего переходного слоя.

Члены $Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$ определяются из задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi^2} - A(\varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}, x^*) \left(\frac{\partial Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi} \right)^2 &= f(\varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}, x^*, 0), \\ Q_0^{(\pm)}(0, \varepsilon) + \bar{u}_0^{(\pm)}(x^*) &= \varphi^{(0)}(x^*), \quad Q_0^{(\pm)}(\pm\infty, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Положим

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) := \varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon), \quad \tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) := \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi}.$$

В этих обозначениях задачи (8) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - A(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*) \left(\frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} \right)^2 &= f(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*, 0), \\ \tilde{u}^{(\pm)}(0, \varepsilon) &= \varphi^{(0)}(x^*), \quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, \varepsilon) = \varphi^{(\pm)}(x^*). \end{aligned}$$

Уравнения для функции $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$ на каждой из полупрямых $\xi \leq 0$ и $\xi \geq 0$ эквивалентны уравнениям присоединённой системы (3). Используя представление для сепаратрис, можно получить решения задач (8) в виде квадратурных формул

$$\xi = \int_{\varphi^{(0)}(x^*)}^{\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)} \left(\int_{\varphi^{(\pm)}(x^*)}^{\kappa} 2f(s, x^*, 0) \exp \left(2 \int_s^{\kappa} A(\sigma, x^*) \right) d\sigma ds \right)^{-1/2} d\kappa, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Замечание 2. Из вида уравнения (8) следует, что в функциях $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$, $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$ можно перейти к другому набору аргументов (ξ, x^*) . В дальнейшем будем пользоваться обоими наборами аргументов также и для функций внутреннего переходного слоя, для каждого конкретного случая выбирая наиболее удобный.

Функции $Q_1^{(\pm)}$ определяются из задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - 2\tilde{A}^* \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} \frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \tilde{A}^*}{\partial u} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial u} \right) Q_1^{(\pm)} &= r_1^{(\pm)}, \\ Q_1^{(\pm)}(0, x^*) + \bar{u}_1^{(\pm)}(x^*) &= 0, \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty, x^*) = 0, \end{aligned}$$

$$r_1^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) := 2\tilde{A}^* \tilde{v}^{(\pm)} \frac{d\bar{u}_0^{(\pm)}}{dx} + \left(\frac{\partial \tilde{A}^*}{\partial u} (\tilde{v}^{(\pm)})^2 + \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial u} \right) \left(\frac{d\bar{u}_0^{(\pm)}}{dx} \xi + \bar{u}_1^{(\pm)} \right) + \\ + \left(\frac{\partial \tilde{A}^*}{\partial x} (\tilde{v}^{(\pm)})^2 + \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial x} \right) \xi + \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \varepsilon}, \quad (9)$$

где символы “ $\sim$ ”, “ $*$ ” над и справа от функции означают, что её значение берётся при аргументе $(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, x^*), x^*, 0)$.

Решения задач (9) находятся в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi, x^*) = -\bar{u}_1^{(\pm)}(x^*) \frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, x^*)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, x^*)} - \\ - \tilde{v}^{(\pm)}(\xi, x^*) \int_0^\xi \frac{1}{p^{(\pm)}(s, x^*) (\tilde{v}^{(\pm)}(s, x^*))^2} \int_s^{\pm\infty} p^{(\pm)}(\eta, x^*) \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, x^*) r_1^{(\pm)}(\eta, \varepsilon) d\eta ds, \quad (10)$$

где

$$p^{(\pm)}(\xi, x^*) = \exp \left(-2 \int_0^\xi A(\tilde{u}^{(\pm)}(y, x^*), x^*) \tilde{v}^{(\pm)}(y, x^*) dy \right).$$

Функции Q следующих порядков определяются из аналогичных уравнений. Для всех функций Q справедливы стандартные экспоненциальные оценки [17]

$$|Q_i^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)| < C e^{-\varkappa|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

где C , $\varkappa$ – положительные константы.

Поскольку функции A , f , $u^{(\pm)}$ достаточно гладкие, формальная асимптотика может быть построена до любого порядка n .

3. Построение асимптотики точки $x^*(\varepsilon)$ переходного слоя. Одной из ключевых проблем построения асимптотики является построение асимптотики точки перехода $x^*(\varepsilon)$.

Непрерывность асимптотики в точке $x^*(\varepsilon)$ выполняется за счёт согласованности асимптотик $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$ в силу условия (5). Потребуем также непрерывности первых производных асимптотики на этой кривой (условие C^1 -сшивания):

$$\varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial x} \Big|_{x=x^*(\varepsilon)} - \varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial x} \Big|_{x=x^*(\varepsilon)} = 0. \quad (11)$$

Подставив асимптотическое разложение (7) в условие (11), получим

$$\frac{\partial Q_0^{(+)}(0, x^*)}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, x^*)}{\partial \xi} + \varepsilon \left(\frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0, x^*)}{\partial \xi} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_1^{(-)}(0, x^*)}{\partial \xi} \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{d\bar{u}_1^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_2^{(+)}(0, \varepsilon)}{\partial \xi} - \frac{d\bar{u}_1^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_2^{(-)}(0, \varepsilon)}{\partial \xi} \right) + \dots =: \\ =: H(x^*) + \varepsilon G_1(x^*) + \varepsilon^2 G_2(\varepsilon) + \dots = 0.$$

Здесь мы обозначили

$$G_1(x^*) := \frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0, x^*)}{\partial \xi} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_1^{(-)}(0, x^*)}{\partial \xi},$$

$$G_i(\varepsilon) := \frac{d\bar{u}_{i-1}^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_i^{(+)}(0, \varepsilon)}{\partial \xi} - \frac{d\bar{u}_{i-1}^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_i^{(-)}(0, \varepsilon)}{\partial \xi}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Функция $H(x^*)$ была введена выше (см. (4)). С учётом (6) разложим выражение (11) в ряд по степеням ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial U^{(+)}(x^*, \varepsilon)}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial U^{(-)}(x^*, \varepsilon)}{\partial x} &= H(x_0) + \varepsilon \left(\frac{dH}{dx} \Big|_{x=x_0} x_1 + G_1 \Big|_{x=x_0} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{x_1^2}{2} \frac{d^2 H}{dx^2} \Big|_{x=x_0} + x_2 \frac{dH}{dx} \Big|_{x=x_0} + x_1 \frac{dG_1}{dx} \Big|_{x=x_0} + G_2 \Big|_{\varepsilon=0} \right] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее рассмотрим некритический и критический случаи.

3.1. Некритический случай. В силу условия (A3) слагаемое при ε^0 в разложении (12) равно нулю, таким образом определён нулевой порядок x_0 в разложении точки перехода $x^*(\varepsilon)$. Определим член x_1 в (12). Приравнявая к нулю слагаемое при ε^1 , получаем

$$\frac{dH}{dx} \Big|_{x=x_0} x_1 + G_1 \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (13)$$

Используя (10), выполним преобразования

$$\begin{aligned} G_1(x^*) &:= \frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0, x^*)}{\partial \xi} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_1^{(-)}(0, x^*)}{\partial \xi} = \\ &= \frac{d\varphi^{(+)}(x^*)}{dx} - \frac{d\varphi^{(-)}(x^*)}{dx} - \bar{u}_1^{(+)}(x^*) \frac{\tilde{v}_\xi^{(+)}(0, x^*)}{\tilde{v}^{(+)}(0, x^*)} + \bar{u}_1^{(-)}(x^*) \frac{\tilde{v}_\xi^{(-)}(0, x^*)}{\tilde{v}^{(-)}(0, x^*)} - \\ &\quad - \frac{1}{\tilde{v}^{(+)}(0, x^*)} \int_0^{+\infty} p^{(+)}(\eta, x^*) \tilde{v}^{(+)}(\eta, x^*) r_1^{(+)}(\eta, \varepsilon) d\eta + \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{v}^{(-)}(0, x^*)} \int_0^{-\infty} p^{(-)}(\eta, x^*) \tilde{v}^{(-)}(\eta, x^*) r_1^{(-)}(\eta, \varepsilon) d\eta = \\ &= \left[- \frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, x^*)} \left(\int_0^{\pm\infty} p^{(\pm)}(\eta, x^*) \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, x^*) \left(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*) (\tilde{v}^{(\pm)}(\eta, x^*))^2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*, 0) \right) \eta d\eta + \int_0^{\pm\infty} p^{(\pm)}(\eta, x^*) \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, x^*) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*, 0) d\eta \right) \Big]_{-}^{+}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $[\cdot]_{-}^{+}$ означает разность между выражениями, помеченными символами “+” и “-”. Отметим, что в силу условия (A3) $\tilde{v}^{(-)}(0, x_0) = \tilde{v}^{(+)}(0, x_0)$, а также $\tilde{u}^{(-)}(0, x_0) = \tilde{u}^{(+)}(0, x_0)$. Таким образом, $\tilde{v}(\xi, x_0)$, $\tilde{u}(\xi, x_0)$, $p(\xi, x_0)$ – непрерывные по ξ функции в рассматриваемой области. Поэтому далее индекс $(\pm)$ в выражениях для $\tilde{v}(\xi, x_0)$, $\tilde{u}(\xi, x_0)$, $p(\xi, x_0)$ можно опустить.

Подставив равенства (14) в (13), получим уравнение для нахождения x_1 :

$$\frac{dH(x_0)}{dx} x_1 - \frac{1}{\tilde{v}(0, x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(\xi, x_0) \tilde{v}(\xi, x_0) \left(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}(\xi, x_0), x_0) (\tilde{v}(\xi, x_0))^2 \xi + \right. \right.$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}(\xi, x_0), x_0, 0)\xi + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\tilde{u}(\xi, x_0), x_0, 0)\Big) d\xi = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) разрешимо в силу условия (A3), таким образом, коэффициент 1-го порядка в разложении (6) определён.

Из уравнений, определяющих $Q_i^{(\pm)}$, и следующих приближений в соотношении (12) по стандартной схеме получим алгебраические задачи для x_i :

$$\frac{dH(x_0)}{dx}x_i + f_i = 0, \quad i \geq 1,$$

где f_i – известные на i -м шаге величины.

Таким образом, указан способ определения всех неизвестных функций x_i для некритического случая.

3.2. Критический случай. Условие (A3') коренным образом отличает некритический случай от критического, поскольку, как будет видно далее, оно изменяет алгоритм нахождения слагаемых в разложении (6).

Действительно, в силу условия (A3') получаем, что $H(x^*) = 0$, $x^* \in (-1, 1)$. Тогда (12) примет вид

$$\frac{\partial U^{(+)}(x^*, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U^{(-)}(x^*, \varepsilon)}{\partial x} = G_1(x^*) + \varepsilon G_2(\varepsilon) + \dots = 0.$$

Разлагая $x^*(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε , получаем для C^1 -сшивания следующее выражение:

$$\frac{\partial U^{(+)}(x^*, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U^{(-)}(x^*, \varepsilon)}{\partial x} = G_1|_{x=x_0} + \varepsilon \left(x_1 \frac{dG_1}{dx} \Big|_{x=x_0} + G_2|_{\varepsilon=0} \right) + \dots = 0. \quad (16)$$

Приравняем к нулю по очереди коэффициенты при степенях ε в (16). При ε получим

$$G_1|_{x=x_0} = 0. \quad (17)$$

Потребуем, чтобы выполнялось

Условие (A4'). Уравнение $G_1(x) = 0$ имеет решение $x = x_0$, причём $-1 < x_0 < 1$. Выполнено неравенство

$$\frac{dG_1}{dx}(x_0) > 0.$$

Подставив выражения (14) в равенство (17), получим нелинейное алгебраическое уравнение для отыскания нулевого приближения для точки переходного слоя

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, x_0) \tilde{v}(\xi, x_0) \left(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}(\xi, x_0), x_0) (\tilde{v}(\xi, x_0))^2 \xi + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}(\xi, x_0), x_0, 0)\xi + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\tilde{u}(\xi, x_0), x_0, 0) \right) d\xi = 0,$$

которое разрешимо в силу условия (A4'). Приравняв к нулю коэффициент при ε в (16), получим уравнение для определения коэффициента x_1 :

$$\frac{dG_1}{dx} \Big|_{x=x_0} x_1 + G_2|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Оно также разрешимо в силу условия (A4').

Из уравнений, определяющих $Q_i^{(\pm)}$, и следующих приближений в соотношении (17) получим алгебраические задачи для x_i :

$$\left. \frac{dG_1}{dx} \right|_{x=x_0} x_i + f_i = 0, \quad i \geq 1,$$

где f_i – известные на i -м шаге величины.

Таким образом, указан способ определения всех неизвестных функций x_i для критического случая.

4. Обоснование построенной асимптотики. Обозначим через $U_n(x, \varepsilon)$ частичные суммы порядка n построенных асимптотических рядов, в которых аргумент ξ у Q -функций заменён на $\xi_n := (x - \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i)/\varepsilon$, а x^* – на $x_n^*(\varepsilon) := \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i$. На множествах $-1 \leq x \leq x^*$ и $x^* \leq x \leq 1$, на которые отрезок $[-1, 1]$ разделяется точкой x_n^* , при построении $U_n(x, \varepsilon)$ используются функции $Q^{(-)}$ и $Q^{(+)}$ соответственно.

Для доказательства существования решения вида ступеньки в некритическом и критическом случаях используем асимптотический метод дифференциальных неравенств [18, 19]. Построим непрерывные функции $\alpha(x, \varepsilon)$, $\beta(x, \varepsilon)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим условиям.

1. Условие упорядоченности: $\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$, $x \in [-1, 1]$.
2. Действие оператора на верхнее и нижнее решения:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \beta}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\beta, x) \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 - f(\beta, x, \varepsilon) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \frac{d^2 \alpha}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\alpha, x) \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)^2 - f(\alpha, x, \varepsilon)$$

для всех $x \in (-1, 1)$, за исключением тех точек x , в которых функции $\alpha(x, \varepsilon)$, $\beta(x, \varepsilon)$ являются негладкими.

3. Условия на границе:

$$\alpha'(-1, \varepsilon) \geq u^{(-)} \geq \beta'(-1, \varepsilon), \quad \alpha'(1, \varepsilon) \leq u^{(+)} \leq \beta'(1, \varepsilon).$$

4. Условия на скачок производных:

$$\frac{d\beta}{dx}(\bar{x} - 0, \varepsilon) \geq \frac{\partial \beta}{\partial x}(\bar{x} + 0, \varepsilon),$$

где $\bar{x}$ – точка, в которой верхнее решение является негладким;

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(\underline{x} - 0, \varepsilon) \leq \frac{d\alpha}{dx}(\underline{x} + 0, \varepsilon),$$

где $\underline{x}$ – точка, в которой нижнее решение является негладким.

Сформулируем и докажем теоремы существования для каждого случая.

4.1. Некритический случай. Имеет место

Теорема 1. Если выполнены условия (A1)–(A3), то при достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2), являющееся контрастной структурой типа ступеньки, причём имеет место оценка

$$|U_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

где C – положительная константа.

Доказательство. Верхнее и нижнее решения задачи (2) будем строить путём модификации членов асимптотического ряда

$$\begin{aligned} \beta_n(x, \varepsilon) &= \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \dots + \varepsilon^{n+2} \bar{u}_{n+2}^{(\pm)}(x) + Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta, x_\beta) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon) + \dots \\ &\dots + \varepsilon^{n+2} Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon) + \Pi_\beta(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\gamma + q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)), \end{aligned}$$

где $x_\beta(\varepsilon) = x_n^*(\varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(x_{n+2} - \delta)$, $\gamma > 0$ – некоторая постоянная, обеспечивающая выполнение неравенства на оператор, $\delta > 0$ – постоянная, обеспечивающая неравенства для скачка производных, функции Π_β обеспечивают выполнение дифференциальных неравенств вблизи точек $x = -1$ и $x = 1$, их построение проводится стандартным образом (см. [17]). Здесь для функций асимптотики в области слева от точки $x_\beta(\varepsilon)$ используем обозначение $(-)$, а справа – $(+)$. Функции $Q_i^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$ являются решением соответствующих краевых задач для $Q_i^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$, у которых везде функция $x^*(\varepsilon)$ заменена на $x_\beta(\varepsilon)$, а аргумент ξ – на ξ_β . Функции $q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$ необходимы для устранения невязки в уравнении для $Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$, вносимой постоянной γ , и определяются из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 q_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - 2\tilde{A}_\beta^* \frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \frac{\partial q_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \tilde{A}_\beta^*}{\partial u} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}_\beta^*}{\partial u} \right) q_\beta^{(\pm)} = r_\beta(\xi, \varepsilon),$$

$$q_\beta^{(\pm)}(0, \varepsilon) + \gamma = 0, \quad q_\beta^{(\pm)}(\pm\infty, \varepsilon) = 0, \quad (18)$$

где символы “ $\sim$ ”, “ $*$ ”, “ β ” над и справа от функции означают, что её значение берётся при аргументе $(\tilde{u}_\beta^{(\pm)}, x_\beta, 0)$. При этом

$$\tilde{u}_\beta^{(\pm)} = \tilde{u}^{(\pm)}(\xi, x_\beta), \quad r_\beta(\xi, \varepsilon) = \gamma \left(\frac{\partial \tilde{A}_\beta^*}{\partial u} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}_\beta^*}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}, x_\beta, 0) \right).$$

Нижнее решение $\alpha_n(x, \varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Неравенство на оператор проверяется прямым вычислением. Проверим его, например, для верхнего решения $\beta_n(x, \varepsilon)$:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \beta_n}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\beta_n, x, \varepsilon) \left(\frac{d\beta_n}{dx} \right)^2 - f(\beta_n, x, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+2} \bar{f}_u \gamma + O(\varepsilon^{n+3}) < 0,$$

где черта над функцией означает, что её значение берётся при аргументе $(\varphi^{(\pm)}(x_0), x_0, 0)$.

Неравенства в граничных точках $x \pm 1$ выполняются за счёт модификации пограничных функций (см., например, [17]), и их проверка здесь не рассматривается.

Проверка упорядоченности проводится в точности также как и в статье [20].

Проверим неравенство на скачок производной

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \beta_n^{(+)}(x_\beta, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n^{(-)}(x_\beta, \varepsilon)}{\partial x} \right) = -\varepsilon^{n+2} \left(\frac{dH(x_0)}{dx} \delta + \gamma B(x_0) \right) + O(\varepsilon^{n+3}),$$

$$B(x_0) = \frac{1}{\tilde{v}(0, x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, x_0) \tilde{v}(\xi, x_0) \left(\frac{\partial A}{\partial u}(\tilde{u}^{(\pm)}, x_0, 0) (\tilde{v}(\xi, x_0))^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{u}^{(\pm)}, x_0, 0) - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}, x_0, 0) \right) d\xi.$$

Все соответствующие неравенства для нижнего решения $\alpha_n(x, \varepsilon)$ проверяются аналогично. Нужный знак скачка производной обеспечивается в силу условия (A3) и выбора достаточно большого $\delta > 0$. Теорема доказана.

4.2. Критический случай.

Теорема 2. Если выполнены условия (A1), (A2), (A3'), (A4'), то при достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2), являющееся контрастной структурой типа ступеньки, причём имеет место оценка

$$|U_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

где C – положительная константа.

Доказательство. Асимптотический метод дифференциальных неравенств позволяет обосновать построенную асимптотику. Верхнее и нижнее решения задачи (2) будем строить путём модификации членов асимптотического ряда в виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_n(x, \varepsilon) = & \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \dots + \varepsilon^{n+3} \bar{u}_{n+3}^{(\pm)}(x) + Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta, x_\beta) + \\ & + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n+3} Q_{n+3}^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon) + \Pi_\mathfrak{B}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{n+3}(\gamma + q_\mathfrak{B}^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)),\end{aligned}$$

где $x_\mathfrak{B}(\varepsilon) = x_n^*(\varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(x_{n+2} - \nu)$, $\gamma > 0$ – некоторая постоянная, обеспечивающая выполнение неравенства на оператор, $\nu > 0$ – постоянная, которая будет определена ниже, обеспечивающая неравенства для скачка производных в точке переходного слоя, функции Π_β обеспечивают выполнение неравенств вблизи точек $x = -1$ и $x = 1$, их построение проводится стандартным образом (см. [17]). Здесь для функций асимптотики в области слева от точки $x_\beta(\varepsilon)$ используем обозначение $(-)$, а справа – $(+)$. Функции $Q_i^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$ являются решением соответствующих краевых задач для $Q_i^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$, у которых везде функции x^* заменены на x_β , а аргумент ξ – на ξ_β . Функции $q_\mathfrak{B}^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$ необходимы для устранения невязки в уравнении для $Q_{n+3}^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$, вносимой постоянной γ , и определяются из задач (18). Нижнее решение $\mathfrak{A}_n(x, \varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Неравенство на оператор проверяется прямым вычислением. Например, проверим его для верхнего решения $\mathfrak{B}_n(x, \varepsilon)$:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \mathfrak{B}_n}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\mathfrak{B}_n, x, \varepsilon) \left(\frac{d \mathfrak{B}_n}{dx} \right)^2 - f(\mathfrak{B}_n, x, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+3} \bar{f}_u \gamma + O(\varepsilon^{n+4}) < 0,$$

где черта над функцией означает, что её значение берётся при аргументе $(\varphi^{(\pm)}, x_0, 0)$.

Неравенства в граничных точках $x = \pm 1$ выполняются за счёт модификации погранслойных функций (см., например, [17]), и их проверка здесь не проводится.

Доказательство упорядоченности выполняется совершенно аналогично тому, как это было сделано в работе [21].

Для доказательства теоремы остаётся проверить условие для скачка производной:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \beta_n^{(+)}(x_\beta, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n^{(-)}(x_\beta, \varepsilon)}{\partial x} \right) = -\varepsilon^{n+3} \left(\frac{dG(x_0)}{dx} \nu + \gamma B(x_0) \right) + O(\varepsilon^{n+4}).$$

Нужный знак скачка производной обеспечивается в силу условия $(A4')$ и выбора достаточно большого $\nu > 0$. Таким образом, все необходимые условия известных теорем [22] о дифференциальных неравенствах выполнены. Теорема доказана.

5. Асимптотическая устойчивость решения. Решения задачи (2) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой параболической задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$\begin{aligned}L_t[v] := & \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \varepsilon^2 A(v, x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - f(v, x, \varepsilon) = 0, \\ (x, t) \in & D_{t+} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, \quad 0 < t < \infty\}, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\pm 1, t, \varepsilon) = & u^{(\pm)}, \quad 0 < t < \infty, \\ v(x, 0, \varepsilon) = & v^0(x, \varepsilon), \quad -1 \leq x \leq 1.\end{aligned}\tag{19}$$

Очевидно, что если $v^0(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon)$, где $u(x, \varepsilon)$ – решение задачи (2), то и задача (19) имеет решение $v(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом

методе дифференциальных неравенств [6]. Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (19) в виде

$$\alpha(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)), \quad \beta(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)),$$

где $\lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Очевидно, что упорядоченность, неравенства на границе и на скачок в точке x_0 для функций $\beta(x, t, \varepsilon)$, $\alpha(x, t, \varepsilon)$ выполняются в силу того, что $\beta_n(x, \varepsilon)$, $\alpha_n(x, \varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам (1), (3), (4), и для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем из [22] достаточно проверить неравенства на оператор: $L_t[\beta] < 0$, $L_t[\alpha] > 0$. Нетрудно получить требуемые неравенства как для не критического, так и для критического случаев. В ходе доказательства нам потребуется

Лемма. Пусть $u(x, \varepsilon)$ – решение, существование которого утверждает теорема 1. Тогда выполнены следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial(u(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon))}{\partial x} \right| = O(\varepsilon^n), \quad \left| \frac{\partial(u(x, \varepsilon) - \beta_n(x, \varepsilon))}{\partial x} \right| = O(\varepsilon^n).$$

Из представлений верхнего и нижнего решений имеют место оценки

$$\begin{aligned} |U_n(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon)| &= O(\varepsilon^{n+1}), & \left| \frac{\partial(U_n(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon))}{\partial x} \right| &= O(\varepsilon^n), \\ |U_n(x, \varepsilon) - \beta_n(x, \varepsilon)| &= O(\varepsilon^{n+1}), & \left| \frac{\partial(U_n(x, \varepsilon) - \beta_n(x, \varepsilon))}{\partial x} \right| &= O(\varepsilon^n), \end{aligned}$$

в силу которых имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_n(x, \varepsilon)}{\partial x} &= \frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x, \varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial U_n(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_n(x, \varepsilon)}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x, \varepsilon)}{\partial x} + O(\varepsilon^n). \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично

$$\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n(x, \varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x, \varepsilon)}{\partial x} + O(\varepsilon^n).$$

Таким образом, из формулы (20) следует, что для доказательства леммы необходимо показать близость производной решения и производной асимптотики. Для этого сведём уравнение задачи (2) к нелинейной системе сингулярно возмущённых уравнений первого порядка

$$\varepsilon \frac{dv}{dx} = A(u, x)v^2 + f(u, x, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{du}{dx} = v, \quad u'(\pm 1, \varepsilon) = u^{(\pm)}. \quad (21)$$

Далее приведём результат из работы [1], в которой построена асимптотика и доказано существование решения типа ступенька–всплеск у системы (21) с помощью метода сшивания асимптотических разложений.

Теорема 3. Если выполнены условия (A1)–(A3), то при достаточно малых ε существует решение $(u(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon))$ задачи (21), являющееся контрастной структурой типа ступенька–всплеск, причём имеет место оценка

$$|U_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad |V_n(x, \varepsilon) - v(x, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Из теоремы 3 следует, что

$$\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x, \varepsilon)}{\partial x} = O(\varepsilon^n),$$

а значит,

$$\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_n(x, \varepsilon)}{\partial x} = O(\varepsilon^n), \quad \frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n(x, \varepsilon)}{\partial x} = O(\varepsilon^n).$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Сформулированный результат леммы остаётся справедливым и в критическом случае:

$$\left| \frac{\partial(u(x, \varepsilon) - \mathfrak{A}_n(x, \varepsilon))}{\partial x} \right| = O(\varepsilon^n), \quad \left| \frac{\partial(u(x, \varepsilon) - \mathfrak{B}_n(x, \varepsilon))}{\partial x} \right| = O(\varepsilon^n).$$

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой существования решения типа ступенька–всплеск для системы (21) в критическом случае, доказанной в статье [2] при выполнении условий (A1), (A2), (A3'), (A4').

Замечание 4. Отметим, что используемые нами теоремы из [1] и [2] доказаны при краевых условиях Дирихле. Однако не составляет труда провести доказательство и в случае условий Неймана.

Для удобства введём функцию

$$F(z, u, x, \varepsilon) := A(u, x)z^2 + f(u, x, \varepsilon).$$

С учётом обозначения запишем операторы задач

$$L_t[\beta] := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial \beta}{\partial t} - F\left(\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial x}, \beta, x, \varepsilon\right), \quad L_\varepsilon[\beta_n] := \varepsilon^2 \frac{d^2 \beta_n}{dx^2} - F\left(\varepsilon \frac{d\beta_n}{dx}, \beta_n, x, \varepsilon\right).$$

Проверим, например, неравенство $L_t[\beta] < 0$ для верхнего решения:

$$\begin{aligned} L_t[\beta] &:= \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial \beta}{\partial t} - F\left(\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial x}, \beta, x, \varepsilon\right) = L_\varepsilon[u] + e^{-\lambda(\varepsilon)t} (L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u]) + \varepsilon^2 \lambda(\beta_n - u_\varepsilon) e^{-\lambda(\varepsilon)t} + \\ &+ \left(F\left(\varepsilon \frac{d\beta_n}{dx}, \beta_n, x, \varepsilon\right) - F\left(\varepsilon \frac{du}{dx}, u, x, \varepsilon\right) \right) e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \left(F\left(\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial x}, \beta, x, \varepsilon\right) - F\left(\varepsilon \frac{du}{dx}, u, x, \varepsilon\right) \right). \end{aligned}$$

В силу построения функции $\beta_n(x, \varepsilon)$, а также учитывая результаты леммы и теоремы 3, верны равенства

$$L_\varepsilon[u] = 0, \quad L_\varepsilon[\beta_n] = -\varepsilon^{n+2} \gamma \bar{f}_u(x) + O(\varepsilon^{n+3}) < 0, \quad |\beta_n - u| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \left| \frac{d\beta_n}{dx} - \frac{du}{dx} \right| = O(\varepsilon^n).$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, преобразуем последние две скобки:

$$\begin{aligned} &\left(F\left(\varepsilon \frac{d\beta_n}{dx}, \beta_n, x, \varepsilon\right) - F\left(\varepsilon \frac{du}{dx}, u, x, \varepsilon\right) \right) e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \left(F\left(\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial x}, \beta, x, \varepsilon\right) - F\left(\varepsilon \frac{du}{dx}, u, x, \varepsilon\right) \right) = \\ &= (\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \theta_1) e^{-\lambda(\varepsilon)t} \left[F_{uu}^* (\beta_n - u)^2 + (F_{uz}^* + F_{zu}^*) \varepsilon (\beta_n - u_\varepsilon) \left(\frac{d\beta_n}{dx} - \frac{du}{dx} \right) + F_{zz}^* \varepsilon^2 \left(\frac{d\beta_n}{dx} - \frac{du}{dx} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь под индексом “*” мы понимаем, что значения частных производных взяты в некоторой промежуточной точке (не обязательно одинаковой), например,

$$\begin{aligned} F_{zz}^* &= F_{zz} \left(\varepsilon \frac{du}{dx} + \varepsilon \left(\frac{d\beta_n}{dx} - \frac{du}{dx} \right) (\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} + \theta_3 (\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \theta_1)), \right. \\ &\quad \left. u + (\beta_n - u) (\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} + \theta_3 (\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \theta_1)) x, \varepsilon \right), \end{aligned}$$

где $|\theta_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$. Окончательно имеем

$$L_t[\beta] = e^{-\lambda(\varepsilon)t} (-\varepsilon^{n+2} \gamma \bar{f}_u(x) + O(\varepsilon^{n+3}) + O(\varepsilon^{2n+2}) + \varepsilon^2 \lambda(\varepsilon) (\beta_n - u_\varepsilon)) < 0$$

при $n \geq 0$ и $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 > 0$ – достаточно малой константе.

Следовательно, в некритическом случае построенное выше решение устойчиво с областью влияния, по крайней мере, $[\alpha_0(x, \varepsilon), \beta_0(x, \varepsilon)]$.

В критическом случае можно провести аналогичные вычисления и получить неравенство

$$L_t[\mathfrak{B}] = e^{-\lambda(\varepsilon)t}(-\varepsilon^{n+3}\gamma\bar{f}_u(x) + O(\varepsilon^{n+4}) + O(\varepsilon^{2n+2}) + \varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\mathfrak{B}_n - u_\varepsilon)) < 0$$

при $n \geq 1$ и $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 > 0$.

Итак, построенное выше решение в критическом случае устойчиво с областью влияния, по крайней мере, $[\mathfrak{A}_1(x, \varepsilon), \mathfrak{B}_1(x, \varepsilon)]$.

Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (A1)–(A3). Тогда решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову как решение задачи (19) с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_0(x, \varepsilon), \beta_0(x, \varepsilon)]$, и, следовательно, $u(x, \varepsilon)$ – единственное решение задачи (2) в этой области.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (A1), (A2), (A3'), (A4'). Тогда решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову как решение задачи (19) с областью устойчивости, по крайней мере, $[\mathfrak{A}_1(x, \varepsilon), \mathfrak{B}_1(x, \varepsilon)]$, и, следовательно, $u(x, \varepsilon)$ – единственное решение задачи (2) в этой области.

6. Оценка главного собственного значения линеаризованного оператора. Неустойчивость. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для линеаризованного на решении $u(x, \varepsilon)$ оператора задачи (2):

$$L_{\text{lin}}[w] := \varepsilon^2 \frac{d^2 w}{dx^2} - 2\varepsilon^2 A(u, x) \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} - \\ - \left(\varepsilon^2 A_u(u, x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + f_u(u, x, \varepsilon) \right) w = \lambda w, \quad x \in (-1, 1), \quad w'(\pm 1, \varepsilon) = 0.$$

Известно [23], что если главное собственное значение $\lambda_0 > 0$, то решение $u(x, \varepsilon)$ является неустойчивым. Доказательство неустойчивости решения типа контрастной структуры проводится с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений [24].

Введём функцию $\Psi(x, \varepsilon) = \beta_{\text{ust}}(x, \varepsilon) - \alpha_{\text{ust}}(x, \varepsilon)$, где $\beta_{\text{ust}}(x, \varepsilon)$, $\alpha_{\text{ust}}(x, \varepsilon)$ – верхнее и нижнее решения, полученные в п. 4.1, у которых δ заменена на $-\delta$. Нетрудно показать, что при такой замене на отрезке $x \in [x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon]$ будет нарушаться упорядоченность верхнего и нижнего решений [24].

Изменим также знак неравенства в условии (A3): $\frac{dH}{dx}(x_0) < 0$, обозначение условия при этом оставим прежним.

Рассмотрим сдвиг оператора:

$$L_{\text{shift}}[w] := \varepsilon^2 \frac{d^2 w}{dx^2} - 2\varepsilon^2 A(u, x) \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} - \left(\varepsilon^2 A_u(u, x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + f_u(u, x, \varepsilon) \right) w - \varkappa \varepsilon w.$$

Выберем параметр $\varkappa > 0$ малым, чтобы выполнялись неравенства

$$L_{\text{shift}}[\Psi] < 0, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\Psi(x, \varepsilon) < 0, \quad x \in [x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon],$$

$$\frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=x_0+0} - \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=x_0-0} < 0, \quad \Psi'(-1, \varepsilon) \leq 0 \leq \Psi'(1, \varepsilon).$$

Данные соотношения показывают, что $\Psi(x, \varepsilon)$ – верхнее негладкое решение однородной краевой задачи для оператора L_{shift} .

Используя технику из [24], можно провести процедуру сглаживания и получить гладкую функцию $\Psi^*(x, \varepsilon)$ – верхнее решение однородной краевой задачи, при этом $\Psi^*(x, \varepsilon) \leq \Psi(x, \varepsilon)$, $x \in [-1, 1]$.

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для оператора L_{shift} задачи (2):

$$L_{\text{shift}}[w] = \mu w, \quad x \in (-1, 1), \quad w'(\pm 1, \varepsilon) = 0. \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что собственные значения задач для операторов L_{lin} и L_{shift} связаны формулой $\lambda = \mu + \varepsilon \kappa$. Поэтому для доказательства неустойчивости достаточно показать, что $\mu \geq 0$. Для этого нам понадобится теорема 2.4 из работы [25], являющаяся следствием теории Крейна–Рутмана.

Теорема 6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *главное собственное значение задачи (22) $\mu_0 < 0$;*
- 2) *любое решение задачи $L_{\text{shift}}[y(x, \varepsilon)] \leq 0$, $x \in (-1, 1)$, $y'(-1, \varepsilon) \leq 0 \leq y'(1, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $y(x, \varepsilon) \geq 0$.*

Покажем, что $\mu_0 \geq 0$. Предположим противное: $\mu_0 < 0$. Тогда из того, что $\Psi^*(x, \varepsilon)$ удовлетворяет задаче $L_{\text{shift}}[\Psi^*(x, \varepsilon)] \leq 0$, $x \in (-1, 1)$, $\Psi^{*'}(-1, \varepsilon) \leq 0 \leq \Psi^{*'}(1, \varepsilon)$, последует, что $\Psi^*(x, \varepsilon) \geq 0$, $x \in [-1, 1]$. Но при этом $\Psi^*(x, \varepsilon) \leq \Psi(x, \varepsilon) < 0$, $x \in [x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon]$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu_0 \geq 0$, а значит, учитывая связь $\lambda = \mu + \varepsilon \kappa$, имеет место неравенство $\lambda_0 \geq \kappa \varepsilon$. Из [23] следует, что решение неустойчиво.

Теорема 7. *При выполнении условий (A1)–(A3) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ стационарное решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (19), для которого функция $U_n(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением, неустойчиво.*

Изменим также знак неравенства в условии (A4'): $\frac{dG}{dx}(x_0) < 0$. Обозначение условия при этом оставим прежним. Аналогичным образом, с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений, полученных путём замены ν на $-\nu$ из представленных в п. 4.2, можно доказать теорему в критическом случае.

Теорема 8. *При выполнении условий (A1), (A2), (A3'), (A4') при достаточно малых $\varepsilon > 0$ стационарное решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (19), для которого функция $U_n(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением, неустойчиво.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А.Б., Давыдова М.А. О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 6. С. 938–947.
2. Давыдова М.А. Решение типа всплеска и критический случай ступеньки для сингулярно возмущённого уравнения второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 39. № 8. С. 1305–1316.
3. Nefedov N.N., Nikulin E.I., Recke L. On the existence and asymptotic stability of periodic contrast structures in quasilinear reaction–advection–diffusion equations // Russ. J. of Math. Phys. 2019. V. 26. № 1. P. 55–69.
4. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И. Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией // Моделирование и анализ информ. систем. 2018. Т. 25. № 1. С. 125–132.
5. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И. Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 5. С. 708–722.
6. Нефедов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
7. Фэй П.Я., Мин К.Н., Давыдова М.А. Контрастные структуры в задачах для стационарного уравнения реакция–диффузия–адвекция с разрывной нелинейностью // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 759–770.
8. Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O. Existence of contrast structures in a problem with discontinuous reaction and advection // Russ. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 2. P. 214–224.
9. Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O. Contrast structures in the reaction–diffusion–advection problem in the case of a weak reaction discontinuity // Russ. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 1. P. 81–90.

10. *Grimson M.J., Barker G.C.* Continuum model for the spatiotemporal growth of bacterial colonies // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 49. № 2. P. 1680–1688.
11. *Davydova M.A., Zakharova S.A.* Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2022. V. 400. № 1. Art. 113731.
12. *Krug J., Spohn H.* Universality classes for deterministic surface growth // *Phys. Rev. A.* 1988. V. 38. № 8. Art. 4271.
13. *Похожяев С.И.* Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$ // *Мат. сб.* 1980. Т. 113. № 2. С. 324–338.
14. *Муравник А.Б.* Об убывании неотрицательных решений сингулярных параболических уравнений с KPZ-нелинейностями // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2020. Т. 60. № 8. С. 1422–1427.
15. *Муравник А.Б.* О качественных свойствах решений некоторых квазилинейных параболических уравнений, допускающих вырождение на бесконечности // *Уфимск. мат. журн.* 2018. Т. 10. № 4. С. 77–84.
16. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
17. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нefeldов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // *Автоматика и телемеханика.* 1997. № 7. С. 4–82.
18. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущённых задач с внутренними слоями // *Дифференц. уравнения.* 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
19. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для нелинейных сингулярно возмущённых задач с контрастными структурами типа ступеньки в критическом случае // *Дифференц. уравнения.* 1996. Т. 32. № 11. С. 1529–1537.
20. *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction–advection–diffusion problem // *Russ. J. of Math. Phys.* 2015. V. 22. P. 215–226.
21. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной нелинейности // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 4. С. 524–537.
22. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York; London, 1993.
23. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений М., 1985.
24. *Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* О неустойчивых контрастных структурах в одномерных задачах реакция–диффузия–адвекция с разрывными источниками // *Теор. и мат. физика.* 2023. Т. 215. № 2. С. 297–310.
25. *Lopez-Gomez J.* The strong maximum principle. Mathematical analysis on the self-organization and self-similarity // *CR Acad. Sci. Paris.* 1990. V. 310. P. 49–52.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 14.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.